114. *Zur Theorie der hyperabelschen Funktionen, II.*

Von Hiraku TÔYAMA.
Mathematisches Institut, Tokyo Kogyo Daigaku.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

Im folgenden will ich wiederum das früher von mir untersuchte Problem aufnehmen[1],—das Problem von A. Weil,[2] das lautet: Enthalten alle Darstellungsklassen der Fundamentalgruppe der geschlossenen Riemannschen Fläche die *unitären* Darstellungen oder nicht? In dieser Arbeit ist das Problem ($p > 1$) *im bejahenden Sinne* gelöst. Dazu seien zunächst einige Hilfssätze vorausgeschickt.

Hilfssatz 1. *Wenn die Eigenwerte in der Verzweigungspunkten festgesetzt sind, ist die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ aller Darstellungen zusammenhängend.*

Beweis. In $\mathfrak{M}$ seien zwei beliebige Darstellungen

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \dots A_p, B_p, C_1(=F_1D_1F_1^{-1}), C_2(=F_2D_2F_2^{-1}) \dots C_l(=F_lD_lF_l^{-1})$$

$$A'_1, B'_1, A'_2, B'_2, \dots A'_p, B'_p, C'_1(=F'_1D_1F_1'^{-1}), C'_2(=F'_2D_2\dot{F}'^{-1}) \dots C'_l(=F'_lD_eF_l'^{-1})$$

gegeben, wo $D_1, D_2 \dots D_l$ Diagonalmatrizen der vorgeschriebenen Eigenwerte sind. Nun sind in $\mathfrak{M}$ die Teilmannigfaltigkeiten mit der Bedingungen $|A_2|=0$, $|B_2|=0 \dots |A_p|=0$, $|B_p|=0$, $|F_1|=0, \dots |F_l|=0$ und $\psi(A_2, B_2 \dots A_p, B_p, F_1 \dots F_e)=0$ eingebettet, wo $\psi(A_2, \dots F_l)$ die symmetrische Funktion $\Pi(1-\lambda_i)\Pi(1-\lambda_i\lambda_k)\Pi(1-\lambda_i\lambda_k\lambda_e) \dots \Pi(1-\lambda_i\lambda_k \dots \lambda_s)$ der Eigenwerte λ_i der Matrix $A_2^{-1}B_2^{-1}A_2B_2 \dots A_pB_pC_1 \dots C_l$, deshalb eine rationale Funktion der $A_2, B_2, \dots A_p, B_p, F_1 \dots F_l$ ist. Alle diese Mannigfaltigkeiten sind höchstens $(m-2)$-dimensional[3] $\left(m=4r^2(p-1)+2r^2l\right)$, so kann man die Punkte mit stetiger Kurve verbinden, ohne jene Mannigfaltigkeiten zu schneiden. Dann kann man durch einen Kunstgriff[4] die dazu entsprechenden A_1 und B_1 stetig bestimmen. Damit können jene zwei Punkte mit stetiger Kurve verbunden werden.

Hilfssatz 2. *$\mathfrak{M}$ sei der Raum aller Darstellungsklassen, so ist er auch zusammenhängend.*

Beweis. Nach einem Satz über den Zerlegungsraum[5], ist die topologische Eigenschaft des Zerlegungsraumes $\mathfrak{N}$ eindeutig bestimmt. Wenn $\mathfrak{N}$ nicht zusammenhängend wäre, d. h. $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2$, wo beide $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ abgeschlossen sind, so würde $\mathfrak{M}$ dementsprechend in zwei abge-

---

1) H. Tôyama, Zur Theorie der hyperabelschen Funktionen, Proc. **19**, (1943), 415–419. (Im folgenden zitiert mit HA, I).

——, Über die Darstellungsklassen der Fundamentalgruppe, Proc. of the Physico-Math. Soc. of Japan, **26** (1944).

2) A. Weil, Généralisation des fonctions abéliennes, Journal de mathématiques pures et appliquées, **17** (1938), 47–87.

3) In dieser Arbeit ist unter dem Wort „Dimension" nur die topologische Dimension verstanden.

4) HA, I. S. 417.

5) Alexandroff-Hopf, Topologie, I. S. 63 und 96.

schlossene Mengen zerspalten,—was dem Hilfssatz 1 widerspricht.

Hilfssatz 3. *Die unitären Darstellungsklassen sind abgeschlossen.*

Beweis. Denn die unitäre Eigenschaft der Matrix ist gegenüber dem Limitierungsverfahren invariant.

