117. *Une méthode opérationnelle dans la théorie des nombres naturels.*

Par Motokiti KONDÔ.

L'institut mathématique, l'université impériale de Kyusyu, Fukuoka.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

Le but de cette note est de développer la théorie axiomatique de G. Peano sur les nombres naturels au point de vue des opérations. Une opération que je dis ici est une correspondance univoque qui fait correspondre un nombre naturel à chaque celui, et je définis l'addition et la multiplication de deux nombres naturels par les compositions des opérations que nous les appelons linéaire et additives respectivement. Alors, l'associativité de l'addition et de la multiplication sont obtenue sans peine par celle de la composition des opérations et de même pour la distributivité. La commutativité de l'addition et de la multiplication sont démontrées par l'unicité des opérations. Ce méthode n'est pas essentiellement distincte de celle considérée ordinairement dans la théorie des nombres naturels de G. Peano, mais il nous parait que l'addition et la multiplication des nombres naturels sont données plus naturellement par la notion des opérations.

1. Soit N l'ensemble de tous les nombres naturels détérminés par le système des axiomes de G. Peano[1]. Quand une opération $F(x)$ définie sur N et dont le contre-domaine est situé dans N remplit la condition

$$F(x')=\big(F(x)\big)$$

pour tout nombre naturel x, elle s'appelle linéaire. Par exemple $F(x)=x'$ et $I(x)=x$ définies sur N tout entier sont linéaires. Nous avons d'abord sur elles le

Théorème 1. *Toute opération linéaire $F(x)$ est déterminée complètement par $F(1)$.*

Démonstration. Soient $F(x)$ et $G(x)$ les opérations linéaires telles qu'on ait $F(1)=G(1)$. L'ensemble M des nombres naturels x tels qu'on ait $F(x)=G(x)$ satisfait aux conditions a) et b) de V. En effet, on a par la supposition $F(1)=G(1)$ et donc $1\in M$. Puis, $x\in M$ entraine $F(x)=G(x)$ et par suite $\big(F(x)\big)'=\big(G(x)\big)'$ d'après II, ce qui donne par

1) Le système des axiomes de G. Peano sur les nombres naturels est bien connu, mais pour le citer, nous le posons ici.

I. 1 est un nombre naturel.

II. A chaque nombre naturel x, il existe précisément un nombre naturel appelé le suivant de x et désigne par x'. Pour deux nombres naturels x et y, $x=y$ entraine $x'=y'$.

III. On a toujours $x'\neq 1$ pour tout nombre naturel x.

IV. Pour deux nombres naturels x et y, $x'=y'$ entraine $x=y$.

V. Soit M un ensemble des nombres naturels tels qu'on ait

a) $1\in M$, b) $x\in M$ entraine $x'\in M$.

Alors, M contient tous les nombres naturels.

la définition $F(x')=G(x')$, c'est-à-dire, $x' \in M$. Donc, M remplit a) et b) de V et par suite M contient tous les nombres naturels, d'où $F(x)=G(x)$ pour tout nombre naturel x. C. Q. F. D.

Pour une opération lineaire $F(x)$, quand nous avons $F(1)=1$, elle remplit $F(x)=x$ pour tout nombre naturel x. Quand nous avons $F(1) \neq 1$, il existe d'après le

Lemme 1. *Pour tout nombre naturel x tel qu'on ait $x \neq 1$, il existe exactement un nombre naturel y tel qu'on ait $x=y'$,*

un nombre naturel y qui satisfait à $F(1)=y'$ et donc d'après le théorème 1, elle est déterminée complètement par y. D'où, nous la désignons par $\Phi_y(x)$. Par exemple, nous avons $\Phi_1(x)=x'$.

