

# EIN SYSTEM VON LINEAREN HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, WELCHE AUF ZWEI PARAMETERN ABHÄNGEN

KEN-ICHI TAKAHASHI

(Received November 12, 1955)

**1. Einleitung.** In dieser Abhandlung möchte ich die folgende Abhandlung erweitern: M. Hukuhara: Sur les propriétés asymptotiques des solutions d'un système d'équation différentielles linéaires contenant un paramètre. Er erörterte die Fälle von der Art, dass die charakteristische Gleichung nicht nur verschiedene Wurzeln hat, sondern auch noch mehrfache Wurzeln hat. Ferner erweiterte er dies zum Falle einer komplexen unabhängigen Veränderlichen.<sup>1)</sup>

Andererseits erörterte C. C. Hurd die asymptotische Entwicklung der Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung, welche auf einen Parameter abhängt.<sup>2)</sup> Wenn alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung voneinander verschieden sind, dann braucht es keine Voraussetzung zu unserem Zwecke.<sup>3)</sup> Wenn die charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln hat, dann kann man diesen Zweck nach der Betrachtung der charakteristischen Hilfsgleichung erreichen.<sup>4)</sup> Ferner erörterte er die asymptotische Entwicklung der Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung, welche auf zwei Parametern abhängt.<sup>5)</sup> Dabei betrachtete er nur den Fall dass die charakteristische Gleichung verschiedene Wurzeln hatte. Es genügte ihm keine Voraussetzung zu betrachten, welche der charakteristischen Hilfsgleichung der Differentialgleichung entsprach, die auf einen Parameter abhängte.

In dieser Abhandlung wollen wir nur eine Differentialgleichung behandeln, welche auf zwei Parametern abhängt und deren charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln hat.

**2. Formale Lösung.** Wir betrachten ein System von linearen homogenen Differentialgleichungen, welche auf zwei Parametern abhängen:

$$(1) \quad y'_j = \lambda^2 \mu \sum_{k=1}^2 a_{jk}(x, \lambda, \mu) y_k \quad (j = 1, 2).$$

Mit Benutzung einer Matrix lässt sich (1) folgendermassen umschreiben:

$$Y' = \lambda^2 \mu A(x, \lambda, \mu) Y.$$

---

1) Vgl. [1].

2) Vgl. [2].

3) Vgl. [2]. §3 (1).

4) Vgl. [2]. §3 (27b)

5) Vgl. [3].

Wir stellen die folgenden Voraussetzungen:

1°  $A(x, \lambda, \mu)$  ist für  $\alpha \leq x \leq \beta$ ,  $\lambda, \mu > 0$  stetig. Von jetzt an wollen wir nur den Fall betrachten, dass  $\lambda$  und  $\mu$  hinreichend gross sind, was wir durch  $\lambda, \mu > R$  ausdrücken wollen. Weiter der Einfachheit halber wollen wir an Stelle von  $\alpha \leq x \leq \beta$ ,  $\lambda, \mu > R$  kürzer  $D$  schreiben.

2°  $A(x, \lambda, \mu)$  lässt sich folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$A(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{r,s=0}^{\infty} A(x) \lambda^{-r} \mu^{-s} \quad \text{für } D, \lambda, \mu \rightarrow \infty.$$

3°  $A(x)$  ist für  $\alpha \leq x \leq \beta$  genügend oft differentierbar.

4° Die charakteristische Gleichung von (1)  $|A(x) - \rho E| = 0$  besitzt eine zweifache Wurzel  $\rho = \xi(x)$ .

Führen wir die Transformation

$$Y = P(x) \bar{Y}$$

in (1) ein, so kann man nach Wahl der passenden Funktion  $P(x)$   $A(x)$  zur kanonischen Form bringen. Also darf man vom Anfang an für  $A(x)$  voraussetzen, dass es eine kanonische Form besitzt. Ferner, wenn man an Stelle von  $A(x, \lambda, \mu)$  den Ausdruck  $A(x, \lambda, \mu) - \xi(x)E$  betrachtet, dann kann man vom Anfang an  $\xi(x) = 0$  voraussetzen.

Durch die Transformation

$$(2) \quad \bar{y}_1 = y'_1, \quad \bar{y}_2 = \lambda^2 \mu y_2$$

geht (1) in

$$(3) \quad \bar{Y}' = \lambda^2 \mu \bar{A}(x, \lambda, \mu) \bar{Y}$$

über. Wie eine kurze Berechnung zeigt, besitzt  $\bar{A}(x, \lambda, \mu)$  dieselben Eigenschaften wie bei  $A(x, \lambda, \mu)$ .

