PAPERS COMMUNICATED

140. Les anneaux des opérateurs et les dimensions, II[1].

Par Motokiti KONDÔ.

L'institut mathématique, l'université impériale de Kyusyu.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Dec. 12, 1944.)

Le but de cette note est discuter la structure du module des dimensions d'un anneau des opérateurs et introduire la notion des dimensions sur les idéaux de celui-ci.

12. Pour cela, nous considérons d'abord la somme directe (L_1) des espaces linéaires et celle des opérateurs.

Pour un ensemble Λ infini, nous introduissons une mesure $m(\Gamma)$ complètement additive sur les sous-ensembles de Λ telle qu'on ait $m\big((\lambda)\big)=1$ pour tout élément λ de Λ et puis étant donné un espace linéaire $\mathfrak{B}$ normé et complet, nous prenons une somme directe (L_1)[2] $\mathfrak{S}=\sum_{L_1}\oplus\mathfrak{B}_\lambda$ des espaces $\mathfrak{B}_\lambda(\lambda\in\Lambda)$, où $\mathfrak{B}_\lambda=\mathfrak{B}$ $(\lambda\in\Lambda)$.

Pour deux éléments μ et ν de Λ, nous désignons par $P_{\mu\nu}$ un opérateur linéaire et borné sur $\mathfrak{S}$ tel qu'on ait

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(f\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0)&=0 && \text{pour}\quad \rho\neq\mu\,,\\ &=f\oplus\sum_{\lambda\neq\nu}\oplus 0 && \text{pour}\quad \rho=\mu\,,\end{aligned}$$

et par $\mathscr{B}$ l'anneau des opérateurs déterminé par $P_{\mu\nu}(\mu,\nu\in\Lambda)$ et l'opérateur identique I.

(12.1) Le commutateur borné $\mathscr{B}'$ consiste des sommes directes $(L_1)\sum_{L_1}\oplus A_\lambda$ des opérateurs $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$, où $A_\lambda=A_\mu$ l'un l'autre pour λ et μ de Λ.

En effet, pour un opérateur A de $\mathscr{B}'$ et un élément $f\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0$[3] de $\mathfrak{S}$, il existe un élément g de $\mathfrak{B}_\rho$ tel qu'on ait $A(f\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0)=g\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0$ et

$$\begin{aligned} A(f\oplus\sum_{\lambda\neq\sigma}\oplus 0)&=AP_{\rho\sigma}(f\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0)=P_{\rho\sigma}A(f\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0)\\ &=P_{\rho\sigma}(g\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0)=g\oplus\sum_{\lambda\neq\sigma}\oplus 0\,,\end{aligned}$$

d'où A peut être écrit sous la forme $\sum\oplus A_\lambda$ et $A_\lambda=A_\mu$ l'un l'autre pour λ et μ de Λ. Inversement, tout opérateur de la telle forme appartient à $\mathscr{B}'$ et donc $\mathscr{B}'$ consiste de tels opérateurs.

C. Q. F. D.

---

1) Cette note est le continu de ma note du même titre que celle, parue dans ce journal et dont le numero est manqué. De plus, nous la citons dans la suite comme la partie I de cette note.

2) M. Kondô, Sur les sommes directes des espaces linéaires, parue dans ce journal.

3) Pour la simplicité, nous écrivons dans la suite $\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus f_\lambda$ au lieu de $\sum_{L_1}\oplus f_\lambda$.

(12.2) $\mathscr{B}''=\mathscr{B}$.

En effet, étant donné un opérateur A de $\mathscr{B}''$ et un élément $f\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0$ de $\mathfrak{S}$, quand nous désignons par P une projection telle qu'on ait $Pg=\varphi(g)f$ et qu'on ait $Pf=f$, nous avons d'après la définition

$$A(f\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0)=AQ(f\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0)=QA(f\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0)\,,$$

où $Q=\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus P_\lambda$ et $P_\lambda=P$ $(\lambda\in\Lambda)$, et donc $A(f\oplus\sum_{\lambda\neq\rho}\oplus 0)$ peut être écrit sous la forme $\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus a_\lambda f_\lambda$, où $f_\lambda=f$ $(\lambda\in\Lambda)$. Par suite, nous pouvons voir sans peine que A est une limite des combinaisons linéaires de $P_{\rho\sigma}(\rho,\sigma\in\Lambda)$ et I, d'où A appartient à $\mathscr{B}$. C. Q. F. D.

