121. *Bemerkungen über den Untergruppensatz in freien Produkte.*

Von Mutuo TAKAHASI.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

Es sei ein freies Produkt $\mathfrak{G}$ von beliebigen Gruppen $\mathfrak{G}_a$, Kömponenten genannten, gegeben (im Zeichen: $\mathfrak{G}=\overset{*}{\prod\limits_{a\in\Gamma}}\mathfrak{G}_a$). Dabei möge die Mächtigkeit n der Indexmenge $\Gamma=\{a\}$ auch ganz beliebig sein.

Über die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen hat A. Kurosch zuerst den sogenannten Untergruppensatz bewiesen. Er bewies nämlich:[1] Jede Untergruppe eines freien Produktes $\mathfrak{G}$ ist ein freies Produkt, dessen Komponenten eine freie Gruppe und zu Untergruppen der Komponenten von $\mathfrak{G}$ konjugierten Gruppen sind.

Demnächst haben R. Baer und F. Levi durch einen topologischen Beweis den Satz wesentlich verschärft. Ihr Beweis liefert nämlich eine Zerlegung mit möglichst grossen zu Untergruppen der Komponenten von $\mathfrak{G}$ konjugierten Komponenten und diese Zerlegung hat für manche Anwendungen wichtige Eigenschaften, insbesondere ist sie in gewissem Sinne eindeutig und liefert den Beweis des Verfeinerungssatzes, dass irgend zwei freie Produktzerlegungen einer Gruppe isomorphe Verfeinerungen besitzen[2].

In der vorliegenden Arbeit soll derselbe Satz als folgendes formliert und von neuem mit Hilfe der schon im Fall der freien Gruppe benutzten Beweismethode[3] bewiesen werden. Dieser Beweis gestattet auch die Beziehung zwischen der Anzahl der Komponenten von $\mathfrak{G}$ und der von der Untergruppe $\mathfrak{U}$ zu geben. Ferner erhält man als einen Spezialfall die bekannte Schreiersche Gleichung $N=j(n-1)+n$, wobei n die Erzeugendenanzahl einer freien Gruppe $\mathfrak{G}$ und N die von ihrer Untergruppe $\mathfrak{U}$ mit dem endlichen Index $j=(\mathfrak{G}:\mathfrak{U})$ bedeutet. (§ 3)

Der Satz lautet:

Untergruppensatz. *Es sei $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}=\overset{*}{\prod}\mathfrak{G}_a$ mit dem Index $j=(\mathfrak{G}:\mathfrak{U})$. Dann gibt es eine Zerlegung von $\mathfrak{U}$:*

$$\mathfrak{U}=\mathfrak{F}*\overset{*}{\prod_{a,r_{a\nu}}}(\mathfrak{U}\frown r_{a\nu}\mathfrak{G}_a r_{a\nu}^{-1}),$$

so dass 1.) $\mathfrak{F}$ eine freie Gruppe mit $j(n-1)+1-\sum d_a$ Erzeugenden und 2.) $r_{a\nu}(\nu=1,2,\dots,d_a)$ die geeignet ausgewählten Regräsentanten

1) A. Kurosch, Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen, Math. Ann, **109** (1934) S. 647. Vgl. auch: Über freie Produkte von Gruppen, Math. Ann. **108** (1933) S. 26.

2) R. Baer und F. Levi, Freie Produkte und ihre Untergruppen, Compositio Math **3** (1936) S. 391.

3) Vgl. etwa K. Reidemeister, Einführung in die kombinatorische Topologie, Braunschweig, (1932), F. Levi, Über die Untergruppen der freien Gruppen, Math. Zeitschr. **32** (1930) S. 315, **37** (1933) S. 90.

der Klassen von $\mathfrak{G}$ *nach dem Doppelmodùl* $(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}_\alpha)$ *sind.*

§ 1. *Vorbemerkungen.* 1. Es sei $\mathfrak{G}$ ein freies Produkt von beliebigen Gruppen $\mathfrak{G}_\alpha$. Nach der Definition des freien Produktes hat jedes Element g von $\mathfrak{G}$ eine einzige unkürzbare Darstellung (Normalform), $g_1 \cdots g_t$, wo jeder Faktor g_i ein von 1 verschiedenes Element aus einer Komponente $\mathfrak{G}_\alpha$ ist und, wo je zwei benachbarte Faktoren g_i, g_{i+1} zu verschiedenen Komponenten gehören. Wir nennen dabei die Anzahl t der Faktoren die Länge von g(im Zeichen : $t=l(g)$). $(l(1)=0)$. Wenn $g \in \mathfrak{G}_\alpha$, dann ist $l(g)=1$ und umgekehrt.

