2. *Die Geschwindigkeitspotentiale und die Kutta-Joukowskischen Bedingungen für die Strömungen in vielfach zusammenhängenden Gebieten.* I.*

Von Yûsaku KOMATU.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Jan. 12, 1945.)

1. *Die Problemstellung.*

Wir betrachten eine zweidimensionale Potentialströmung um die $n+1$ vorgegebenen voneinander getrennten Zylinderprofile. Funktionentheoretisch besagt, sei ein $(n+1)$-fach zusammenhängendes Gebiet Δ in einer komplexen Z-Ebene als das Potentialströmungsfeld gegeben. Wir nehmen nun an, daß das Gebiet Δ den unendlichfernen Punkt als inneren Punkt enthält und jede Randkomponente Γ_ν $(\nu=0, 1, \dots, n)$ von Δ aus einem Kontinuum besteht. Es sei v_∞ die (konjugiert) komplexe Geschwindigkeit im Unendlichen, c_ν der (konstante) Wert der Stromfunktion auf der Stromlinie längs Γ_ν und ferner $\varkappa_\nu$ die Zirkulationskonstante um Γ_ν. Das daran anschließend die Hauptrolle spielende komplexe *Geschwindigkeitspotential* $\Phi(Z)$ besitzt dann die folgenden Eigenschaften :

1.° Sein imaginärer Teil bleibt auf jeder Randkomponente konstant und zwar gilt auf Γ_ν

$$\mathfrak{J}\Phi(Z)=c_\nu\,.$$

2.° Es gilt

$$\int_{\Gamma_\nu} d\Phi(Z)=\varkappa_\nu\,,$$

wobei das Integral über Γ_ν im negativen Sinne bezüglich des Strömunggebiets zu nehmen ist; mit anderen Worten ist der Periodizitätsmodul der Funktion $\Phi(Z)$ um jede Randkomponente Γ_ν sämtlich reell und übrigens gleich $\varkappa_\nu$. Nebenbei bemerkt sieht man offenbar ein, daß der Wert solches Integrals immer dann reell ist, wenn die Eigenschaft 1° aufrechterhalten bleibt.

3.° Abgesehen von nur einem einzigen Punkte $Z=\infty$, ist die Funktion $\Phi(Z)$ analytisch im Gebiet Δ, aber im allgemeinen mehrdeutig. An der Ausnahmestelle $Z=\infty$ besitzt sie im allgemeinen einen logarithmischen Verzweigungspunkt; in ihrer Umgebung verhält sich aber jeder Zweig der Funktion

$$\Phi(Z)-v_\infty Z-\frac{\varkappa}{2\pi i}\lg Z$$

regulär eindeutig, und übrigens im ganzen Gebiet Δ bleibt die (reelle) Funktion

---

* Diese Forschung wurde auf Kosten der Ausgaben des Unterrichtsministeriums für wissenschaftliche Forschung ausgeführt.

$$\Im\big(\Phi(Z)-v_\infty Z\big)+\frac{\varkappa}{2\pi}\lg^+|Z|$$

beschränkt für sämtliche Zweige, worin und im folgenden der Kürze halber

$$\varkappa=\sum_{\nu=0}^{n}\varkappa_\nu$$

gesetzt ist. Die (konjugiert) komplexe Geschwindigkeit $\Phi'(Z)$ ist regulär analytisch und eindeutig überall in Δ.

Für das Potential ist eine additive Konstante allerdings fast unbedeutend und kann man also etwa verlangen, daß $c_0=0$ ist, indem man nötigenfalls die Funktion $\Phi(Z)-ic_0$ aufs neue wieder mit $\Phi(Z)$ bezeichnet. Sind nun ein komplexer Wert v_∞ und $n+1$ reelle Werte $\varkappa_\nu$ $(\nu=0, 1, \dots, n)$ beliebig vorgelegt, so wird diejenige in dem an $Z=\infty$ punktierten $(n+2)$-fach zusammenhängenden Strömungsgebiet *analytische Funktion $\Phi(Z)$, falls existiert, abgesehen von einer reellen additiven Konstante eindeutig bestimmt,* welche auf jeder Randkomponente Γ_ν einen konstanten imaginären Teil hat, die vorgegebene Zirkulationskonstante $\varkappa_\nu$ um jede Γ_ν besitzt und weiter den in 3° angegebenen Singularitätscharakter aufweist.

