120. Über die allgemeinen algebraischen Systeme, VIII*).

Von Kenjiro SHODA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

§ 23 *Lineare Systeme.* Ein A-algebraisches System $\mathfrak{A}$ heisst *linear*, wenn die lineare Abhängigkeit in $\mathfrak{A}$ definiert ist. Ist E ein mit $\mathfrak{A}$ äquivalentes[1] System der linear unabhängigen Elementen aus $\mathfrak{A}$, so ist jedes Element aus $\mathfrak{A}$ von E linear abhängig, also ist $\mathfrak{A}$ das durch E erzeugte freie System. Ein durch endlich viele Elemente erzeugtes freies System ist, wie man sich leicht überzeugt, dann und nur dann linear, wenn es die Eigenschaft besitzt, daß jedes Untersystem $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ stets durch jedem maximalen unabhängigen Teilsystem des Erzeugendensystems von $\mathfrak{A}'$ schon erzeugt wird. Es ist auch eine unmittelbare Folgerung, daß die Anzahl $m > 0$ der unabhängigen Erzeugenden eines echten Untersystems $\mathfrak{A}'$ kleiner als der von $\mathfrak{A}$ ist. Also ist kein echtes Untersystem $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{A}$ isomorph. Ist $m=0$, so besteht $\mathfrak{A}'$ nach der Definition der linearen Abhängigkeit aus einem einzigen Element, welches offenbar Nullelement ist. Ein lineares System besitzt also höchstens nur ein Nullelement und jedes andere Element erzeut ein freies System. Ein lineares System besitzt dann und nur dann kein von Null verschiedenes echtes Untersystem, wenn es durch ein einziges Element erzeugt ist.

Ist $\mathfrak{A}$ ein durch $a \neq 0$ erzeugtes lineares System, so erzeugt jedes Element $b \neq 0$ aus $\mathfrak{A}$ auch das ganze System $\mathfrak{A}$ und die Abbildung von a auf b induziert einen Automorphismus f_b von $\mathfrak{A}$: $b = f_b(a)$[2]. Daher kann man $\mathfrak{A}$ als ein durch a erzeugtes System mit Operatoren f_b auffassen. Nach der Definition der Verknüpfungen $(f_b \alpha f_c)(a) = f_b(a) \alpha f_c(a)$ bilden die Operatoren ein zu $\mathfrak{A}$ isomorphes A-algebraisches System K, in dem noch eine andere assoziative Verknüpfung — Multiplikation $f_b f_c(a) = f_b\big(f_c(a)\big)$ — definiert ist[3]. Dabei gilt der linksseitige Distributivgesetz: $f_b(f_c \alpha f_d) = f_b f_c \alpha f_b f_d$. Man beachte, daß diese Defiinition der Verknüpfung zwischen den Operatoren hängt von der Wahl des Erzeugendes a ab. Die Abbildung von a auf das Nullelement ist ein Nullelement 0 von K und $0 f_b = f_b 0 = 0$. Die identische Abbildung ist das Einselement 1 der Gruppe G aller von Null verschiedenen Elemente aus K. K besitzt kein echtes von Null verschiedenes normales Untersystem. Denn jedes normales Untersystem enthält O und folglich mit $a \neq 0$ auch alle Elemente aus K, da $0x = 0$ und $ax = b$ für jedes b lösbar ist.

---

*) I-VII in Proc. **17** (1941), 323-327; **18** (1942), 179-184, 227-232, 276-279; **19** (1943), 120-124, 259-263, 515-517.

1) Zwei Untermengen heissen äquivalent, wenn eins von der andern algebraisch abhängig ist und umgekehrt.

2) Wir gebrauchen hier die Schreibweise $f(a)$ statt a^f.

3) Vgl. die allgemeinen Verknüpfungen der Abbildungen in § 25.

Es sei umgekehrt K ein A-algebraisches System, in dem die Multiplikatinn definiert ist, so daß die von 0 verschiedenen Elemente eine Gruppe bilden und $0a=a0=0$ für jedes a aus K. Dann ist das durch ein Element a erzeugtes freies System $\mathfrak{A}$ mit dem Operatorbereich K ein lineares System, welches kein von Null verschiedenes echtes normales Untersystem besitzt.