Wenn bei dem formalen Produkte $gh=g, \cdots g_t h_1 \cdots h_s$ von den Normalformen zweier Elemente $g=g_1 \cdots g_t$ und $h=h_1 \cdots h_s$ keine Kürzung und keine Vereinigung[4] der Faktoren vollzogen wird, so nennen wir das Produkt $g_1 \cdots g_t h_1 \cdots h_s$ unkürzbar; im entgegengesetzten Fall kürzbar. Im unkürzbaren Fall ist also $l(gh)=l(g)+l(h)$, im kürzbaren Fall ist aber $l(gh)<l(g)+l(h)$.

2. Unter der Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach einem aus zwei Untergruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ gebildeten Doppelmodul $(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ versteht man eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{G}: \mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}+\mathfrak{H}r_1\mathfrak{K}+\mathfrak{H}r_2\mathfrak{K}+\cdots$, wo jede Klasse $\mathfrak{H}r_i\mathfrak{K}$ aus allen Elementen von der Gestalt $hr_ik, h \in \mathfrak{H}, k \in \mathfrak{K}$, besteht. Die Anzahl d der Klassen dieser Zerlegung wollen wir mit $(\mathfrak{G}:(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}))$ bezeichnen. Ist c_i der Index $(\mathfrak{K}:\mathfrak{K} \frown r_i^{-1}\mathfrak{H}r_i)$, so ist die Klasse $\mathfrak{H}r_i\mathfrak{K}$ die Vereinigungsmenge von c_i verschiedenen linksseitigen Restklassen $\mathfrak{H}r_ik$ von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$. Ist $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so ist offenbar jedes c_i zu $c=(\mathfrak{G}:\mathfrak{H}\mathfrak{K})$ gleich und $cd=j=(\mathfrak{G}:\mathfrak{H})$.

§ 2. *Beweis des Untergruppensatzes.* 1. *Erzeugende von Untergruppe.* Es sei $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}=\overset{*}{\Pi}\mathfrak{G}_\alpha$. Aus der linksseitigen Restklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{U}$

$$(0) \qquad \mathfrak{G}=\mathfrak{U}+\mathfrak{U}r_1+\mathfrak{U}r_2+\cdots+\mathfrak{U}r_i+\cdots$$

erhält man durch Vereinigung einiger Restklassen $\mathfrak{U}r$ eine Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach dem Doppelmodul $(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}_\alpha)$,

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{G}=\mathfrak{U}\mathfrak{G}_\alpha+\mathfrak{U}r_{\alpha 1}\mathfrak{G}_\alpha+\mathfrak{U}_{\alpha 2}\mathfrak{G}_\alpha+\cdots+\mathfrak{U}r_{\alpha\nu}\mathfrak{G}_\alpha+\cdots.$$

Für jede andere Komponente $\mathfrak{G}_\beta, \mathfrak{G}_\gamma, \ldots$, erhält man durch eine andere Vereinigung auch die Zerlegungen

$$(\beta) \qquad \mathfrak{G}=\mathfrak{U}\mathfrak{G}_\beta+\mathfrak{U}r_{\beta 1}\mathfrak{G}_\beta+\cdots+\mathfrak{U}r_{\beta\mu}\mathfrak{G}_\beta+\cdots,$$

$$(\gamma) \qquad \mathfrak{G}=\mathfrak{U}\mathfrak{G}_\gamma+\mathfrak{U}r_{\gamma 1}\mathfrak{G}_\gamma+\cdots+\mathfrak{U}r_{\gamma\sigma}\mathfrak{G}_\gamma+\cdots,$$

....