Hilfssatz 4. *In $\mathfrak{N}$ bilden die irreduziblen Darstellungsklassen $\mathfrak{N}_{ui}$ die N-dimensionale offene Menge.*

Beweis. Für die Bestimmung der Dimensionszahl[1] genügt es, das Verhalten des Schnittes von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{U}$ (die Menge aller unitären Matrizen r-ten Grades) in Umgebung des $D=\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & d_r \end{pmatrix}$ zu studieren, wo

$$L=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}, \qquad LD=\begin{pmatrix} d_{i_1} & & 0 \\ & d_{i_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & d_{i_r} \end{pmatrix}.$$

Die definierenden Gleichungen für $\mathfrak{U}$ sind

$$\bar{A}_1'A_1=E\,, \quad \bar{A}'A=E\,, \quad \text{wo} \quad A_1=DA$$

und für $\mathfrak{M}$ sind

$$|LDA-x|-|DA-x| \equiv f_1x^{r-1}+f_2x^{r-2}+\cdots+f_{r-1}x \equiv 0$$

für beliebige x, d. h.

$$f_1=f_2=f_3=\cdots=f_{r-1}=0\,.$$

Zerspaltung nach reellen und imaginären Teilen gibt die $2(r-1)$ Gleichungen, aber die wesentlich verschiedenen unter ihnen sind $r-1$, denn, wenn A unitär ist, so

$$\begin{aligned} |DA|(\bar{f}_1x^{r-1}+\bar{f}_2x^{r-2}+\cdots+\bar{f}_{r-1}x) &= (|DA|\,|\bar{D}\bar{A}-x|-|\bar{L}\bar{D}\bar{A}-x|) \\ &= |E-DAx|-|E-LDAx| = x^r\left(\left|\frac{1}{x}-DA\right|-\left|\frac{1}{x}-LDA\right|\right) \\ &= (-1)^r(f_{r-1}x^{r-1}+f_{r-2}x^{r-2}+\cdots+f_1x) \end{aligned}$$

d. h.
$$|AD|\bar{f}_k=(-1)^rf_{r-k}\,.$$

Daher sind dic wesentlich unabhängigen nur $r-1$. Also sind die definierenden Gleichungen insgesamt r^2+r-1.

Nun wollen wir die linear unabhängigen Differentiale in Umgebung des D bestimmen. Setzen wir

$$A=E+dA$$

so muss $dA=idH$, wo dH eine Hermitesche Matrix bezeichnet. Für $\mathfrak{M}$ erhält man aus $r-1$ Gleichungen unter Vernachlässigung der Glieder höheren Grades,

1) Der in HA, I davon gegebene Beweis ist nicht streng, welcher hier vervollständigt werden soll. Die hier benutzten Bedingungen sind dieselbe wie in HA, I.

$$\big(x-d_1(1+dA_{11})\big)\big(x-d_2(1+dA_{22})\big)\cdots=\big(x-\lambda_1 d_1(1+dA_{11})\big)\cdots$$

welche nur die Elemente in Hauptdiagonale enthalten, und deren Lösungen eindeutig bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt werden

$$dA_{11}=dA_{22}=dA_{33}=\cdots=dA_{nn}\,,$$

und dabei dA_{ii} mussen sämtlich rein imaginär sein. Hiermit ist es klar, dass die linear unabhängigen unter den $2r^2$ Differentialen genau r^2-r+1 sind. Somit ist der Rang der Funktionalmatrix der r^2+r-1 definierenden Gleichungen genau

$$2r^2-(r^2-r+1)=r^2+r-1\,,$$

so ist die Dimensionszahl von Schnitte $\mathfrak{M}\mathfrak{U}$ r^2-r+1. Für solche A_1 lässt sich r-dimensionale B_1 bestimmen, daher ist die gesamte Dimensionszahl r^2+1. So ist die Dimensionszahl der ganzen unitären Darstellungen

$$r^2(2p-1)+1+2\sum_{\mu}\sum_{\alpha<\beta}N_{\mu\alpha}N_{\mu\beta}\,,$$

da der reelle Teil einer algebraischen Mannigfaltigkeit wieder eine Mannigfaltigkeit ist[1].