5°  $\bar{A}(x, \lambda, \mu)$  ist für  $D$  stetig.

6°  $\bar{A}(x, \lambda, \mu)$  lässt sich folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$\bar{A}(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{r,s=0}^{\infty} \bar{A}(x) \lambda^{-r} \mu^{-s} \quad \text{für } D, \lambda, \mu \rightarrow \infty.$$

7°  $\bar{A}(x)$  ist für  $\alpha \leq x \leq \beta$  genügend oft differentierbar.

8° Die charakteristische Gleichung von (4) besitzt auch eine zweifache Wurzel  $\rho = 0$ .

Ferner sind offenbar

$$9^\circ \quad \bar{a}_{21}(x, \lambda, \mu) = 1 \text{ und } \bar{a}_{22}(x, \lambda, \mu) = 0.$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(4) \quad y_j = \sum_{k=1}^2 a_{jk}^*(x, \lambda, \mu) \bar{y}_k \quad (j = 1, 2),$$

wo

$$a_{11}^*(x, \lambda, \mu) = 1/\lambda^2 \mu a_{21}(x, \lambda, \mu), \quad a_{12}^*(x, \lambda, \mu) = -a_{22}(x, \lambda, \mu)/\lambda^2 \mu a_{21}(x, \lambda, \mu)$$

$$a_{21}^*(x, \lambda, \mu) = 0, \quad a_{22}^*(x, \lambda, \mu) = 1/\lambda^2\mu$$

ist. Wenn man also eine asymptotische Lösung von (3) erfinden kann, dann kann man nach (4) auch eine asymptotische Lösung von (1) erfinden. Vom Anfang an kann man daher für  $A(x, \lambda, \mu)$  voraussetzen, dass es gelten:

$$10^\circ \quad a_{21}(x, \lambda, \mu) = 1 \quad \text{und} \quad a_{22}(x, \lambda, \mu) = 0.$$

Der Kürze der Berechnung halber setzen wir für  $A(x, \lambda, \mu)$  voraus, dass es gelten:

$$11^\circ \quad \begin{aligned} a_{11}(x) &= a_{11}(x) = a_{11}(x) = a_{12}(x) = 0 \quad (r+s < 8) \quad \text{und} \\ a_{11}(x), a_{11}(x), a_{11}(x), a_{12}(x) &\neq 0. \end{aligned}$$

Diese Voraussetzung  $11^\circ$  ist doch nicht wesentlich. Im allgemeinen Falle wird die Berechnung nur kompliziert. Noch wollen wir voraussetzen, dass es besteht:

$$12^\circ \quad f(x, \lambda, \mu) \equiv a_{11}(x)\mu^{-2} + a_{11}(x)\lambda^{-1}\mu^{-1} > 0 \quad \text{für } D.$$

Von jetzt an betrachten wir nur den Fall von der Art, dass zwischen der Ordnung von  $\lambda$  und  $\mu$  es die folgende Beziehung gilt:

$$(5) \quad \mu = O(\lambda^\sigma) \quad (1 \leq \sigma \leq 1 - \varepsilon; \varepsilon > 0) \text{ ist willkürlich klein.})$$

Um eine formale Lösung der Differentialgleichung (1) derart, dass sie sich mit  $F(x, \lambda, \mu) = (f(x, \lambda, \mu) + a_{11}(x)\lambda^{-3})\lambda^2\mu$  folgenderweise entwickeln lässt:

$$(6) \quad y_j \sim \sum_{r,s=0}^{\infty} \bar{p}_j(x) \lambda^{s-2r} \mu^{r-s} \exp F(x, \lambda, \mu) \quad (j = 1, 2,)$$

zu erfinden, führt man (6) in (1) ein, so erhält man, wie eine kurze Berechnung zeigt, die folgenden Beziehungen zwischen den Koeffizienten von (6):

$$(7) \quad \bar{p}_{rs}^-(x) = L(\bar{p}_{rs}^*(x), \bar{p}_{r-5, s-5}^-(x)),$$

$$(8) \quad \bar{p}_{r+1, s+1}^-(x) = \{\bar{p}_1(x) - \bar{p}_2(x) - a_{11}(x)\bar{p}_2(x) - a_{11}(x)\bar{p}_2(x) - a_{11}(x)\bar{p}_2(x)\} / a_{11}(x).$$