Nun sei u ein Element aus $\mathfrak{U}$ mit der Normalform $u=g_1 \cdots g_t$, wo etwa $g_1 \in \mathfrak{G}_\alpha, g_2 \in \mathfrak{G}_\beta, g_3 \in \mathfrak{G}_\gamma, \ldots; \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \cdots$. Dann erstens gehört g_1 zu einer bestimmten Klasse $\mathfrak{U}r_{\beta\mu}\mathfrak{G}_\beta$ von (β)-Zerlegung, also ist $g_1=u_1 r_{\beta\mu} h_\beta, h_\beta \in \mathfrak{G}_\beta$, und daher $u=u_1 r_{\beta\mu}(h_\beta g_2)g_3 \cdots g_t$, wo $u_1=g_1 h_\beta^{-1} r_{\beta\mu}^{-1}$.

4) Ist $h_1=g_t^{-1}, h_2=g_{t-1}^{-1}, \ldots, h_k=g_{t-k+1}^{-1}$, aber $h_{k+1} \neq g_{t-k}^{-1}$, so werden k Kürzungen der Reihe nach vollzogen, Gehören h_{k+1} und g_{t-k} zu derselben Komponente und $g_{t-k}h_{k+1} \neq 1$, so soll eine Vereinigung ausgeführt werden.

Zweitens ist $r_{\beta\mu}(h_\beta g_2) \in \mathfrak{U} r_{\gamma\sigma} \mathfrak{G}_\gamma$ für eine bestimmte Klasse von (γ)-Zerlegung, also ist $r_{\beta\mu}(h_\beta g_2) = u_2 r_{\gamma\sigma} h_\gamma$, $h_\gamma \in \mathfrak{G}_\gamma$, und daher $u = u_1 u_2 r_{\gamma\sigma}(h_\gamma g_3) \cdots g_t$, wo $u_2 = r_{\beta\mu}(h_\beta g_2) h_\gamma^{-1} r_{\gamma\sigma}$.

Setzt man solches Verfahren fort, so erreicht man höchstens nach t—maligen Ausführungen eine Darstellung von u, $u = u_1 u_2 \dots u_t$, wo jedes u_i von der Gestalt $r_{\alpha\nu} g_\alpha h_\beta^{-1} r_{\beta\mu}$, $g_\alpha \in \mathfrak{G}_\alpha$, $h_\beta \in \mathfrak{G}_\beta$, ist.

Wenn man nun die Restklasse $\mathfrak{U} r_i$ von (0)-Zerlegung so bestimmt, dass $\mathfrak{U} r_{\alpha\nu} g_\alpha = \mathfrak{U} r_{\beta\mu} h_\beta = \mathfrak{U} r_i$ ist, dann wird

$$r_{\alpha\nu} g_\alpha h_\beta^{-1} r_{\beta\mu}^{-1} = (r_i g_\alpha^{-1} r_{\alpha\nu}^{-1})^{-1} (r_i h_\beta^{-1} r_{\beta\mu}^{-1}),$$

und hier offenbar $r_i g_\alpha^{-1} r_{\alpha\nu}^{-1}$, $r_i h_\beta^{-1} r_{\beta\mu}^{-1} \in \mathfrak{U}$.

Nimmt man jetzt ein Repräsentantensystem $(1, a_{\alpha\nu}, b_{\alpha\nu}, \dots)$ der linksseitigen Restklassen von $\mathfrak{G}_\alpha$ nach $\mathfrak{H}_{\alpha\nu} = \mathfrak{G}_\alpha \frown r_{\alpha\nu}^{-1} \mathfrak{U} r_{\alpha\nu}$

$$(\alpha, \nu) \qquad \mathfrak{G}_\alpha = \mathfrak{H}_{\alpha\nu} + \mathfrak{H}_{\alpha\nu} a_{\alpha\nu} + \mathfrak{H}_{\alpha\nu} b_{\alpha\nu} + \cdots,$$

dann wird

$$r_i g_\alpha^{-1} r_{\alpha\nu}^{-1} = r_i a_{\alpha\nu}^{-1} r_{\alpha\nu}^{-1} \cdot r_{\alpha\nu} h_{\alpha\nu} r_{\alpha\nu}^{-1},$$

wo $g_\alpha = h_{\alpha\nu} a_{\alpha\nu}$, $h_{\alpha\nu} \in \mathfrak{H}_{\alpha\nu}$ und folglich $r_{\alpha\nu} h_{\alpha\nu} r_{\alpha\nu}^{-1} \in r_{\alpha\nu} \mathfrak{H}_{\alpha\nu} r_{\alpha\nu}^{-1} \subseteqq \mathfrak{U}$ und $r_i a_{\alpha\nu}^{-1} r_{\alpha\nu}^{-1} \in \mathfrak{U}$.

