115. *Zur Theorie der hyperabelschen Funktionen, III.*

Von Hiraku TÔYAMA.

Mathematisches Institut, Tokyo Kogyo Daigaku.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

Das Abelsche Theorem und die Lösbarkeit des Jacobischen Umkehrproblems welche die wichtigste Rolle in der Theorie der algebraischen Funktionen spielen, lassen sich algebraisch als die Dualität zwischen der Bettischen Gruppe und der Divisorenklassengruppe nullter Ordnung auf der geschlossenen Riemannschen Fläche ausdrücken[1]. Diese Auffassung führt naturgemäss zur Verallgemeinerung auf den nicht-abelschen Fall, d. h. zur Aufstellung der Dualität zwischen der Fundamentalgruppe und der Halbgruppe der allgemeinen Divisorenklassen. Dafür genügt, wie die bisherigen Ergebnisse[2] zeigen, ein Dualitätssatz Tannakascher Art[3] hinsichtlich der Fundamentalgruppe. Doch konnte ich, wegen der topologischen Schwierigkeit, jenen Satz nur unter einer funktionentheoretischen Stetigkeitsbedingung beweisen, die nicht rein algebraisch-topologisch, aber vom Standpunkte der Funktionentheorie nicht unnäturlich ist.

Hilfssatz 1. *Wenn eine Fundamentalgruppe* $\mathfrak{F}$ $(p > 1)$ *gegeben ist, so gibt es stets eine treue unitäre Darstellung* 2*-ter Ordnung, die vorgeschriebene Eigenwerte in Verzweigungspunkten hat, und sich auf die volle unitäre Gruppe* 2*-ter Ordnung überalldicht abbilden lässt.*

Beweis Wie in der Uniformisierungstheorie wohlbekannt, ist die Fundamentalgruppe als die Fuchssche Gruppe treu dargestellt[4]. Wenn die Matrixgleichung $A_1^{\alpha_2} B_1^{\beta_1} A_2^{\alpha_2} \ldots C_l^{r_l} = E$ für ein Gruppenelement $t = a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} a_2^{\alpha_2} \ldots c^{r_l}$ alle unitären Darstellungen als :Lösungen zulässt, so hat sie alle komplexen Darstellungen als Lösungen (nach der Methode der unitären Beschränkung), d. h. gegen die obige Tatsache. Also in der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_u$ aller unitären Darstellungen ist die der Gleichung $T_t = E$ entsprechende Menge $\mathfrak{M}_t$ nirgendsdicht. Somit kann die Gesamtheit aller abzählbaren $\mathfrak{M}_t$ nicht die ganze $\mathfrak{M}_u$ überdecken. So gibt es eine treue unitäre Darstellung, und überdies unter diesen kann man solche A_1 und B_1 wählen, (nach analogem Schlusse), so dass

$$A_1 = G^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} \end{pmatrix} G \qquad B_1 = H^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\beta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\beta_2} \end{pmatrix} H,$$

---

1) H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, (1923), 130.

2) A. Weil, Généralisation des fonctions abéliennes, Journal de mathématiques pures et appliquées, **17** (1938), 47–87.

H. Tôyama, Zur Theorie der hyperabelschen Funktionen, Proc. **19** (1943), 415–419, und II (erscheint demnächst in diesem Journal).

3) T. Tannaka, Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen, Tôhoku Math. Journ. **45** (1938), 1–12.

4) Freilich ist die Fuchssche Gruppe eine projektive, so ist eine geringe Modifikation nötig.

5) D. h. diese Gruppe ist „maximally almost periodic" im Sinne von J. v. Neumann; Almost periodic functions in a group, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 445-492.

wo $2\pi, \alpha_1, \alpha_2$ und $2\pi, \beta_1, \beta_2$ rational voneinander unabhängig sind. Dann nach dem Kroneckerschen Approximationssatz kommt $A_1^l B_1^m A^n$ beliebig nahe zu jeder unitären Matrix. Dieselbe Darstellung sei durch U_s bezeichnet[1].

Nun konstruiere man die Poincarésche Zetafuchssche Funktion, θ^*, welche der oben erhaltenen unitären Darstellung U_s gehören.

Hilfssatz 2. *Durch geeignete Wahl von Matrix Z, die zum Grundkörper k gehört, kann man die Riemannsche Flüche der $\theta^* Z = \theta$ zum ganzen Einheitskreis machen.*

Beweis. Wenn in einem nichtverzweigten Punkte $w=a$ jede Funktion θ_{ik} die Ortsuniformisierende $(w-a)^n$ hat, so wird sie nach Multiplikation passend gewählter, zu k gehöriger Z, zu $w-a$. Zweitens falls $w=a$ ein Verzweigungspunkt (Signatur >1) ist, so ist die Ortsuniformisierende bekanntlich $w-a$ (für geeignete Eigenwerte). Nach Hilfssatz 1 ist die Riemannsche Fläche der θ der ganze Einheitskreis, dessen Rand natürliche Grenze ist.