Mit  $L(\bar{p}_{rs}^*(x), \bar{p}_{r-5, s-5}^-(x))$  bezeichnet man eine lineare Kombination von  $\bar{p}_{jk}^-(x)$  ( $j \leq r$ ,  $k \leq s$ , wobei die Gleichheitszeichen nicht gleichzeitig entstehen) und  $\bar{p}_{jk}^-(x)$  ( $j \leq r-5$ ,  $k \leq s-5$ ) mit den Koeffizienten  $a_{jk}(x)$ . Durch Koeffizientenvergleich folgt sogleich

$$\bar{p}_{rs}^-(x) = 0 \quad (\text{entweder } s = 0, 1, 2, \text{ alle } r = 0, 1, \dots \text{ oder } = 0, 1, \text{ alle } s = 0, 1, \dots).$$

Sind  $\bar{p}_{jk}^-(x)$  ( $j \leq r$ ,  $k \leq s$ , wobei die Gleichheitszeichen nicht gleichzeitig entstehen)

und  $\bar{p}_{jk}^-(x)$  ( $j \leq r-5$ ,  $k \leq s-4$ ) schon bestimmt worden, so kann man nach

(7)  $\bar{p}_{rs}^-(x)$  eindeutig bestimmen. Daher lassen sich  $\bar{p}_{jk}^-(x)$  ( $j \leq r-2$ ,  $k \leq s-3$ )

und  $\bar{p}_{jk}^-(x)$  ( $j \leq r+3$ ,  $k \leq s+1$ ) bzw. nach (8) und (7) bestimmen. Nach Wie-

derholung dieses Verfahrens lassen sich  $\bar{p}_1(x)$  und  $\bar{p}_2(x)$  nacheinander eindeutig bestimmen, wobei man  $\bar{p}_1(x)$  (entweder  $j \leq 4$  oder  $k \leq 4$ ) und  $\bar{p}_2(x)$  (entweder  $j \leq 2$  oder  $k \leq 1$ ) so bestimmen kann, dass sie gleich 0 werden. Also besitzt (1) die folgende formale Lösung:

$$(9) \quad \begin{cases} y_1 \sim \sum_{r,s=5}^{\infty} \bar{p}_1(x) \lambda^{s-2r} \mu^{r-s} \exp F(x, \lambda, \mu), \\ y_2 \sim \sum_{r,s=2}^{\infty} \bar{p}_2(x) \lambda^{s-2r} \mu^{r-s} \exp F(x, \lambda, \mu). \end{cases}$$

Andererseits führt man die Transformation

$$(10) \quad \lambda = \lambda' t, \quad \mu = \mu' t$$

in (1) ein, so erhält man eine lineare homogene simultane Differentialgleichung:

$$(11) \quad Y' = t^3 B^*(x, \lambda', \mu', t) Y,$$

welche auf einen Parameter abhängt, wo sich  $B^*(x, \lambda', \mu', t)$  folgendermassen asymptotisch entwickeln lässt

$$B^*(x, \lambda', \mu', t) \sim \sum_{r=0}^{\infty} B^*(x, \lambda', \mu') t^{-r} \quad \text{für } \alpha \leq x \leq \beta, 0 < t, t \rightarrow \infty.$$

Von jetzt an wollen wir auf diesem Falle die Theorie der Differentialgleichung anwenden, welche auf einen Parameter abhängt<sup>6)</sup>. Führen wir die Transformation

$$Y = P_1(t) Z, \quad P_1(t) = \begin{pmatrix} \kappa^{-1}(\lambda', \mu') t^{-5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in (11) ein, wo  $\kappa^{-1}(\lambda', \mu')$  in Bezug auf  $\lambda'^{-1}$  und  $\mu'^{-1}$  eine homogene Funktion des 5-ten Grades ist, so wird (11) zu

$$(12) \quad Z' = t B(x, \lambda', \mu', t) Z,$$

wo  $B(x, \lambda', \mu', t)$  sich folgendermassen entwickeln lässt:

$$B(x, \lambda', \mu', t) \sim \sum_{r=0}^{\infty} B(x, \lambda', \mu') t^{-r} \quad \text{für } \alpha \leq x \leq \beta, 0 < t, t \rightarrow \infty.$$