Théorème 2. *Pour tout nombre naturel y, il existe l'opération linéaire $\Phi_1(x)$.*

Démonstration. Quand nous désignons par M l'ensemble des nombre naturels y pour lesquels il existe $\Phi_y(x)$, il remplit les conditions a) et b) de V. En effet, $F(x)=x'$ est linéaire et on a $F(1)=1'$, ce qui entraine $1 \in M$. Puis, lorsqu'on a $y \in M$, il existe $\Phi_y(x)$ et $F(x)=\big(\Phi_y(x)\big)'$ est aussi linéaire. En effet, c'est donné par l'égalité $F(x')=\big(\Phi_y(x')\big)'=\Big(\big(\Phi_y(x)\big)'\Big)'=\big(F(x)\big)'$ et $F(1)=\big(\Phi_y(1)\big)'=(y')'$, ce qui donne $F(x)=\Phi_{y'}(x)$ et par suite $y' \in M$. Donc, M remplit a) et b) de V, d'où il contient tous les nombres naturels, c'est-à-dire, il existe $\Phi_y(x)$ pour tout nombre naturel y. C. Q. F. D.

2. Maintenant, nous définirons l'addition des nombres naturels comme il suit, c'est-à-dire, pour deux nombres naturels u et v, nous entendrons par la somme de u et v le nombre naturel w tel qu'on ait

$$\Phi_w(x)=\Phi_u\big(\Phi_v(x)\big),$$

et nous la désignons par $u+v$. Or, pour compléter cette définition, il faut de voir l'existence de la somme de deux nombres naturels, et c'est donné par le suivant.

Théorème 3. *Pour deux nombres naturels u et v, $F(x)=\Phi_u\big(\Phi_v(x)\big)$ est linéaire et $F(1) \neq 1$.*

Démonstration. Comme nous avons $F(x')=\Phi_u\big(\Phi_v(x')\big)=\Phi_u\Big(\big(\Phi_v(x)\big)'\Big)$ $\Big(\Phi_u\big(\Phi_v(x)\big)\Big)'$, $F(x)$ est linéaire. Or, nous avons $F(1)=\Phi_u\big(\Phi_v(1)\big)=\Phi_u(v')=\big(\Phi_u(v)\big)'$ et donc $F(1) \neq 1$. C. Q. F. D.

Puis, il faut considérer la relation entre l'addition et l'égalité des nombres naturels. Nous avons pour cela le

Théorème 4. *$s=u$ et $t=v$ entrainent $s+t=u+v$.*

En effet, $s=u$ entraine d'après le théorème 1 $\Phi_s(x)=\Phi_u(x)$, et de même $\Phi_t(x)=\Phi_v(x)$, d'où $\Phi_s\big(\Phi_t(x)\big)=\Phi_u\big(\Phi_v(x)\big)$, c'est-à-dire, $s+t=u+v$. C. Q. F. D.

Or, la transitivité et la commutativité de l'addition sont obtenues comme il suit.

Théorème 5. *Pour trois nombres naturels u, v et w, nous avons $(u+v)+w=u+(v+w)$.*

Démonstration. C'est obtenu par la transitivité de la composition des opérations. En effet, nous avons sans peine $(\Phi_u\Phi_v)\Phi_w=\Phi_u(\Phi_v\Phi_w)$, ce qui entraine $(u+v)+w=u+(v+w)$. C. Q. F. D.

Lemme 2. *Pour tout nombre naturel u,* $1+u=u+1=u'$.

En effet, nous avons d'après la définition $\Phi_{1+u}(x)=\Phi_1\big(\Phi_u(x)\big)=\big(\Phi_u(x)\big)'=\Phi_u(x')=\Phi_u\big(\Phi_1(x)\big)=\Phi_{u+1}(x)$, d'où $1+u=u+1$. En autre part, $\Phi_{1+u}(1)=\big(\Phi_u(1)\big)'=(u')'$ entraine $1+u=u'$.

Lemme 3. *Pour deux nombres naturels u et v, nous avons* $u'+v=u+v'=(u+v)'$.