In der Tat sei $\Phi^*(Z)$ auch eine beliebige Funktion, die sich mit denselben betreffenden Eigenschaften wie $\Phi(Z)$ versieht. Die Differenz $\Phi^*(Z)-\Phi(Z)$ stellt dann eine im ganzen Gebiet Δ regulär analytische und sogar eindeutige Funktion dar und ihre Randwerte auf jeder Γ_ν besitzen einen konstanten Imaginärteil. Da ihr Imaginärteil allerdings in Δ überall beschränkt bleiben soll, so muß sie identisch eine Konstante sein. Wegen der Annahme $c_0=0$ ist sie übrigens reell.

Unter diesen Vorbemerkungen schreiben wir nötigenfalls im folgenden mit Beiordnung der zugehörigen, nicht notwendig voneinander unabhängigen, Parameter c_ν $(\nu=1, \dots, n)$ und $\varkappa_\nu$ $(\nu=0, 1, \dots, n)$

$$\Phi(Z)\equiv\Phi(Z;\, c_1, \dots, c_n, \varkappa_0, \dots, \varkappa_n)\,.$$

Wir bilden nun das in der Z-Ebene liegende Grundgebiet Δ durch eine Funktion

$$Z=Z(z)$$

konform auf ein in der z-Ebene gelegenes Gebiet D ab; dabei können und sollen die den Komponenten Γ_ν entsprechenden Randkomponenten C_ν von D alle als regulär analytische und einfach geschlossene Kurven vorausgesetzt werden. Bei dieser Abbildung gehe der Punkt $Z=\infty$ in einen inneren Punkt $z=z_\infty$ von D über, d. h. es gelte

$$Z(z_\infty)=\infty\,,$$

und, je nachdem $z_\infty\neq\infty$ oder $z_\infty=\infty$ ist, sei

$$\lim_{z\to z_\infty}(z-z_\infty)Z(z)=A \quad \text{bzw.} \quad Z'(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{Z(z)}{z}=A\,.$$

Die durch diese Transformation aus $\Phi(Z)$ entstehende Funktion von z

$$\Phi\big(Z(z)\big)=F(z)\equiv F(z\,;\,z_\infty,c_1,\cdots,c_n,\varkappa_0,\cdots,\varkappa_n)$$

besitzt natürlich die ganz entsprechenden Eigenschaften für das Bildgebiet D wie die oben betreffs $\Phi(Z)$ in $\varDelta$ angegebenen:

1.° Auf jeder Randkomponente C_ν gilt $\mathfrak{J}F(z)=c_\nu$.

2.° Das über die Randkurve C_ν im negativen Sinne bezüglich D erstreckte Integral beträgt

$$\int_{C_\nu} dF(z)=\varkappa_\nu\,.$$

3.° $F(z)$ ist analytisch in D bis auf evtl. nur den Punkt z_∞, und in einer Umgebung von dieser Ausnahmestelle verhält sich jeder Zweig von

$$F(z)-\frac{v_\infty A}{z-z_\infty}-\frac{\varkappa}{2\pi i}\lg\frac{1}{z-z_\infty}\qquad (z_\infty\neq\infty)$$

bzw.

$$F(z)-v_\infty Az-\frac{\varkappa}{2\pi i}\lg z\qquad (z_\infty=\infty)$$

regulär analytisch und sogar eindeutig. Ferner bleibt die Funktion

$$\mathfrak{J}\Big(F(z)-\frac{v_\infty A}{z-z_\infty}\Big)+\frac{\varkappa}{2\pi}\lg^+\frac{1}{|z-z_\infty|}\qquad (z_\infty\neq\infty)$$

bzw.

$$\mathfrak{J}\big(F(z)-v_\infty Az\big)+\frac{\varkappa}{2\pi}\lg^+|z|\qquad (z_\infty=\infty)$$

beschränkt im ganzen Gebiet D für sämtliche analytisch fortgesetzte Zweige. Ferner ist die Ableitung $F'(z)$ analytisch und eindeutig überall in D.

Die hier ausgeführte Neuwahl eines regulär berandeten Bildgebiets besteht darin, daß wir dadurch die eventuell existierenden Singularitäten auf den Randkomponenten des ursprünglichen Gebiets $\varDelta$ vermeiden und sogar unter Umständen als das neu gewonnene Gebiet D ein geeignetes Gebiet normaler Gestalt auswählen können.