Nach 12° besitzt die charakteristische Gleichung von (12) voneinander verschiedene Wurzeln. Durch die Transformation

$$Z = P(x, \lambda', \mu', t) \bar{Z}, \quad P(x, \lambda', \mu', t) \sim \sum_{r=0}^{\infty} P(x, \lambda', \mu') t^{-r}. \quad (P_0 = E)$$

geht (12) in

$$(13) \quad \bar{Z}' = t \bar{B}(x, \lambda', \mu', t) \bar{Z}$$

über. Dabei nach Wahl der passenden Funktion  $P(x, \lambda', \mu', t)$  wird  $\bar{B}(x, \lambda', \mu', t)$  eine diagonale Matrix. Weil man  $p_{j,j}(x)$  ( $r = 1, \dots, j = 1, 2$ ) willkürlich

6) Vgl. [1].

bestimmen kann, so bestimmt man  $\bar{p}_{jf}(x) = 0$ . Führt man die Transformation

$$\bar{Z} = \bar{P}(x, \lambda', \mu', t) \bar{Z}, \quad \bar{P}(x, \lambda', \mu', t) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \bar{P}_r(x, \lambda', \mu') t^{-r}, \quad \bar{P}_0(x, \lambda', \mu') = E$$

in (13) ein, so erhält man

$$\bar{Z}' = t \bar{B}(x, \lambda', \mu', t) \bar{Z},$$

wo  $\bar{B}(x, \lambda', \mu', t)$  sich folgendermassen formell entwickeln lässt:

$$\bar{B}(x, \lambda', \mu', t) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \bar{B}_r(x, \lambda', \mu') t^{-r}.$$

Dabei nach Wahl der passenden Funktionen  $\bar{P}_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) kann man  $\bar{B}_r(x, \lambda', \mu')$  so bestimmen, dass

$$\bar{B}_r(x, \lambda', \mu') = 0 \quad (r = 2, 3, \dots)$$

ist. Weil man  $\bar{p}_{jk}(x)$  ( $r = 1, 2, \dots, j \neq k$ ) willkürlich bestimmen kann, so bestimmt man  $\bar{p}_{jk}(x) = 0$ . Da es die Beziehung  $t(\bar{B}_0(x, \lambda', \mu') + \bar{B}_1(x, \lambda', \mu') t^{-1}) = F(x, \lambda', t, \mu' t)$  gilt, so besitzt (11) die folgende formale Lösung:

$$(14) \quad y_j \sim \sum_{r=3}^{\infty} \bar{p}_{jr}(x, \lambda', \mu') t^{-r} \exp F(x, \lambda' t, \mu' t) \quad (\bar{p}_3(x, \lambda', \mu') = \bar{p}_4(x, \lambda', \mu') = 0) \\ (j = 1, 2),$$

wo  $\bar{p}_{jr}(x, \lambda', \mu')$  in Bezug auf  $\lambda'^{-1}$  und  $\mu'^{-1}$  eine homogene Funktion des  $j$ -ten Grades ist.<sup>7)</sup> Also besitzt (1) die folgende formale Lösung:

$$(15) \quad y_j \sim \sum_{r=3}^{\infty} \bar{p}_{jr}(x, \lambda, \mu) \exp F(x, \lambda, \mu) \quad (\bar{p}_3(x, \lambda, \mu) = \bar{p}_4(x, \lambda, \mu) = 0) \quad (j = 1, 2),$$

wenn wir die Transformation (10) in (14) wieder einführen. Es gilt:

$$\bar{p}_{1r}(x, \lambda, \mu) = \kappa^{-1}(\lambda, \mu) \bar{p}_{1r-5}(x, \lambda, \mu) \exp F^*(x, \lambda, \mu), \\ \bar{p}_{2r}(x, \lambda, \mu) = \sum_{s=3}^r \bar{p}_{2s}(x, \lambda, \mu) \bar{p}_{1r-s}(x, \lambda, \mu) \exp F^*(x, \lambda, \mu),$$

wo

$$F^*(x, \lambda, \mu) = \int \lambda^2 \mu (a_{11}(x) \lambda^{-2} \mu + a_{12}(x) \lambda^{-1} \mu^{-1} + a_{03}(x) \mu^{-3}) dx$$

ist. Wie eine kurze Berechnung zeigt, werden  $\bar{p}_{11}(x, \lambda, \mu)$  und  $\bar{p}_{21}(x, \lambda, \mu)$  zu

$$\bar{p}_{11}(x, \lambda, \mu) = (\lambda^{-2} \mu)^r \bar{p}_{11}^*(x, \lambda, \mu), \quad \bar{p}_{21}(x, \lambda, \mu) = (\lambda^{-2} \mu)^r \bar{p}_{21}^*(x, \lambda, \mu),$$

wobei es klar ist, dass  $\bar{p}_{11}^*(x, \lambda \mu^{-1})$  und  $\bar{p}_{21}^*(x, \lambda \mu^{-1})$  für  $D$  stetig und