13. Pour un opérateur A linéaire et borné sur $\mathfrak{B}$, nous désignons par $A^{(\mu)}$ un opérateur linéaire et borné sur $\mathfrak{S}$ tel qu'on air $A^{(\mu)}(\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus f_\lambda)=Af_\mu\oplus\sum_{\lambda\neq\mu}\oplus 0$. Encore, pour un anneau $\mathscr{M}$ des opérateurs sur $\mathfrak{B}$, nous désignons par $\mathscr{M}^{(\mu)}$ l'ensemble de tous les opérateurs $A^{(\mu)}$ tels qu'on ait $A\in\mathscr{M}$.

(13.1) $\mathscr{M}^{(\mu)}$ est un anneau des opérateurs sur $\mathfrak{S}$ et isomorphique isométriquement à $\mathscr{M}$.

(13.2) Étant donné un sous-ensemble $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{B}$, quand nous désignons par $\mathfrak{M}^{(\mu)}$ l'ensemble de tous les sommes $f\oplus\sum_{\lambda\neq\mu}\oplus 0$, où $f\in\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}\in\mathbb{L}(\mathscr{M})$[4] entraine $\mathfrak{M}^{(\mu)}\in\mathbb{L}(\mathscr{M}^{(\mu)})$ et inversement. De plus, pour les éléments $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de $\mathbb{L}(\mathscr{M})$, les relations $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}\leqq\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}\cong\mathfrak{N}$ entrainent respectivement $\mathfrak{M}^{(\mu)}\subseteq\mathfrak{N}^{(\mu)}$, $\mathfrak{M}^{(\mu)}\leqq\mathfrak{N}^{(\mu)}$ et $\mathfrak{M}^{(\mu)}\cong\mathfrak{N}^{(\mu)}$, et inversement. D'où, nous désignons par $d(\mathfrak{M})$ la dimension de $\mathfrak{M}^{(\mu)}$.

14. Étant donné un anneau $\mathscr{M}$ des opérateurs sur $\mathfrak{B}$, nous construirons l'anneau $\mathscr{S}=\mathscr{B}\cup\underset{\lambda\in\Lambda}{U}\mathscr{M}^{(\lambda)}$ des opérateurs, c'est-à-dire, le plus petit anneau qui contient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{M}^{(\lambda)}(\lambda\in\Lambda)$.

(14.1) Le commutateur borné $\mathscr{S}'$ consiste des sommes directes $(L_1)\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus A^{(\lambda)}$ telles qu'on ait $A\in\mathscr{M}$ et donc $\mathfrak{M}\in\mathbb{L}(\mu)$ entraine $\mathfrak{M}^{(\lambda)}\in\mathbb{L}(\mathscr{S})$ et inversement.

(14.2) Pour les éléments δ_k $(k=1,2,\dots,n)$ de $\mathbb{D}(\mathscr{M})$, il existe toujours la somme $\sum_{k=1}^{n}\delta_k$ dans $\mathbb{D}(\mathscr{S})$ et donc l'ensemble $\sum$ de tous les sommes algébriques des dimensions de $\mathbb{D}(\mathscr{M})$ est contenu dans $\mathbb{D}(\mathscr{S})$.

(14.3) Pour une somme algébrique s des dimensions de $\sum$, un idéal principal (s) de $\sum$ contient seulement la dimension s dans $\mathbb{D}(s)$.

15. Or, en se servant $\mathbb{D}(s)$, nous pouvons donner l'interprétation géométrique clair à $\Delta(\mathscr{M})$.

---

4) M. Kondô, loc. cit., I.

(15.1) Pour que les deux dimensions d_1 et d_2 de $\mathbb{D}(\mathcal{M})$ sont égales l'une l'autre, il faut et il suffit qu'elles appartiennent au même idéal principal de $\sum$.