Man könnte die Existenz des Potentials $\Phi(Z)$ oder $F(z)$ physikalisch für ersichtlich ansehend erwarten, aber von vornherein scheint es nicht ganz augenscheinlich zu sein, ob es tatsächlich so ist. In der vorliegenden Note soll es sich sicherheitshalber um die Existenz und zugleich eine Konstruktionsweise des betreffenden Geschwindigkeitspotentials handeln, und nachdem die Kutta-Joukowskischen Bedingungen in einer verständlichen Form aufgestellt werden. In den später erwähnten zweifach bzw. einfach zusammenhängenden Fällen lassen sich sogar insbesondere die vollen Überlegungen ganz explizite durchführen.

2. *Verallgemeinerte Greensche Funktion.*

Wir führen nun eine dem Gebiet zugehörige Funktion ein. Eine im vorgegebenen Gebiet D auf der z-Ebene definierte reelle Funktion

$$g(z)\equiv g(z\,;\,z_\infty,a_0,\cdots,a_n)$$

erfülle drei folgende Bedingungen:

1.° $g(z)$ selbst ist in D, von einem innerhalb D liegenden einzigen Punkte z_∞ abgesehen, eindeutig und regulär harmonisch;

2.° Sie wird in der Ausnahmestelle z_∞ logarithmisch unendlich, d. h. je nachdem $z_\infty \neq \infty$ oder $z_\infty = \infty$ ist, verhält sich die Differenz

$$g(z) - \lg \frac{1}{|z - z_\infty|} \qquad \text{bzw.} \qquad g(z) - \lg |z|$$

in einer Umgebung von z_∞ regulär harmonisch;

3.° Auf jeder Randkomponente C_ν von D hat $g(z)$ einen konstanten Randwert a_ν.

Die Funktion $g(z)$, welche diesen Bedingungen genügt, wollen wir als *verallgemeinerte Greensche Funktion* des Gebiets D mit dem Pol (oder Quellpunkt) z_∞ bezeichnen.

Ihre Existenz und eindeutige Bestimmtheit läßt sich leicht übersehen. Sei nämlich etwa $z_\infty \neq \infty$, dann stellt die Lösung des Dirichletschen Problems für D mit den Randwerten $a_\nu + \lg|z - z_\infty| - \lg|z - z'|$ auf C_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$, wo z' einen beliebigen äußeren Punkt von D bedeutet, gerade die regulär harmonische Funktion $g(z) + \lg|z - z_\infty| - \lg|z - z'|$ dar. Auch beim Falle $z_\infty = \infty$ sind die Umstände ganz ähnlich; man betrachte dabei die Lösung des Dirichletschen Problems mit den Randwerten $a_\nu - \lg|z - z'|$ auf C_ν, welche gerade die Funktion $g(z) - \lg|z - z'|$ liefert. Bezüglich ihrer eindeutigen Bestimmtheit ist es fast selbstverständlich.

Insbesondere ist die Funktion $g(z;\, z_\infty, 0, \ldots, 0)$ nichts anderes als die gewöhnliche Greensche Funktion von D. Wir führen weiter diejenigen in D regulär harmonischen Funktionen

$$U_\nu(z) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

ein, welche die Dirichletschen Probleme mit den Randwerten

$$U_\nu(z) = \begin{cases} 1 & (z \in C_\nu) \\ 0 & (z \in C_\mu \neq C_\nu) \end{cases}$$

auflösen. Aus ihren Definitionen folgt unmittelbar die Identität

$$\sum_{\nu=0}^{n} U_\nu(z) \equiv 1\,.$$

Weiter läßt sich sofort übersehen, daß die Relation

$$g(z;\, z_\infty, a_0, \ldots, a_n) = g(z;\, z_\infty, 0, \ldots, 0) + \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu U_\nu(z)$$

identisch besteht; auf Grund dieser identischen Beziehung läßt sich die Existenz sowie die eindeutige Bestimmtheit der verallgemeinerten Greenschen Funktion wieder aufrechterhalten.