Nach obigen Betrachtungen können wir behaupten, dass die Elemente $r_i a_{\alpha\nu}^{-1} r_{\alpha\nu}^{-1}$ und die Elemente aus $r_{\alpha\nu} \mathfrak{H}_{\alpha\nu} r_{\alpha\nu}^{-1}$ ein System von Erzeugenden der Untergruppe $\mathfrak{U}$ bilden, wenn die r_i bzw. α unabhängig voneinander das Repräsentantensystem $R_0 = \{r_i\}$ von (0)-Zerlegung bzw. die Indexmenge $\Gamma = \{\alpha\}$ von Komponenten $\mathfrak{G}_\alpha$ durchlaufen.

Denn, aus (α) und (α, ν) folgt die Zerleguug

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} r_{\alpha\nu} \mathfrak{G}_\alpha &= \mathfrak{U} r_{\alpha\nu} \mathfrak{H}_{\alpha\nu} + \mathfrak{U} r_{\alpha\nu} \mathfrak{H}_{\alpha\nu} a_{\alpha\nu} + \cdots \\ &= \mathfrak{U} r_{\alpha\nu} + \mathfrak{U} r_{\alpha\nu} a_{\alpha\nu} + \cdots, \end{aligned}$$

also gilt

$$\mathfrak{G} = \sum_{r_{\alpha\nu}} \sum_{a_{\alpha\nu}} \mathfrak{U} r_{\alpha\nu} a_{\alpha\nu},$$

und man erkennt, dass das Element $r_i a_{\alpha\nu}^{-1} r_{\alpha\nu}^{-1}$ dann und nur dann vorkommt, wenn $\mathfrak{U} r_i = \mathfrak{U} r_{\alpha\nu} a_{\alpha\nu}$ ist. Nämlich wird der Teil $(r_{\alpha\nu} a_{\alpha\nu})^{-1}$ von $r_i a_{\alpha\nu}^{-1} r_{\alpha\nu}^{-1}$ durch r_i und α eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen also das Element $r_i a_{\alpha\nu}^{-1} r_{\alpha\nu}^{-1}$ mit $U(r_i, \alpha)$, und ein Element aus $r_{\alpha\nu} \mathfrak{H}_{\alpha\nu} r_{\alpha\nu}^{-1}$ mit $V(r_{\alpha\nu})$.

$$U(r_i, \alpha) = r_i a_{\alpha\nu}^{-1} r_{\alpha\nu}^{-1}, \quad V(r_{\alpha\nu}) = r_{\alpha\nu} h_{\alpha\nu} r_{\alpha\nu}^{-1}, \quad h_{\alpha\nu} \in \mathfrak{H}_{\theta\nu}.$$

Es ist klar, dass die Anzahl von Elementen $U(r_i, \alpha)$ gleich nj ist, wo n die Anzahl von Komponenten $\mathfrak{G}_\alpha$ und j der Index $(\mathfrak{G} : \mathfrak{U})$ ist.

Durch geeignete Auswahl der Repräsentanten $\{r_i\}$ von (0)-Zerlegung und $\{r_{\alpha\nu}\}$ von (α)-Zerlegung u. s. w., können wir keine nichttrivialen Relationen zwischen den Erzeugenden hervorkommen lassen.

Wir legen nämlich den $\{r_i\}$ und $\{r_{\alpha\nu}\}$ die folgenden Bedingungen auf:

$(\sum_0)$ Jedesmal, wenn $r_i = g_1 \cdots g_t = \prod_{\rho=1}^{t} g_\rho$ der Repräsentant seiner Restklasse $\mathfrak{U} r_i$ ist, soll r_i die minimale Länge $l(r_i)$ unter allen Elementen aus seiner Restklasse haben und sollen auch die Abschnitte des Produkts $\prod_{\rho=1}^{s} g_\rho (s=1,2,\dots,t-1)$ die Repräsentanten ihrer Restklasse sein. (Schreiersche Bedingung)[5].