Démonstration. Comme il est évident que la condition donnée est necéssaire, nous démontrons dans la suité qu'elle est aussi auffisante.

Quand les deux dimensions d_1 et d_2 de $\mathbb{D}(\mathcal{M})$ appartiennent au même idéal principal (s) de $\sum$, nous pouvons choisir une suite $\{s_k\}$ $(k=1, 2, \dots, n)$ des somme algébriques des dimensions dans (s) de manière que

1) $s_1=d_1$ et $s_n=d_2$,

2) s_{k+1} est obtenue de s_k en effectuant une opération de celles i), ii) et iii) de ma note, loc. cit., I, c'est-à-dire,

i) étant donnée une somme algébrique $s=\sum_{k=1}^{m} d_k$, on défini une somme $s'=\sum_{k=1}^{m} d'_k$ telle qu'on ait $d_k \geqq d'_k$ $(k=1, 2, \dots, m)$,

ii) étant donnee une somme algébrique $s=\sum_{k=1}^{m} d_k$, s'il existe $d=d_{m-1}+d_m$, on défini une somme $s'=\sum_{k=1}^{m-2} d_k+d$,

iii) étant donnée une somme algébrique $s=\sum_{k=1}^{m} d_k$, si l'on a $d_m=d'+d''$, on défini une somme $s'=\sum_{k=1}^{m-1} d_k+d'+d''$,

et de plus il existe les éléments $\mathfrak{M}_{kj}$ $(j=1, 2, \dots, m_k;\ k=1, 2, \dots, n)$ de $\mathbb{L}(\mathcal{S})$ tels qu'on ait

3) $s_k=\sum_{j=1}^{m_k} d_{kj}$ et $d_{kj}=d(\mathfrak{M}_{kj})$ $(j=1, 2, \dots, m_k;\ k=1, 2, \dots, n)$,

4) les éléments $\mathfrak{M}_{kj}$ sont contenus dans les ensembles $\mathfrak{B}_{\lambda kj}$ respectivement et $\mathfrak{B}_{\lambda kj}$ sont distinct l'un l'autre.

Nous avons alors $d(\sum_{j=1}^{m_k} \mathfrak{M}_{kj})=s_k$ $(k=1, 2, \dots, n)$ et $s_k \geqq s_{k+1}$ $(k=1, 2, \dots, n-1)$ dans $\mathbb{D}(\mathcal{S})$. Or, il existe les opérateurs A_k $(k=1, 2, \dots, n)$ de $\mathcal{S}$ tels qu'on ait

a) $A_k(\mathfrak{M}_{11}) \geqq \sum_{j=1}^{m_k} \mathfrak{M}_{kj}$ $(k=1, 2, \dots, n)$,

b) A_k $(k=1, 2, \dots, n)$ peuvent être écrit comme les sommes des produits $P_{\mu_0\mu_1}B_1^{(\mu_1)}P_{\mu_1\mu_2}B_2^{(\mu_2)} \dots B_l^{(\mu_l)}P_{\mu_{l-1}\mu_l}$, où $B_i \in \mathcal{M}$ $(i=1, 2, \dots, l)$.

En effet, nous posons d'abord $A_1=I$. Puis, nous supposons que A_k $(k=1, 2, \dots, j)$ sont déjà définis et qu'ils remplissent les conditions a) et b), et nous envisageons la somme s_{j+1}. Si elle est obtenue de s_j en effectuant l'opération i), nous pouvons supposer sans perdre la généralité que $m_{j+1}=m_j$ et $d_{j,i} \geqq d_{j+1,i}$ $(i=1, 2, \dots, m_j)$, et alors il existe dans $\mathcal{M}$ les opérateurs B_i $(i=1, 2, \dots, m_j)$ tels qu'on ait $B_i^{(\lambda j+1,i)} P_{\lambda ji\lambda j+1,i}(\mathfrak{M}_{ji}) \geqq \mathfrak{M}_{j+1,i}$. Or, quand nous posons