Wir bezeichnen jetzt die konjugiert harmonischen Funktionen von g und U_ν mit h bzw. V_ν, jede von denen gewiß bis auf eine additive Konstante festgestellt wird, und setzen dann

$$f(z;\, z_\infty, a_0, \ldots, a_n) = g(z;\, z_\infty, a_0, \ldots, a_n) + ih(z;\, z_\infty, a_0, \ldots, a_n)$$

und

$$W_\nu(z)=U_\nu(z)+iV_\nu(z) \qquad (\nu=0,1,\dots,n).$$

Jede von diesen ist eine in D analytische Funktion — für f ist aber der einzige Punkt z_∞ eine logarithmische Verzweigungsstelle — mit den rein imaginären Periodizitätsmoduln und besitzt also eine eindeutige Ableitung. Bei geeigneter Wahl der rein imaginären additiven Konstanten und der Funktionenzweige gelten die sofort ermittelbaren Beziehungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} W_\nu(z)=1$$

und

$$f(z\,;\,z_\infty,a_0,\dots,a_n)=f(z\,;\,z_\infty,0,\dots,0)+\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu W_\nu(z)$$

identisch. Der Fall $z_\infty=\infty$ läßt sich in ganz analoger Weise wie bei $z_\infty \neq \infty$ erledigen, und demgemäß der Einfachheit halber wollen wir im folgenden ausschließlich den letzten Fall behandeln. Die Funktion

$$f(z\,;\,z_\infty,a_0,\dots,a_n)-\lg\frac{1}{z-z_\infty}$$

stellt dann eine überall in D bis auf den evtl. enthaltenen unendlichfernen Punkt analytische Funktion mit den rein imaginären Periodizitätsmoduln dar und folglich ist die Funktion $f'(z\,;\,z_\infty,a_0,\dots,a_n)$ regulär analytisch in D außer dem Punkte z_∞, wo der einfache Pol mit dem Residuum -1 auftritt. Daher gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\delta df(z\,;\,z_\infty,a_0,\dots,a_n)=1\,;$$

hierbei ist das Integral links über eine beliebig innerhalb D verlaufende einfach geschlossene Kurve δ um z_∞ zu erstrecken. Wegen der Eindeutigkeit des reellen Teils g von f gilt stets die Relation

$$\frac{1}{2\pi i}\int df=\int\frac{1}{2\pi}dh\,;$$

hier dürfen die Integrale beiderseits über eine und dieselbe beliebige geschlossene Kurve in D genommen werden. Setzen wir nun

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_\nu} dh(z\,;\,z_\infty,0,\dots,0)=k_\nu \qquad (\nu=0,1,\dots,n)$$

und

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nu} dW_\mu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{C_\nu} dV_\mu(z)=a_{\mu\nu} \qquad (\mu,\nu=0,1,\dots,n),$$

worin alle Integrale über die betreffenden Randkurven im negativen Sinne bezüglich D zu erstrecken sind, dann gelten offenbar die Beziehungen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nu} df(z\,;\,z_\infty,a_0,\dots,a_n)=k_\nu+\sum_{\mu=0}^{n} a_\mu a_{\mu\nu} \qquad (\nu=0,1,\dots,n)$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu = 1 , \qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} = 0 \qquad (\mu = 0, 1, \dots, n) .$$

Wir wollen nun bemerken, daß die Martix $(a_{\mu\nu})$ $(\mu, \nu = 0, 1, \dots, n)$ mit der verschwindenden zugehörigen Determinante gerade den Rang n besitzt, und zwar, daß *die aus* n^2 *Elementen* $a_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, \dots, n)$ *gebildete Determinante* $|a_{\mu\nu}|$ *stets von Null verschieden ist.*

Wäre nämlich $|a_{\mu\nu}| = 0$, dann gäbe es ein System von nicht sämtlich verschwindenden reellen Zahlen A_μ $(\mu = 1, \dots, n)$ derart, daß die n Beziehungen

$$\sum_{\mu=1}^{n} A_\mu a_{\mu\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

simultan gelten sollten, und also würde die analytische Funktion

$$K(z) = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu W_\mu(z)$$

regulär eindeutig und folglich beschränkt überall in D. Ferner ist ihr reeller Teil $\Re K(z)$ auf jeder Randkurve C_μ $(\mu = 1, \dots, n)$ gleich A_μ und auf C_0 gleich 0. Da aber eine endliche Anzahl von den zur imaginären Achse parallelen Strecken kein beschränktes Gebiet abgrenzen kann, so müßte die Funktion $K(z)$ identisch eine Konstante sein. Trotz des Verschwindens auf C_0 nimmt $\Re K(z)$ sich widersprechend auf mindestens einer Kurve C_μ $(\mu > 0)$ den von Null verschiedenen Wert A_μ. Also muß tatsächlich die n-reihige Determinante

$$|a_{\mu\nu}| \neq 0$$

sein.