Wir betrachten nun die allgemeinen Fall, wo $\mathfrak{A}$ durch endlich viele Elemente erzeugt wird. Man kann natürlich $\mathfrak{A}$ als das freies Produkt der je durch ein einziges Element erzeugten A-freien Systeme $\mathfrak{A}_i$ auffassen. Alle $\mathfrak{A}_i$ sind sicher zueinander isomorph. Ist jedes Untersystem von $\mathfrak{A}$, wie bei der Abelschen Gruppen, stets normal, so ist $\mathfrak{A}$ die direkte Vereinigung von den $\mathfrak{A}_i$, also ist $\mathfrak{A}$ nach den Grundvoraussetzungen in § 11 das direkte Produkt von den A_i, wenn die Restklassenzerlegung $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ durch das normalen Untersystem $\mathfrak{B}$ eindeutig bestimmt ist.[4]

Zusammenfassend erhält man also: *Ausser den Grundvoraussetzungen sei die Restklassenzerlegung durch den Modul eindeutig bestimmt und jedes Untersystem sei normal. Dann ist ein lineares A-algebraisches System das direkte Produkt der zueinander isomorphen je durch ein Element erzeugten freien Systeme mit dem Operatorbereich. Dabei ist der Operatorbereich auch ein A-algebraisches System, in dem die Multiplikation definiert ist, so daß die von Null verschiedenen Elemente eine Gruppe bilden und* $0a=a0=0$ *für jedes a aus dem Operatorbereich.* Solches System heisst *eigentlich linear.*[5]

Ein eigentlich lineares System ist offenbar vollständig reduzibel. Umgekehrt ist jedes vollständig reduzibles System eigentlich linear, wenn die Restklassenzerlegung durch dem Modul eindeutig bestimmt ist und, wenn jedes Untersystem normal ist.

§ 24 *Elementare algebraische Systeme.* Bis jetzt haben wir uns hauptsächlich auf primitive Systeme beschränkt. Wir betrachten nun noch allgemeinere Begriffe. Es sei $\mathfrak{A}$ ein algebraisches System mit dem Verknüpfungssystem V. Zwei Elemente aus $\mathfrak{A}$ brauchen aber nach einer Verknüpfung aus V nicht notwendig immer komponierbar zu sein. Es sei A wieder ein System der Verknüpfungsgleichungen $f=g$. Wenn die Gleichungen aus A stets bestehen, sobald die beiden Seite f, g Sinne haben, so heisst $\mathfrak{A}$ ein *elementares* $(A, 0)$-algebraisches System. Wenn gewisse Beschränkung σ für die Komponierbarkeit vorgegeben ist, so heisst $\mathfrak{A}$ (A, σ)-algebraisch, σ heisst der Regel für die Komponierbarkeit von $\mathfrak{A}$. Es sei $\mathfrak{A}$ (A, σ)-algebraisch. Die Gesamtheit der Elemente x derart, daß $x\alpha a$ bzw. $a\alpha x$ existiert, bezeichnen wir mit $L_\alpha(a)$ bzw. $R_\alpha(a)$. Ist $\mathfrak{B}$ ein Untersystem von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{B}$ $(A, \sigma_{\mathfrak{B}})$-algebraisch, wo $\sigma_{\mathfrak{B}}$ den Regel bedeutet, daß a aus $\mathfrak{B}$ mit den Elementen aus $\mathfrak{B}\frown L_\alpha(a)$, $\mathfrak{B}\frown R_\alpha(a)$ komponierbar ist. Ist $\bar{\mathfrak{A}}$ ein Restklassensystem von $\mathfrak{A}$, so ist eine a enthaltende Restklasse mit den Restklassen komponierbar, die mit $L_\alpha(a)$, $R_\alpha(a)$ gemeinsame Elemente besitzen.