($\sum_a$) Jedes $r_{a\nu}$ soll als ein r_μ mit minimaler Länge $l(r_\mu)$ unter den Repräsentanten $\{r_\mu\}$, $\mathfrak{U} r_{a\nu}\mathfrak{G}_a=\sum \mathfrak{U} r_\mu$, ausgenommen werden.

Jetzt denken wir uns die Repräsentantensysteme $R_0=\{r_i\}$ und $R_a=\{r_{a\nu}\}$ u.s.w. irgendwie gemäss ($\sum_0$), ($\sum_a$), $\cdots$ bestimmt, und betrachten die oben erhaltenen Erzeugenden $U(r_i, a)=r_i a_{a\nu}^{-1} r_{a\nu}^{-1}$.

Die Forderungen über $\{r_i\}$ und $\{r_{a\nu}\}$ führt uns zu den folgenden Hilfssätzen.

Hilfssatz 1. *$r_{a\nu}a_{a\nu}$ ist unkürzbar.*

Ist $r_{a\nu}a_{a\nu}$ kürzbar, so gehört der Endfaktor von $r_{a\nu}$ zu $\mathfrak{G}_a$. Dann gibt es in der Klasse $\mathfrak{U} r_{a\nu}\mathfrak{G}_a$ ein Element mit noch geringerer Länge als $l(r_{a\nu})$ entgegen der Forderung ($\sum_a$).

Hilfssatz 2. (j$-$1) *kürzbare $U(r_i, a)$ sind als Erzeugende unnötig.*

Ist $r_i a_{a\nu}^{-1} r_{a\nu}^{-1}$ kürzbar, so gehört der Endfaktor von r_i zu $\mathfrak{G}_a$, weil $a_{a\nu}^{-1} r_{a\nu}^{-1}$ nach Hilfssatz 1 unkürzbar ist, also $r_i=r_j g_a$, $g_a\in\mathfrak{G}_a$, wo r_j auch der Repräsentant seiner Restklasse ist (nach ($\sum_0$)). Dann ist $r_i a_{a\nu}^{-1} r_{a\nu}^{-1}= r_j(g_a a_{a\nu}^{-1}) r_{a\nu}^{-1}$ und bei der Zerlegung (a,ν) gehört $(g_a a_{a\nu}^{-1})^{-1}(\in\mathfrak{G}_a)$ zu einer Klasse, etwa $\mathfrak{H}_{a\nu} b_{a\nu}$, d.h. $g_a a_{a\nu}^{-1}=b_{a\nu}h_{a\nu}$, und folglich gilt $r_i a_{a\nu}^{-1} r_{a\nu}^{-1}= r_j b_{a\nu}^{-1} r_{a\nu}^{-1}\cdot r_{a\nu} h_{a\nu} r_{a\nu}^{-1}$. D.h. $U(r_i, a)$ ist durch andere Erzeugenden $U(r_j, a)$ und $V(r_{a\nu})$ darstellbar, also als Erzeugende unnötig. Die Anzahl von kürzbaren $U(r_i, a)$ ist offenbar $(j-1)$, denn für jedes $r_i\neq 1$ kommt genau ein kürzbares $U(r_i, a)$ hervor, wenn der Endfaktor von r_i zu G_a gehört.

Hilfssatz 3. *Für jedes $r_{a\nu}$ wird genau ein $U(r_{a\nu}, a)$ von den Erzeugenden gestrichen.*

Nach Forderung ($\sum_a$) ist es klar, dass aus $r_i=r_{a\nu}$ $U(r_{a\nu}, a)=1$ folgt. Die Anzahl von solchen gestrichenen $U(r_{a\nu}, a)$ ist $\sum_a d_a$, wo $d_a= \big(\mathfrak{G}:(\mathfrak{U},\mathfrak{G}_a)\big)$ ist.

Zusammenfassend haben wir also folgendes erreicht:

Die Untergruppe $\mathfrak{U}$ wird von $j(n-1)+1-\sum d_a$ unkürzbaren $U(r_i, a)$ und von Elementen $V(r_{a\nu})$ aus $\sum d_a$ Gruppen $r_{a\nu}\mathfrak{H}_{a\nu} r_{a\nu}^{-1}$ erzeugt Dabei können eventuell einige unter den Gruppen $r_{a\nu}\mathfrak{H}_{a\nu} r_{a\nu}^{-1}$ der Einheitsgruppe gleich sein.