$$(*) \qquad A_{j+1}=\{\sum_{i=1}^{m_{j+1}} B_i^{(\lambda j+1,i)} P_{\lambda ji\lambda j+1,i}\} A_j$$

il remplit les conditions a) et b). En effet, nous avons d'après la définition

$$A_{j+1}(\mathfrak{M}_{11})=\{\sum_{i=1}^{m_j} B_i^{(\lambda j+1,i)}P_{\lambda ji\lambda j+1,i}\}A_j(\mathfrak{M}_{11})$$

$$=\{\sum_{i=1}^{m_j} B_i^{(\lambda j+1,i)}P_{\lambda ji,\lambda j+1,i}\}\sum_{i=1}^{m_j}\oplus\mathfrak{M}_{ji}=\sum_{i=1}^{m_j}\oplus B_i^{(\lambda j+1,i)}P_{\lambda ji,\lambda j+1,i}(\mathfrak{M}_{11})$$

$$=\sum_{i=1}^{m_j}\oplus\mathfrak{M}_{j+1,i}\,,$$

d'où il remplit la condition a) et puis d'après les définitions de A_j et A_{j+1}, il remplit aussi la condition b).

Puis, si s_{j+1} est obtenue de s_j en effectuant l'opération ii), nous pouvons supposer sans perdre la généralité que $m_{j+1}=m_j-1$, $d_{ji}=d_{j+1,i}$ $(i=1,2,\ldots,m_j-2)$ et $d_{jm_{j-1}}+d_{jm_j}=d_{j+1m_{j+1}}$, et donc il existe dans $\mathcal{M}$ les opérateurs B_i $(i=1,2,\ldots,m_j-1)$ tels qu'on ait $B_i^{(\lambda j+1,i)}P_{\lambda ji\lambda j+1,i}(\mathfrak{M}_{ji})\geqq\mathfrak{M}_{j+1,i}$ $(i=1,2,\ldots,m_j-2)$ et $B_{mj-1}^{(\lambda j+1,mj-1)}P_{\lambda jmj-1,\lambda j+1mj-1}(\mathfrak{M}_{jm_{j-1}}\oplus\mathfrak{M}_{jm_j})\geqq\mathfrak{M}_{j+1,m_{j+1}}$. D'où, quand nous définissons A_{i+1} par l'égalité (*), il remplit les conditions a) et b) de même que le cas précédent.

Enfin, si s_{j+1} est obtenue de s_j en effectuant l'opération iii), nous pouvons supposer sans perdre la généralité que $m_{j+1}=m_j+1$, $d_{ji}=d_{j+1,i}$ $(i=1,2,\ldots,m_j-1)$ et $d_{jm_j}=d_{j+1,m_j}+d_{j+1,m_{j+1}}$. Il existe alors dans $\mathcal{M}$ les opérateurs B_i $(i=1,2,\ldots,m_j+1)$ tels qu'on ait $B_i^{(\lambda j+1,i)}P_{\lambda ji\lambda j+1,i}(\mathfrak{M}_{ji})\geqq\mathfrak{M}_{j+1,i}$ $(i=1,2,\ldots,m_j-1)$ et $B_{mj}^{(\lambda j+1mj)}P_{\lambda jmj\lambda j+1m_j}(\mathfrak{M}_{jm_j})\geqq\mathfrak{M}_{j+1,m_j}\oplus\mathfrak{M}_{j+1,m_{j+1}}$, et donc quand nous définissons A_{j+1} par l'égalité (*), il remplit les conditions a) et b) de même que le cas précédent.

Or, puisque toute produit $P_{\mu_0\mu_1}B_1^{(\mu_1)}P_{\mu_1\mu_2}B_2^{(\mu_2)}\ldots B_l^{(\mu_l)}P_{\mu_{l-1}\mu_l}$ peut être écrit sous la forme $P_{\mu_0\mu_l}B^{(\mu_l)}$, où $B\in\mathcal{M}$, il existe un opérateur A de $\mathcal{M}$ tel qu'on ait $A_n=P_{\lambda_{11}\lambda_{n_1}}A$ et donc d'après (*) $P_{\lambda_{11}\lambda_{n_1}}A^{(\lambda_{11})}(\mathfrak{M}_{11})\geqq\mathfrak{M}_{n1}$, ce qui entraine $d_1\geqq d_2$. Nous avons de même $d_2\geqq d_1$ et par suite $d_1=d_2$, c'est-à-dire, la condition donnée est suffisante. C. Q. F. D.