En effet. d'après le théorème 5 et le lemme 2, nous avons $u'+v=(u+1)+v=u+(1+v)=u+v'=u+(v+1)=(u+v)+1=(u+v)'$.

Théorème 6. *Pour deux nombres naturels u et v, nous avons* $u+v=v+u$.

Démonstration. Nous définirons d'abord deux opérations zur N $F(x)=x+v$ et $G(x)=v+x$. Elles sont alors linéaire. En effet, nous avons d'après le lemma 3 $F(x')=x'+v=(x+v)'=\big(F(x)\big)'$ et de même $G(x')=\big(G(x)\big)'$, d'où elles sont linéaires. Or, nous avons d'après le lemme 2 $F(1)=1+v=v+1=G(1)$, ce qui entraine d'après le théorème 1 $F(x)=G(x)$, ce qui entraine en particulier $F(u)=G(u)$, c'est-à-dire, $u+v=v+u$. C. Q. F. D.

3. Quand une opération $F(\mathrm{x})$ définie sur N et dont le contre-domaine est situe dans N remplit pour deux nombres naturels u et v

$$F(u+v)=F(u)+F(v)\,,$$

$F(x)$ s'appelle additive. Par exemple, $F(x)=x+x$ et $I(x)=x$ définie sur N sont additives. Or, nous avons de même que le théorème 1

Théorème 7. *Toute opération additive $F(x)$ est déterminée complètement par $F(1)$.*

Démonstration. Etant données deux opérations additives $F(x)$ et $G(x)$ telles qu'on ait $F(1)=G(1)$, nous désignons par M l'ensemble des nombres naturels x tels qu'on ait $F(x)=G(x)$. Il satisfait alors aux conditions a) et b) de V. En effet, on a par la supposition $F(1)=G(1)$ et donc $1\in M$. Puis, $x\in M$ entraine $F(x)=G(x)$, ce qui donne $F(x')=F(x+1)=F(x)+F(1)=G(x)+G(1)=G(x+1)=G(x')$ et donc $x'\in M$. Donc, M remplit a) et b) de V et par suite M contient tous les nombres naturels, c'est-à-dire, $F(x)=G(x)$ pour tout nombres naturel x. C. Q. F. D.

Quand nous avons $F(1)=y$ pour une opération additive $F(x)$, nous la désignons par $\Phi_y(x)$. Nous avons alors

Théorème 8. *Pour tout nombre naturel y, il existe l'opération additive $\Phi_y(x)$.*

Démonstration. Quand nous désignons par M l'ensemble des nombres naturels y pour lesquel il existe $\Phi_y(x)$, il remplit les conditions a) et b) de V. En effet, $F(x)=x$ est additive et on a $F(1)=1$, ce qui donne $1\in M$. Puis, lorsqu'on a $y\in M$, il existe $\Phi_y(x)$ et $F(x)=\Phi_y(x)+x$ est aussi additive. En effet, nous avons $F(u+v)=\Phi_y(u+v)+(u+v)$

$\big(\Phi_y(u)+\Phi_y(v)\big)+(u+v)=\big(\Phi_y(u)+u\big)+\big(\Phi_y(v)+v\big)=F(u)+F(v)$ et de plus $F(1)=\Phi_y(1)+1=y+1=y'$, ce qui donne $F(x)=\Phi_{y'}(x)$ et donc $y' \in M$. Donc, M remplit les conditions a) et b) de V, d'ou M contient tous les nombres naturels, c'est-à-dire, il existe $\Phi_y(x)$ pour tout nombre naturel y. C. Q. F. D.

4. Or, pour la somme de deux opérations additives, nous avons le

Théorème 9. *Pour deux nombres naturels u et v, nous avons* $\Phi_u(x)+\Phi_v(x)=\Phi_{u+v}(x)$.