Bei der Definition des Homomorphismus bzw. des Restklassensystems haben wir bis jetzt stillschweigend angenommen: Ist $\mathfrak{A}'$ zu

4) Vgl. hierzu § 14.

5) Z. B. K-Modul mit einem Körper K.

$\mathfrak{A}$ homomorph, so folgt aus der Existenz von $a'ab'$ stets die Existenz von aab, wo a, b beliebige Urbilder von a', b' sind. Ist $\overline{\mathfrak{A}}$ ein Restklassensystem von $\mathfrak{A}$, so folgt aus der Existenz von aab stets die Existenz von a_1ab_1 für jede kongruente Elemente a_1, b_1. Wenn man noch schwächere Definition des Homomorphismus annimmt, daß man nur aus der Existenz von aab die von $a'ab'$ für die Bilder $a'b'$ schließt, so gilt der Homomorphiesatz schon nicht. Wenn man verlangt, daß aus der Existenz von $a'ab'$ die Existenz von aab für mindestens ein Paar a, b der Urbilder folgt, so gilt der allgemeine Homomorphiesatz und unter der Voraussetzung der Existenz des Nullelementes $0 = 0\alpha 0$ für jedes α aus V der Homomorphiesatz und folglich der erste Isomorphiesatz, aber der zweite Isomorphiesatz gilt im allgemeinen nicht. Dabei versthet man unter der Restklassenzerlegung eine Klasseneinteilung derart, daß aab, a_1ab_1 kongruent sind, wenn a, a_1; b, b_1 kongruent sind und, wenn aab, a_1ab_1 beides existieren. Aus diesen beiden Verschwächerungen der Definition der Homomorphismus folgen naturgemässe Verschwächerungen der Definition der Meromorphismus. Ersichtlich sind diese schwachen Definitionen beides mit der bis jetzt gebrauchten Definition äquivalent, wenn $\mathfrak{A}$ ein primitives algebraisches System ist. Für die elementaren Systeme erweisen sich diese schwachen Definitionen manchmal als wichtig[6].

Als Beispiele der elementaren Systeme nennen wir halbgeordnete Menge, Körper, Intergritätsbereich, Mischgruppe von A. Loewy, Gruppoid von H. Brandt, Fastring und Fastkörper von H. Zassenhaus. Auf die Einzelnen werden wir aber jetzt nicht eingehen.

§ 25 *Endomorphismenbereich.* Es sei nun $\mathfrak{M}$ ein (nicht notwendig primitives) algebraisches System mit dem Verknüpfungssystem $V = \{\alpha_i\}$. Definiert man die Verknüpfung $\theta\alpha\theta'$ zweier Abbildungen θ, θ' von $\mathfrak{M}$ in sich durch $\theta(a)\alpha\theta'(a) = (\theta\alpha\theta')(a)$, so bilden die sämtlichen Abbildungen ein algebraisches System mit dem Verknüpfungssystem V. $\theta\alpha\theta'$ ist nicht notwendig Endomorphismus von $\mathfrak{M}$, auch wenn θ und θ' beides Endomorphismen sind. Die Verknüpfungen β aus V, die der Bedingung $(a\beta b)\alpha(c\beta d) = (a\alpha c)\beta(b\alpha d)$ genügen, bezeichnen wir mit V_α. Dann ist $\theta\alpha\theta'$, wie man sich leicht überzeugt, ein Endomorphismus von $\mathfrak{M}$ bezüglich V_α.

Es sei nun $\mathfrak{M}$ ein elementares System und $f(a_1, \cdots, a_r) = g(a_1, \cdots, a_r)$ sei eine Verknüpfungsgleichung. Existieren $f(\theta_1, \cdots, \theta_r)$ und $g(\theta_1, \cdots, \theta_r)$ für die Endomorphismen $\theta_1, \cdots, \theta_r$, so ist ersichtlich $f(\theta_1, \cdots, \theta_r) = g(\theta_1, \cdots, \theta_r)$. Ist also $\mathfrak{M}$ ein elementares $(A, 0)$ algebraisches System, so bilden die Endomorphismen auch ein $(A, 0)$-algebraisches System, welches noch eine Verknüpfung (Multiplikation) besitzt, Debei gilt der zweiseitige Distributivgesetz[7].