3. *Parallelschlitzabbildung.*

Wir bilden nun das in der z-Ebene gelegene $(n+1)$-fach zusammenhängende Gebiet D konform auf dasjenige Schlitzgebiet ab, welches dadurch entsteht, daß man die volle ω-Ebene längs der n gewissen zur reellen Achse parallelen Strecken aufschlitzt. Solche Abbildungsfunktion

$$\omega = \omega(z)$$

wird etwa durch die Normierungsbedingungen am inneren Punkte z_∞

$$\omega(z_\infty) = \infty , \qquad \lim_{z \to z_\infty} (z - z_\infty)\omega(z) = v_\infty A$$

bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. In der Tat enthält das durch die lineare Funktion

$$z^* = \frac{v_\infty A}{z - z_\infty}$$

aus D transformierte Bildgebiet D^* den Punkt $z^* = \infty$ als inneren Punkt, und die Funktion, welche die Abbildung von D^* auf ein in der ω-Ebene gelegenes Parallelschlitzgebiet vermittelt und sogar in einer Umgebung von $z^* = \infty$ die Gestalt

$$\omega = z^* + \cdots \qquad \left(\text{d. h. für } z^* = \infty: \quad \omega = \infty \text{ und } \frac{d\omega}{dz^*} = 1\right)$$

hat, läßt sich nach einem Satze von de Possel gewiß, nur von einer additiven Konstante abgesehen, eindeutig bestimmen.

Auf Grund dieser Überlegungen läßt sich besonders übersehen, daß *die Differenzen*

$$\beta_\nu - \beta_0 \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

auch in ganz eindeutiger Weise bestimmt werden, worin wir mit β_ν die konstanten Randwerte von $\Im\omega(z)$ auf jeder Randkomponente C_ν bezeichnen.

4. *Konstruktion des komplexen Geschwindigkeitspotentials.*

Wir versuchen nun diejenige analytische Funktion $F(z)$ mittels der oben eingeführten Funktionen $f(z)$ und $\omega(z)$ zusammenzusetzen, welche das komplexe Geschwindigkeitspotential für das Strömungsgebiet D bei der Vorgabe der ihm zugehörigen Werte $v_\infty A$ und $\varkappa_\nu$ $(\nu = 0, 1, \dots, n)$ darstellt.

Zu diesem Zwecke betrachten wir zuerst auf verkehrte Weise die Funktion

$$\omega^*(z) = F(z; z_\infty, c_1, \dots, c_n, \varkappa_0, \dots, \varkappa_n) - \frac{\varkappa}{2\pi i} f(z; z_\infty, a_0, \dots, a_n)$$

und zeigen, daß wir, bei geeigneter Wahl der Parameter c_ν $(\nu = 1, \dots, n)$ und a_ν $(\nu = 0, 1, \dots, n)$, dieser Funktion $\omega^*(z)$ die charakteristischen Eigenschaften der Schlitzabbildungsfunktion $\omega(z)$ zuordnen können. Auf jeder Randkurve C_ν gilt nämlich zunächst

$$\Im\omega^*(z) = c_\nu + \frac{\varkappa}{2\pi} a_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \dots, n).$$

Weiter beträgt jedes über C_ν im negativen Sinne bezüglich D genommene Integral

$$\int_{C_\nu} d\omega^*(z) = \varkappa_\nu - \varkappa\Big(k_\nu + \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu a_{\mu\nu}\Big) \qquad (\nu = 0, 1, \dots, n),$$

und wegen der schon erwähnten Beziehungen

$$\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu = 1, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} = 0$$

verschwindet die Summe dieser $n+1$ Integralwerte. Also wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Funktion $\omega^*(z)$ in D eindeutig sei, durch die Relationen

$$\varkappa_\nu - \varkappa\Big(k_\nu + \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu a_{\mu\nu}\Big) = 0 \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

oder, mittels der ersichtlichen Relationen $\sum_{\mu=0}^{n} a_{\mu\nu} = 0$ $(\nu = 1, \dots, n)$,