Wenn eine Darstellung $U(s)$ irreduzibel ist, und ausserdem nicht-exzeptionell[2], so ist ihre Umbgbung durch Cayleysche Transformationen

$$A_l-\frac{1-iH_l}{1+iH_l}\,,\qquad B_l=\frac{1-iH_l'}{1+iH_l'}\qquad C_k=\frac{1-iH_k''}{1+iH_k''}$$

auf dem Euklidischen Raum von $r^2(2p-1)+1+2\sum_{\mu}\sum_{\alpha<\beta}N_{\mu\alpha}N_{\mu\beta}$ Dimensionen abgebildet, und nach dem Schurschen Lemma, die Darstellungsklasse der $U(s)$ ist genau (r^2-1)-dimensional[3], so ist die Menge der Darstellungsklassen in diesen Umgebung genau N-dimensional. Wenn sie exzeptionell ist, dann kann man die Umgebung der $U(s)$ durch Transformation $U(s)\to\lambda U(s)$, $|\lambda|=1$ unter geeigneter Wahl von λ auf denen der nicht-exzeptionellen $\lambda U(s)$ topologisch abbilden, und dabei ist die Äquivalenzrelation gegenüber dieser Transformation invariant. Hiermit ist die topologische Struktur der $\mathfrak{R}$ in der Umgebung der $U(s)$ gleichwertig mit denen der $\lambda U(s)$, also ist der Hilfssatz ausnahmelos bewiesen.

Hilfssatz 5. *In $\mathfrak{R}$ bilden die reduziblen Darstellungsklassen $\mathfrak{R}_{ur}$ die Menge von höchstens $N-2$ Dimensionen.*

Beweis. Sei eine Darstellungsklasse reduzibel, so enthält sie die Darstellung

$$\begin{pmatrix}U'(s) & 0\\ 0 & U''(s)\end{pmatrix}$$

---

1) S. Lefschetz, Topology, 1930, S. 363.
2) H. Weyl, Classical groups, (1939), S. 56.
3) HA, I. S. 419.

wegen der vollständigen Reduzibilität der unitären Matrizensysteme[1] wo $U'(s)$ bzw. $U''(s)$ r'-, bzw. r''-dimensional und die Anzahl der Eigenwerte $e^{i\frac{2\pi a}{n}}$ im μ-te Verzweigungspunkt $N'_{\mu a}$ bzw. $N''_{\mu a}$ sind. Nach Hilfssatz 4 sind die Dimensionen N' und N'' der $U'(s)$ und $U''(s)$

$$N' = 2r'^2(p-1)+2+2\sum_{\mu}\sum_{\alpha<\beta} N'_{\mu\alpha}N'_{\mu\beta},$$

$$N'' = 2r''^2(p-1)+2+2\sum_{\mu}\sum_{\alpha<\beta} N''_{\mu\alpha}N''_{\mu\beta}$$

Die Differenz ist

$$N-(N'+N'') = 4r'r''(p-1)-2+2\sum_{\mu}\sum_{\alpha\neq\beta} N'_{\mu\alpha}N''_{\mu\beta} \geqq 2$$

Die gesamte Dimensionszahl ist daher höchstens $N-2$.

Satz. *Wenn das Geschlecht $p>1$ dann enthält jede Darstellungsklasse der Fundamentalgruppe der geschlossenen Riemannschen Fläche immer unitäre Darstellungen.*

Beweis. $r=1$ ist der klassische Fall[2]. Der Fall $r>1$ ist unsere Aufgabe. Wie A. Weil gezeigt hat, $\mathfrak{R}$ ist eine N-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wenn es eine Darstellungsklasse gibt, welche keine unitäre Darstellung enthält, so kann man $\mathfrak{R}$ in zwei disjunkte Teile zerlegen

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_u + (\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_u)$$

$\mathfrak{R}_u$ ist abgeschlossen nach Hilfssatz 3, so muss $\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_n$ offen sein, daher ist sie N-dimensional. Nach Hilfassatz 4 ist die Begrenzung der $\mathfrak{R}_u$ in $\mathfrak{R}_{ur}$ enthalten, aber sie ist nach Hilfssatz 5 höchstens $(N-2)$-dimensional. Dies widerspricht der Eigenschaft der Begrenzung[3]. Also muss $\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_u$ leer sein, und so ist $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_u$. Damit ist der obige Satz vollständig bewiesen.

---

1) van der Waerden, Moderne Algebra, II. 2-te Auflage (1940), S. 135.
2) H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, 1923, S. 130.
3) K. Menger, Dimensionstheorie, 1928, S. 268.