Hilfssatz 3. *Zwischen den Funktionen $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}$ besteht keine algebraische Relation.*

Beweis. Wenn für ein gewisses Polynom $P(X)$ eine identische Gleichung $P(\theta)=0$ besteht, so wird nach analytischer Fortsetzung s, $P(U_s\theta)=0$ und wegen der Stetigkeit des P und Eigenschaft der U_s, besteht sie für jede unitäre U_s und daher für jede komplexe A, d. h. $P(A\theta)=0$. So ist $P(X)=0$ für jede X. Darum war $P(X)$ schon von Anfang an ein identisch verschwindendes Polynom. w. z. b. w.

Es sei K der Körper, der durch Adjunktion der $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}$ zu Konstantenkörper der komplexen Zahlen entsteht. Dann ist K, rein algebraisch betrachtet, ein rationaler Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 4, daher lässt sich jedes Element eindeutig (von gemeinsamen Faktoren abgesehen) als rationale Funktion der θ ausdrücken.

Hilfssatz 4. *Die Transformation $\theta \to B\theta$, wo $B=UA$, induziert in K einen Automorphismus, und in dem Einheitskreise eine Decktransformation.*

Beweis. Dass sie einen Automorphismus induziert, folgt unmittelbar aus der Tannakaschen Formulierung[2].

Es sei

$$B = W^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} W, \qquad (W \text{ unitär und } 0 \leqq \alpha,\ \beta < 2\pi)$$

und setzen wir

$$B_t = W^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{i\beta t} \end{pmatrix} W,$$

dann bestehen die Relationen

$$B_t B_{t'} = B_{t+t'}, \qquad B_0 = E, \qquad B_1 = B$$

und B ist stetig in bezug auf t.

1) H. Poincaré, Acta Math. **5** (1884), 209-278 (Oeuvres, II, S. 402-462).

2) T. Tannaka, loc. cit.

Nun es sei $w=a$ ein beliebiger Punkt in dem Einheitskreise, so mit Hilfe einer Funktion erster Ordnung ζ, die zu K gehört, lässt sich w in Potenzreihe entwickeln

$$w=a+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\cdots.$$

Dann für genügend kleine t, liegt ζ_t in dem Konvergenzkreise. Transformation B_t sei auf w ausgeübt, so transformiert sich w auf

$$w_t=a+a_1\zeta_t+a_2\zeta_t^2+\cdots,$$

so kann man auf $t=1$ mit endlichvielem Schritte erreichen, und man bezeichne die damit gewonnene w_1 mit w^A. Für stetige t zwischen 0 und t, beschreibt w_t eine stetige Kurve, und so soll sie nur innerhalb der natürlichen Grenze verlaufen, und sonach w^A liegt in dem Einheitskreise. Deshalb ist die Abbildung $w\rightarrow w^A$ analytisch und schlicht, folglich eine Decktransformation des Einheitskreises.

Stetigkeitsbedingung. Es sei $Z(w, V)$ die Zetafuchssche Funktion, die zu einer Darstellung V gehört, und $Z\rightarrow Z^A$ sei die Funktionaltransformation $Z^A=(V_A)\cdot Z(w, V)$. Wenn $\{\lim_{i\to\infty} f_i(w)\}^A=\lim_{i\to\infty} f_i^A(w)$ für jede Funktion aus Körper $\mathfrak{K}$ aller Zetafuchsschen Funktionen gilt, so heisst A *stetig*.

Unter diesen Stetigkeitsbedingung gewinnen wir den

Hilfssatz 5. *Wenn A eine relationstreue stetige Abbildung ist, so entspricht sie eineindeutig einem Element der Fundamentalgruppe.*

Beweis. Wie man leicht sieht, $E_A=E$, so lässt A den Grundkörper k elementweise invariant. Jede Zetafuchssche Funktion lässt sich als Limes der $f_i(w)$ aus K ausdrücken.

$$Z=\lim_{i\to\infty} f_i(w),$$

so nach Stetigkeitsbedingung

$$Z^A=\left(\lim_{i\to\infty} f_i(w)\right)^A=\lim_{i\to\infty} f_i^A(w)=\lim_{i\to\infty} f_i(w^A).$$

Darum kann eine Decktransformation nicht zwei verscheidenen Transformation entsprechen. Hieraus schliesst man den

Satz. *Wenn $\mathfrak{F}$ die Fundamentalgruppe $(p>1)$ ist, so ist sie mit der Gruppe der relationstreuen stetigen Abbildungen auf Matrizensysteme der unitären Darstellungen isomorph.*

Mit Rücksicht auf die früheren Ergebnisse, wird es klar, dass zwischen der Fundamentalgruppe und der Halbgruppe der Divisorenklassen (mit Weilschen Bedingungen)[1] die Dualitätsrelation besteht.

Dabei kann man unsere Stetigkeitsbedingung als solche in bezug auf die Divisorenklassen ansehen, denn jede Weilsche Divisorenklasse den Ausdruck durch eine *unitäre* Zetafuchssche Funktion[2] besitzt.

1) A. Weil, loc. cit.
2) H. Tôyama, loc, cit, II.