Démonstration. Quand nous posons $F(x)=\Phi_u(x)+\Phi_v(x)$, nous avons $F(x+y)=\Phi_u(x+y)+\Phi_v(x+y)=\Phi_u(x)+\Phi_u(y)+\Phi_v(x)+\Phi_v(y)=F(x)+F(y)$ et donc $F(x)$ est additive. Or, nous avons $F(1)=\Phi_u(1)+\Phi_v(1)=u+v$ et par suite, $F(x)=\Phi_{u+v}(x)$, c'est-à-dire, $\Phi_w(x)+\Phi_v(x)=\Phi_{u+v}(x)$.

C. Q. F. D.

5. Puis, nous définirons la multiplication des nombres naturels. Voici la définition. Etant donnés deux nombres naturels u et v, nous appelons le nombre naturel, w tel qu'on ait $\Phi_w(x)=\Phi_u\big(\Phi_v(x)\big)$ la produit de u et v, et nous le désignons par uv. Or, de même que le cas de l'addition, il faut voir l'existence de la produit de deux nombres naturels et c'est donné par le suivant.

Théorème 10. *Pour deux nombres naturels u et v,* $F(x)=\Phi_u\big(\Phi_v(x)\big)$ *est additive.*

Démonstration. Nous avons d'après la définition $F(x+y)=\Phi_u\big(\Phi_v(x+y)\big)=\Phi_u\big(\Phi_v(x)+\Phi_v(y)\big)=\Phi_u\big(\Phi_v(x)\big)+\Phi_u\big(\Phi_v(y)\big)=F(x)+F(y)$ et donc $F(x)$ est additive. C. Q. F. D.

Puis, il faut considérer la relation entre la multiplication et l'égalité des nombres naturels et nous avons de même que le théorème 4 le

Théorème 11. *$s=u$ et $t=v$ entrainent $st=uv$.*

Encore, nous avons de même que le théorème 5 le

Théorème 12. *Pour trois nombres naturels u, v et w, nous avons* $(uv)w=u(vw)$.

Puis, nous avons sur la distributivité le suivant.

Théorème 13. *Pour trois nombres naturels u, v et w, nous avons* $u(v+w)=uv+uw$ *et* $(v+w)u=vu+wu$.

En effet, nous avons $\Phi_{u(v+w)}=\Phi_u(\Phi_{v+w})=\Phi_u(\Phi_v+\Phi_w)=\Phi_u\Phi_v+\Phi_u\Phi_w=\Phi_{uv}+\Phi_{uw}$ d'ou $u(v+w)=uv+uw$, et de même nous avons $(v+w)u=vu+wu$. C. Q. F. D.

Enfin, nous considérons la commutativité de la multiplication. Pour cels, nous posons quelques lemmes.

Lemme 4. *Pour un nombre naturel u,* $1u=u1=u$.

En effet, $\Phi_{1u}(x)=\Phi_1\big(\Phi_u(x)\big)=\Phi_u(x)=\Phi_w\big(\Phi_1(x)\big)=\Phi_{u1}(x)$, ce qui entraine $1u=u1=u$.

Lemme 5. *Pour deux nombres naturels u et v, nous avons* $u'v=uv+v$ et $uv'=uv+u$.

En effet, nous avons d'après le théorème 13 et le lemme 4 $u'v=(u+1)v=uv+1v=uv+v$ et $uv'=u(v+1)=uv+u1=uv+u$.

C. Q. F. D.

Théorème 14. *Pour deux nombres naturels u et v, nous avons $uv=vu$.*

Démonstration. Nous définirons d'abord sur N deux opérations $F(x)=xv$ et $G(x)=vx$. Elles est alors additives. En effet, nous avons d'après le théorème 13 $F(x+y)=(x+y)v=xv+yv=F(x)+F(y)$, d'où $F(x)$ est additive, et de même $G(x)$ est additive. Or, nous avons d'après le lemme 4 $F(1)=1v=v1=G(1)$ et donc d'après le théorème 7 nous avons $F(x)=G(x)$. En particulier, nous avons $F(u)=G(u)$, c'est-à-dire, $uv=vu$. C. Q. F. D.