Ist $V_\alpha = V$ für jedes α und ist $\mathfrak{M}$ primitiv, so bilden die Endomorphismen ein A-algebraisches System mit Multiplikation als eine Verknüpfung[8]. Ist ferner $\mathfrak{M}$ ein freies A-algebraisches System, so stimmt unsere Definition der Verknüpfungen zwischen den Endomorphismen

6) Z. B. der Homomorphismus der halbgeordneten Menge.

7) Z. B. Fastring und Fastkörper. Vgl. H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie.

8) Z. B. Automorphismenring einer Abelschen Gruppe.

mit dem folgenden überein. Sind $\theta(a_i)$ die Bilder der Erzeugenden a_i, so sei $(\theta\alpha\theta')(a_i)=\theta(a_i)\alpha\theta'(a_i)$. Diese Definition gilt für jedes freies A-algebraisches System $\mathfrak{M}$. Im Fall $V_a=V$ ist sie von der Wahl der Erzeugenden unabhängig und die Multiplikation ist zweiseitig distributiv.

Ist $\mathfrak{M}$ ein eigentlich lineares System, so lässt sich $\mathfrak{M}$ nach § 23 als das direkte Produkt $(Ka_1 Ka_2 \dots Ka_n)$ darstellen. Jede Abbildung von a_i auf $\big(\theta_{i1}(a_1)\theta_{i2}(a_2)\dots\theta_{in}(a_n)\big)$ bestimmt für jede Operatoren θ_{ij} aus K einen Endomorphismus von $\mathfrak{M}$ und umgekehrt. Setzt man also die Erzeugenden a_i fest, so lässt sich jeder Endomorphismus eineindeutiger Weise durch eine Matrix darstellen, obwohl man den Verknüpfungsregel für die Matrizen nicht ausführlich angeben kann.

§ 26 *Allgemeine Darstellungstheorie*[9]. Wir werden nun die Darstellungen eines algebraischen Systems $\mathfrak{A}$ durch die Endomorphismen eines algebraischen Systems $\mathfrak{M}$ untersuchen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die primitiven A-algebraischen Systeme $\mathfrak{M}$ mit dem Verknüpfungssystem $V_{\mathfrak{M}}$ derart, daß der Endomorphismenbereich von $\mathfrak{M}$ auch ein A-algebraisches System $\mathfrak{A}^*$ bildet. $\mathfrak{A}^*$ besitzt dann, wie wir schon erwähnten, die assoziative Multiplikation als seine Verknüpfung. Also ist A^* ein A^*-algebraisches System mit dem Verknüpfungssystem V^*, wo $A^* \supset A$, $V^* \supset V_{\mathfrak{M}}$ sind. Wir betrachten die homomorphen Abbildungen von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}^*$. Wir nehmen an, daß das Verknüpfungssystem $V_{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ in dem V^* von $\mathfrak{A}^*$ enthalten ist. Setzt man in $\mathfrak{A}$ die Folgegleichungen $\bar{A}$ von A voraus, die durch die Verknüpfungen aus $V_{\mathfrak{A}}$ darstellbar sind, so erhält man ein Restklassensystem $\bar{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ und jede Darstellung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}^*$ ist zu $\bar{\mathfrak{A}}$ homomorph. Daher nehmen wir an, daß $V_{\mathfrak{A}} \leq V^*$ und $\mathfrak{A}$ ein $\bar{A}$-algebraisches System ist.