$$\varkappa \sum_{\mu=1}^{n} (a_\mu - a_0) a_{\mu\nu} = \varkappa_\nu - \varkappa k_\nu \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

geliefert. Sieht man diese Bedingungen als ein System linearer

Gleichungen für die Unbekannten $\varkappa(a_\mu - a_0)$ an, so kann man es stets in der Form

$$\varkappa(a_\mu - a_0) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\mu}(\varkappa_\nu - \varkappa k_\nu) \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

auflösen; denn wegen des schon bemerkten Nichtverschwindens der Koeffizientendeterminante $|a_{\mu\nu}|$ läßt sich die reziproke Matrix $(b_{\mu\nu})$ von $(a_{\mu\nu})$ einzig bestimmen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann ist die Funktion $\omega^*(z)$ eindeutig in D, und weiter verhält sich die Differenz

$$\omega^*(z) - \frac{v_\infty A}{z - z_\infty} = \left\{F(z; z_\infty, c_1, \ldots, c_n, \varkappa_0, \ldots, \varkappa_n) - \frac{v_\infty A}{z - z_\infty} - \frac{\varkappa}{2\pi i} \lg \frac{1}{z - z_\infty}\right\}$$
$$- \frac{\varkappa}{2\pi i}\left\{f(z; z_\infty, a_0, \ldots, a_n) - \lg \frac{1}{z - z_\infty}\right\}$$

regulär analytisch in einer gewissen Umgebung von $z = z_\infty$. Die Differenzfunktion $\omega^*(z) - \omega(z)$ ist also dann regulär und beschränkt überall in D und sogar dort eindeutig. Auf jeder Randkurve C_μ $(\mu = 0, 1, \ldots, n)$ ist ihr Imaginärteil konstant und zwar gilt dort

$$\Im\big(\omega^*(z) - \omega(z)\big) = c_\mu + \frac{\varkappa}{2\pi} a_\mu - \beta_\mu .$$

Folglich muß sie identisch eine Konstante sein. Wir erhalten somit einen Ausdruck für das Potential $F(z)$ in der Gestalt

$$F(z; z_\infty, c_1, \ldots, c_n, \varkappa_0, \ldots, \varkappa_n) = \omega(z) + \frac{\varkappa}{2\pi i} f(z; z_\infty, a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

oder

$$F(z; z_\infty, c_1, \ldots, c_n, \varkappa_0, \ldots, \varkappa_n) = \omega(z) + \frac{\varkappa}{2\pi i} f(z; z_\infty, 0, a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0);$$

jedenfalls ist eine unbedeutende additive Konstante vernachlässigt oder lieber vernünftigerweise in der Willkürlichkeit der Funktion $\omega(z)$ berücksichtigt zu denken. Hierbei sind die Parameter c_μ wegen der oben erwähnten Monodromiebedingungen und der Annahme $c_0 = 0$ durch

$$\begin{aligned} c_\mu &= \beta_\mu - \beta_0 - \frac{\varkappa}{2\pi}(a_\mu - a_0) \\ &= \beta_\mu - \beta_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\mu}(\varkappa_\nu - \varkappa k_\nu) \end{aligned} \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

eindeutig bestimmt. Setzen wir die betreffenden Werte von $\varkappa(a_\mu - a_0)$ in den obigen Ausdruck ein, dann *gelangen wir schließlich zur gesuchten Darstellung für das Geschwindigkeitspotential* $F(z)$:

$$\begin{aligned} F(z) &\equiv F(z; z_\infty, c_1, \ldots, c_n, \varkappa_0, \ldots, \varkappa_n) \\ &= \omega(z) + \frac{1}{2\pi i}\Big[\varkappa f(z; z_\infty, 0, \ldots, 0) + \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\mu}(\varkappa_\nu - \varkappa k_\nu) W_\mu(z)\Big]. \end{aligned}$$

Hiermit ist zugleich die Existenz des Potentials $F(z)$ in D, also auch $\Phi(Z)$ in Δ, sicher festgestellt, dessen eindeutige Bestimmtheit bis auf eine additive Konstante schon bestätigt ist.