D'où, quand nous faisons correspondre chaque dimension d de $\mathbb{D}(\mathcal{M})$ à l'idéal principal (d) de $\sum$, nous avons un isomorphisme entre $\mathbb{D}(\mathcal{M})$ et $\Delta_0(\mathcal{M})$[4], et donc nous pouvons considérer l'idéal principal (d) comme la dimension d. De plus, (d) contient seulement d comme un sous-ensemble de $\mathbb{D}(\mathcal{S})$, et donc nous pouvons considérer encore l'idéal principal (d) appartenu à $\sum$ comme la dimension d. Or, nous avons pour tout idéal principal (s) de

$$(s)=(d_1)+(d_2)+\cdots+(d_n)\,,$$

ou $s=\sum_{k=1}^{n}d_k$, et par suite tout élément de $\Delta(\mathcal{M})$ désignent la somme des dimensions de $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ dans $\mathbb{D}(\mathcal{S})$, c'est-à-dire, il existe dans $\mathbb{L}(\mathcal{S})$ un élément dont la dimension est un idéal principal donné de $\sum$. C'est l'interprétation géométrique de $\Delta(\mathcal{M})$ et nous savons que le module des dimensions est donné naturelment.

16. Puis, nous considérons les dimensions des idéaux d'un anneau des opérateurs sur $\mathfrak{B}$. Pour cela, nous prenons d'abord les représentation régulière des anneaux des opérateurs.

Étant donné un opérateur A d'un anneau $\mathcal{M}$ des opérateurs sur $\mathfrak{B}$, nous désignons par T_A un opérateur sur $\mathcal{M}$ tel qu'on ait $T_A(X)=AX$ pour tout élément X de $\mathcal{M}$. Alors, il est linéaire et borné sur $\mathcal{M}$ et de plus $|A|=|T_A|$, et l'anneau $\mathcal{M}_T$ qui consiste de ces opérateurs est la représentation régulierè de $\mathcal{M}$.

(16.1) $\mathcal{M}_T$ est un anneau des opérateurs sur $\mathcal{M}$ et isomorphique isométriquement à $\mathcal{M}$.

(16.2) Le commutateur borné $\mathcal{M}'_T$ consiste de tous les opérateurs $S_A(X)=XA$ sur $\mathcal{M}$, où $A \in \mathcal{M}$, et donc il est anti-isomorphique isométriquement à $\mathcal{M}$.

(16.3) $\mathcal{M}''_T=\mathcal{M}_T$ et la partie commune $\mathcal{M}_T \frown \mathcal{M}'_T$ est le centre de $\mathcal{M}_T$ et $\mathcal{M}'_T$.

(16.4) $\mathbb{L}(\mathcal{M}_T)$ et $\mathbb{L}(\mathcal{M}'_T)$ consistent de tous les idéaux droits et ceux gauches de $\mathcal{M}$ respectivement. Donc, l'ensemble des idéaux de deux côtés de $\mathcal{M}$ est la partie comme de $\mathbb{L}(\mathcal{M}_T)$ et $\mathbb{L}(\mathcal{M}'_T)$.

(16.5) Pour que les deux idéaux droits $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ de $\mathcal{M}$ sont équivalents l'un l'autre par rapport à $\mathcal{M}$, il faut et il suffit qu'il existe les deux éléments A_1 et A_2 de $\mathcal{M}$ ayant les propriétés: $A_1\mathfrak{a}_1 \geqq \mathfrak{a}_2$ et $A_2\mathfrak{a}_2 \geqq \mathfrak{a}_1$, et de même pour les idéaux gauches.

D'où, nous pouvons introduire la notion des dimensions sur les idéaux droits et ceux gauches comme nous avons fait dans la partie I de ma note, loc. cit.