2. *Freiheit der Erzeugenden.* Durch die Buchstaben u mit unteren Indizes sollen die Erzeugenden von $\mathfrak{U}$ bezeichnet werden, d.h. die unkürzbaren[6] $U(r_i, a)$, ihre Inversen und alle von 1 verschiedenen $V(r_{a\nu})$ aus der Untergruppe $r_{a\nu}\mathfrak{H}_{a\nu} r_{a\nu}^{-1}$.

Das Produkt $u_1\cdots u_t$ heisst ein (u)-Wort in $\mathfrak{U}$, wenn keine zwei benachbarten Faktoren u_i, u_{i+1} zueinander invers sind oder zu derselben Untergruppe $r_{a\nu}\mathfrak{H}_{a\nu} r_{a\nu}^{-1}$ gehören.

Es sei $\Phi(u)=u_1\dots u_t$ ein (u)-Wort in $\mathfrak{U}$. Dann kann bewiesen werden, dass $\Phi(u)\neq 1$ in $\mathfrak{G}=\overset{*}{\prod}\mathfrak{G}_a$ ist.

Um $\Phi(u)\neq 1$ zu beweisen, werde $\Phi(u)=1$ vorausgesetzt und zu-

5) Der Beweis, dass diese Forderung stets erfüllbar ist, wird wie bei freien Gruppen durchgeführt, vgl. etwa: K. Reidemeister (3) S. 76.

6) $U(r_i, a)$ sei im folgenden stets unkürzbar und $V(r_{a\nu})$ von 1 verschieden.

gleich angenommen, dass die (u)-Länge von $\Phi(u)$ unter allen in Frage kommenden Wörtern minimal ist.

Nach oben bemerkten hat jedes u eine unkürzbare Form $r_i g r_j^{-1}$, wo $l(g)=1$ und r_i, r_j die gemäss $(\sum_0)$ bestimmten Repräsentanten ihrer Restklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{U}$ sind. Es sei etwa $u_1=r_i g r_j^{-1}$, dann muss in $\mathfrak{G}=\overset{*}{\Pi}\mathfrak{G}_a$ der hintere Teil r_j^{-1} von u_1 in $\Phi(u)$ nach rechts weggekürzt werden, nämlich gegen ein Teilstück p eines Teilprodukts $u_2 \dots u_s$ $(s \leq t)$, weil r_j^{-1} nach links keineswegs gekürzt wird.

Wenn $p=u_2 \dots u_{s-1}(r_k h\bar{r}^{-1})$, wo $r\bar{r}=r_l$ und also r ein Abschnitt von r_l in $u_s=r_k h r_l^{-1}$ ist, dann gil $r_j^{-1}u_2 \dots u_s=r^{-1}$, und daraus folgt $u_2 \dots u_s$ $=r_j r^{-1}=1$, weil r_j und r die bestimmten Repräsentanten ihrer Restklassen sind, und weil aus $r_j r^{-1} \in \mathfrak{U}$ $r_j=r$ folgt.

Ist $p=u_2 \dots u_{s-1}r$ mit $2<s\leq t$, wo r ein Abschnitt von r_k in $u_s=r_k h r_l^{-1}$ ist, so gilt $r_j^{-1}u_2 \dots u_{s-1}r=1$ und daraus folgt $u_2 \dots u_{s-1}=$ $r_j r^{-1}=1$, weil $r_j, r \in R_0$.

In beiden Fällen erhält man ein in $\mathfrak{G}$ verschwindendes (u)-Wort $\varphi(u)$ von kürzerer (u)-Länge als $\Phi(u)$, und das steht im Widerspruch zu der $\Phi(u)$ auferlegten Minimalbedingung.

Daher ist nur möglich, dass der hintere Teil r_k von $u_2=r_k g r_l^{-1}$ nach rechts gegen den vorderen Teil r_k von $u_2=r_k h r_l^{-1}$ weggekürzt wird. Wenn aber $u_1 u_2 \neq 1$ ist, dann ist $u_1 u_2=r_i g h r_l^{-1}$, wo $gh \neq 1$ ist, und der hintere Teil r_l^{-1} von $u_1 u_2$ muss wie oben auf demselben Grunde nach rechts gegen den vorderen Teil r_m von $u_3=r_m k r_n^{-1}$ weggekürzt werden.