5. *Die Kutta-Joukowskischen Bedingungen.*

Auf jeder Randkomponente Γ_j $(j=0,1,\dots,n)$ des in der Z-Ebene gelegenen Strömungsgebiets Δ sei je ein beliebiger Randpunkt Z_j vorgegeben, und die konforme Abbildung $Z=Z(z)$ führe ihn in z_j auf der entsprechenden Randkurve C_j des Bildgebiets D über, d. h. es sei $Z_j=Z(z_j)$. Dann lauten die *Kutta-Joukowskischen Bedingungen*

$$F'(z_j)\equiv F'(z_j\,;\,z_\infty,c_1,\dots,c_n,\varkappa_0,\dots,\varkappa_n)=0 \qquad (j=0,1,\dots,n),$$

worin für c_μ $(\mu=1,\dots,n)$ die oben gefundenen mittels $\varkappa_\nu$ dargestellten Werte zu ersetzen sind, und wodurch die $n+1$ Zirkulationskonstanten $\varkappa_\nu$ $(\nu=0,1,\dots,n)$ bestimmt werden sollen.

Jede solche Bedingung ist augenscheinlich eine komplexe Bedingung. Aber es läßt sich bestätigen, daß jede wirklich mit einer reellen Bedingung äquivalent ist. Zum Zwecke beachten wir zuerst, daß das Differential $dF(z)$ längs jeder Kurve C_j immer reell ist; denn $\Im F(z)$ bleibt auf jeder C_j konstant. Da die Funktion $F(z)$ auch auf jeder als regulär angenommenen Randkurve C_j die Analytizität beibehält, so ist ihre Ableitung $F'(z)$ natürlich von der Richtung der Differentiation unabhängig. Differentiieren wir also sie etwa längs der Randkurve C_j, so ergibt sich

$$\arg F'(z_j)=\arg\frac{dF(z_j)}{dz_j}\equiv-\theta_j \qquad (\mathrm{mod}\ \pi),$$

worin $\theta_j=\arg dz_j$ den Winkel zwischen der Tangente von C_j am Punkte z_j und der reellen Achse bedeutet. Mithin ist jede Größe $e^{i\theta_j}F'(z_j)$ $(j=0,1,\dots,n)$ immer reell und folglich ist die komplexe Bedingung $F'(z)=0$ mit einer wesentlich einzigen reellen Bedingung $\Re F'(z_j)=0$ oder $\Im F'(z_j)=0$ äquivalent.

Mit Hilfe unserer eben gefundenen Darstellung für $F(z)$ führen die Bedingungen $F'(z)=0$ uns zu einem System von $n+1$ linearen Gleichungen für die Größen $\varkappa_\nu$ $(\nu=0,1,\dots,n)$; die Kutta-Joukowskischen Bedingungen lauten nämlich

$$\sum_{\nu=0}^{n}s_{\nu j}\varkappa_\nu=e^{i\theta_j}\omega'(z_j) \qquad (j=0,1,\dots,n).$$

Hierbei sind zur Abkürzung

$$s_{\nu j}=\frac{ie^{i\theta_j}}{2\pi}\Big[f'(z_j\,;\,z_\infty,0,\dots,0)-\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}b_{m\mu}(k_m-\delta_{\nu m})W'_\mu(z_j)\Big]$$

gesetzt, worin $\delta_{\nu m}$ üblicherweise 1 oder 0 bedeutet, je nachdem $\nu=m$ bzw. $\nu\neq m$ ist.

Wie oben bemerkt wurde, sind die sämtlichen $e^{i\theta_j}F'(z_j)$ reell, und sogar in ganz analoger Weise ist ersichtlich, daß auch $ie^{i\theta_j}f'(z_j\,;\,z_\infty,0,\dots,0)$, $ie^{i\theta_j}W'_\mu(z_j)$ und $e^{i\theta_j}\omega'(z_j)$ alle reell sind. Mithin sind die Koeffizienten links und die Größen rechts unseres Gleichungssystems für $\varkappa_\nu$ sämtlich reell. Wenn also die $(n+1)$-reihige Determinante $|s_{\nu j}|$ nur von Null verschieden ist, so läßt es sich immer eindeutigerweise durch reelle $\varkappa_\nu$ auflösen. *Die Werte der Zirkulationskonstanten werden nämlich mittels der gewiß dann existierenden reziproken Matrix* $(t_{\nu j})$ *von* $(s_{\nu j})$ *durch die Ausdrücke*

$$\varkappa_\nu = \sum_{j=0}^{n} t_{j\nu} e^{i\theta_j} \omega'(z_j) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

geliefert.