Unter dem Darstellungssystem von $\mathfrak{A}$ versteht man nach E. Noether ein A-algebraisches System $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{A}$ als Operatorbereich: $\theta(a\alpha b)=\theta(a)\alpha\theta(b)$, $(\theta\alpha\theta')a=\theta(a)\alpha\theta'(a)\theta\big(\theta'(a)\big)=(\theta\theta')a$ für a, b aus $\mathfrak{M}$, θ aus $\mathfrak{A}$, α aus $V_{\mathfrak{A}}$. Ordnet man dem Element θ die Abbildung von a auf $\theta(a)$ zu, so erhält man eine Darstellung von $\mathfrak{A}$. Ist 0 ein festgesetztes Nullelement von $\mathfrak{A}$, so ist $0(a)=(0\alpha 0)(a)=0(a)\alpha 0(a)$ für jedes a, also ist $0(a)$ auch ein Nullelement von $\mathfrak{M}$, welches auch mit 0 bezeichnet wird: $0(a)=0$. Die Gesamtheit der Operatoren θ aus $\mathfrak{A}$ mit $\theta(a)=0$ bildet ein normales Untersystem $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ und die Darstellung ist zu einem Restklassensystem $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ isomorph, wenn $\mathfrak{M}$ ein einziges Nullelement hat.

Ist umgekehrt eine Darstellung von $\mathfrak{A}$ durch Endomorphismem von $\mathfrak{M}$ vorgegeben, so definieren wir $\theta(a)$ als Bild von a bei der θ zugeordneten Abbildung von $\mathfrak{M}$. Dann ist $\mathfrak{M}$ ein Darstellungssystem von $\mathfrak{A}$ und die vorgegebene Darstellung von $\mathfrak{A}$ ist durch $\mathfrak{M}$ erhältlich.

Ist η ein Automorphismus von $\mathfrak{M}$, so erhält man wegen des zweiseitigen Distributivgesetz der Multiplikation eine Darstellung, wenn man θ die Abbildung $a \to (\eta^{-1}\theta\eta)(a)$ zuordnet. Diese beiden Darstellun-

9) Vgl. hierzu E. Noether, Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie, Math. Zeitscher, 30 (1929), 641-692.

gen heissen zueinander äquivalent. Setzt man ein Erzeugendessystem $E=\{a_1, a_2, \dots\}$von $\mathfrak{M}$ fest, so lässt sich jeder Endomorphismus φ durch die Funktionen $\varphi_i(x_{i_1} \dots, x_{i_r})$ darstellen, so daß $\varphi(a_i)=\varphi_i(a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$ sind. Sind nun $\theta(a_i)=\theta_i(a_{i_1}, \dots, a_{i_r}), \theta\big(\eta(a_i)\big)=\theta'_i\big(\eta(a_{i_1}), \dots, \eta(a_{i_r})\big)$, so ist ersichtlich $(\eta^{-1}\theta\eta)(a_i)=\theta'_i(a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$. Daher erhält man eine äquivalente Darstellung, wenn man die Bilder von den Elementen aus E bei einem Automorphismus als neues Erzeugendessystem E' annimt und die durch die E' zugehörigen Funktionen θ'_i definierte Dastellung bezüglich E konstruiert.

Ist $\mathfrak{N} \neq 0$ ein echtes normales Untersystem von $\mathfrak{M}$, so sagen wir, daß die durch $\mathfrak{M}$ bestimmte Darstellung in die durch $[\mathfrak{N}]$ bestimmte Darstellung und die durch $[\mathfrak{M}/\mathfrak{N}]$ bestimmte Darstellung halbreduzibel ist. Ist $[\mathfrak{M}]$ das direkte Produkt von zwei normalen Untersysteme, so spricht man von der (zweiseitigen) Zerlegung der durch $\mathfrak{M}$ bestimmten Darstellung. Dann kann man, wie bei der üblichen Darstellungstheorie, gewisse Sätze in der Theorie der algebraischen Systeme auf diese allgemeine Darstellungstheorie übertragen. Der Schreiersche Satz, der Jordan-Höldersche Satz und der Remak-Schmidtsche Satz lasst sich ohne Mühe darstellungstheoretisch formulieren.

Ist $\mathfrak{M}$ ein eigentlich lineares System, so kann man nach § 25 die Darstellungen durch Matrrzen erhalten. Dann gelten gewisse Verallgemeinerungen der Sätze in der üblichen Darstellungstheorie. Darauf werden wir jetzt nicht eingehen.