Holt man dieselbe Schlussweise wieder, so erreicht man folgendes:

Bei je benachbarten $u_2=r_i g r_j^{-1}$ und $u_{q+1}=r_k h r_l^{-1}$ in $\Phi(u)$ muss $r_j=r_k$ und $l(gh)=1$ sein.

Kommt also unter den $u_1, u_2, \dots, u_{s-1}$ ein $u_q=U(r_i, a)^{-1}$ vor, dann muss $u_{q+1}=U(r_i, a)$ sein. Denn der vordere Teil von u_{q+1} soll mit dem hinteren Teil r_i^{-1} von u_q invers sein und die beiden Mittelfaktoren müssen derselben Komponente $\mathfrak{G}_a$ gehören. Das ist unmöglich bei dem Wort $\Phi(u)$.

Also schliesslich muss $\Phi(u)$ entweder $U(r_i, a)$, $V(r_{a\nu})$, $V(r_{a\nu})U(r_i, a)^{-1}$, $U(r_i, a)V(r_{a\nu})$ oder $U(r_i, a)V(r_{a\nu})U(r_j, a)^{-1}$ sein, und man kann leicht erkennen, dass keines unter diesen $\Phi(u)$ in $\mathfrak{G}$ verschwindet. Z. B. sei etwa

$$\Phi(u)=U(r_i, a)V(r_{a\nu})U(r_j, a)^{-1}=r_i a_{a\nu}^{-1} r_{a\nu}^{-1} \cdot r_{a\nu} h_{a\nu} r_{a\nu}^{-1} \cdot r_{a\nu} b_{a\nu} r_j^{-1}$$
$$=r_i \cdot a_{a\nu}^{-1} h_{a\nu} b_{a\nu} \cdot r_j^{-1}.$$

Wäre $a_{a\nu}^{-1} h_{a\nu} b_{a\nu}=1$, dann $a_{a\nu} b_{a\nu}^{-1}=h_{a\nu} \in \mathfrak{H}_{a\nu}$ und also $h_{a\nu}=1$. Daraus folgt $\Phi(u) \neq 1$.

Hierdurch ist jedes $\Phi(u) \neq 1$ in $\mathfrak{G}$ und die Freiheit der Erzeugenden bewiesen. Damit ist der Untergruppensatz vollständig bewiesen.

§ 3. *Bemerkungen und Beispiele.* 1. Es sei $\mathfrak{U}=\mathfrak{F} * \overset{*}{\Pi}(\mathfrak{U} \cap r_{a\nu}\mathfrak{G}_a r_{a\nu}^{-1})$ eine im Untergruppensatz gegebene Zerlegung von $\mathfrak{U}$.

Zu jeder Gruppe $\mathfrak{K}=\mathfrak{U} \cap x\mathfrak{G}_a x^{-1} \neq 1$ *mit beliebigen* $\mathfrak{G}_a$ *und* x *aus* $\mathfrak{G}$ *ist genau ein* $\mathfrak{U}_{a\nu}=\mathfrak{U} \cap r_{a\nu}\mathfrak{G}_a r_{a\nu}^{-1}$ *in* $\mathfrak{U}$ *konjugiert.*

Beweis. x gehört zu einer bestimmten Klasse, etwa $\mathfrak{U}r_{a\nu}\mathfrak{G}_a$ von

(α)-Zerlegung in § 2.1. Also gibt es ein u aus $\mathfrak{U}$ und ein g_a aus $\mathfrak{G}_a$, so dass $x=ur_{a\nu}g_a$ ist. Dann gilt $\mathfrak{U}\frown x\mathfrak{G}_a x^{-1}=\mathfrak{U}\frown ur_{a\nu}g_a\mathfrak{G}_a g_a^{-1}r_{a\nu}^{-1}u^{-1}=\mathfrak{U}\frown ur_{a\nu}\mathfrak{G}_a r_{a\nu}^{-1}u^{-1}=u(\mathfrak{U}\frown r_{a\nu}\mathfrak{G}_a r_{a\nu}^{-1})u_u^{-1}$. Wäre $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{U}$ zu zwei verschiedenen $\mathfrak{U}_{a\nu}$, $\mathfrak{U}_{\beta\mu}$ konjugiert, so müssten $\mathfrak{U}_{a\nu}$ und $\mathfrak{U}_{\beta\mu}$ zueinander in $\mathfrak{U}$ konjugiert sein, was unmöglich ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Nach dem oben bemerkten liefert der Untergruppensatz offenbar alle Resultaten[7], die R. Baer und F. Levi in ihrer Arbeit gegeben haben.

3. Bei der Zerlegung im Untergruppensatz mögen einige $\mathfrak{U}\frown r_{a\nu}\mathfrak{G}_a r_{a\nu}^{-1}$ unter den Komponenten im allgemeinen gleich 1 sein. Darüber geben die folgenden zwei Beispiele die extremen Fälle.

(1) Im Fall der freien Gruppe $\mathfrak{G}$ mit n Erzeugenden ist $\mathfrak{G}$ ein freies Produkt von n lauter unendlichen zyklischen Gruppen $\mathfrak{G}_a$. Es sei $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit endlichem Index $j=(\mathfrak{G}:\mathfrak{U})$. Dann gilt für beliebiges x aus $\mathfrak{G}$,

$$\begin{aligned} j=(\mathfrak{G}:\mathfrak{U})&=(\mathfrak{G}:\mathfrak{U}\smile x\mathfrak{G}_a x^{-1})(\mathfrak{U}\smile x\mathfrak{G}_a x^{-1}:\mathfrak{U}) \\ &\geqq (\mathfrak{G}:\mathfrak{U}\smile x\mathfrak{G}_a x^{-1})(x\mathfrak{G}_a x^{-1}:\mathfrak{U}\frown x\mathfrak{G}_a x^{-1}) . \end{aligned}$$

Also folgt die Endlichkeit von $(x\mathfrak{G}_a x^{-1}:\mathfrak{U}\frown x\mathfrak{G}_a x^{-1})$ aus der von j. Hier ist aber $x\mathfrak{G}_a x^{-1}$ eine unendliche zyklische Gruppe und danach muss $\mathfrak{U}\frown x\mathfrak{G}_a x^{-1}\neq 1$. Daraus folgt $\mathfrak{U}\frown r_{a\nu}\mathfrak{G}_a r_{a\nu}^{1-}\neq 1$ für jedes $r_{a\nu}$ und diese Gruppen sind sämtlich unendliche zyklische Gruppen. Nach dem Untergruppensatz ist also $\mathfrak{U}$ eine freie Gruppe mit genau $j(n-1)+1$ Erzeugenden.

(2) $\mathfrak{G}$ sei nun ein freies Produkt von n zyklischen Gruppen $\mathfrak{G}_a=\{a_a\}$ von der endlichen Ordnungen m_a. Die Kommutatorpruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ hat dann den Index $j=(\mathfrak{G}:\mathfrak{U})=\Pi m_a$ und $d_a=\big(\mathfrak{G}:(\mathfrak{U},\mathfrak{G}_a)\big)=(\mathfrak{G}:\mathfrak{U}\mathfrak{G}_a)=j/m_a$. Aber die Exponentensumme von a_a in jedem Elements u aus $\mathfrak{U}$ als Potenzprodukt der Erzeugenden a_a ist $\equiv 0 \pmod{m_a}$, also enthält $\mathfrak{U}$ kein Element, welches in $r_{a\nu}\mathfrak{G}_a r_{a\nu}^{-1}$ liegt. Daher sind alle $\mathfrak{U}\frown r_{a\nu}\mathfrak{G}_a r_{a\nu}^{-1}$ gleich 1. Daraus folgt, dass die Kommutatorgruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}=\overset{*}{\Pi}\{a_a\}$, $a_a^{m_a}=1$, eine freie Gruppe ist, und die Anzahl von Erzeugenden ist

$$j(n-1)+1-\sum d_a=(\Pi m_a)[(n-1)-\sum 1/m_a]+1 .$$

7) Über weitere interesante Resultaten, welche aus dem Untergruppensatz folgen, siehe R. Baer und F. Levi (2).