7) Vgl. [4].

beschränkt sind. Folglich werden  $\bar{p}_{11}(x, \lambda, \mu)$  und  $p_{21}(x, \lambda, \mu)$  auch dort stetig und beschränkt. Ferner lassen sich  $\bar{p}_{11}^*(x, \lambda\mu^{-1})$  und  $p_{21}^*(x, \lambda\mu^{-1})$  folgenderweise formell entwickeln:

$$\bar{p}_{11}^*(x, \lambda\mu^{-1}) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \bar{p}_{11}^*(x) \lambda^s \mu^{-s}, \quad p_{21}^*(x, \lambda\mu^{-1}) \sim \sum_{s=2}^{\infty} p_{21}^*(x) \lambda^s \mu^{-s}.$$

Da die formale Lösung (9) eindeutig bestimmt wird, so muss die rechte Seite von (15) auch mit derjenigen von (9) zusammentreffen, wenn wir insbesondere  $\kappa^{-1}(\lambda, \mu) = c\lambda^{-5}$  ( $c$ : eine passende Konstante) annehmen. D.h. kann man die formale Lösung (9) in (15) zuordnen. Von jetzt an wollen wir für (5) als die formale Lösung von (1) die formale Lösung (15) an Stelle von (9) betrachten.

### 3. Eindeutigkeit der Lösung. Durch die Transformation

$$Y = \exp \{F(x, \lambda, \mu)\} P_2(\lambda, \mu) \mathfrak{Y}$$

geht (1) in

$$(16) \quad \mathfrak{Y}' = \mathfrak{U}(x, \lambda, \mu) \mathfrak{Y}$$

über, wo

$$\mathfrak{U}(x, \lambda, \mu) = \lambda^2 \mu P_2(x, \lambda, \mu)^{-1} \{A(x, \lambda, \mu) - (f(x, \lambda, \mu) + a_{11}(x) \lambda^{-5} E) P_2(x, \mu)$$

ist. Insbesondere nehmen wir  $P_2(\lambda, \mu)$  derart an, dass es ist:

$$P_2(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda^{-4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so besitzt (16) die folgende Lösung:

$$(17) \quad \mathfrak{y}_j \sim \sum_{r=1}^{\infty} p_j(x, \lambda, \mu) \quad (p_1(x, \lambda, \mu) = p_2(x, \lambda, \mu) = 0) \quad (j = 1, 2),$$

wo

$$p_1(x, \lambda, \mu) = \lambda^4 \bar{p}_1(x, \lambda, \mu), \quad p_2(x, \lambda, \mu) = \bar{p}_2(x, \lambda, \mu)$$

ist. Folglich erhält man

$$(18) \quad p_j(x, \lambda, \mu) = (\lambda^{-2} \mu)^{r+j} p_j^*(x, \lambda\mu^{-1}) \quad (j = 1, 2),$$

wo  $p_j^*(x, \lambda\mu^{-1})$  für  $D$  stetig und beschränkt ist. Also wird  $p_j(x, \lambda, \mu)$  dort stetig und beschränkt. Setzt man

$$\mathfrak{y}_j = \sum_{r=0}^{N+1} p_j(x, \lambda, \mu) + u_j \quad (j = 1, 2),$$

so geht (16) in

$$(19) \quad u_j' = \sum_{k=1}^2 a_{jk}(x, \lambda, \mu) u_k + b_j(x, \lambda, \mu) \quad (j = 1, 2)$$

über. Wie eine kurze Berechnung zeigt, lässt sich  $b_j(x, \lambda, \mu)$  folgenderweise asymptotisch entwickeln:

$$b_j(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{r=N+1}^{\infty} b_j(x, \lambda, \mu) \quad \text{für } D, \lambda, \mu \rightarrow \infty, (j = 1, 2).$$

Im Falle (5) definieren wir die asymptotische Entwicklung folgendermassen. Im allgemeinen setzen wir für  $\beta(x, \lambda, \mu)$  voraus, dass es sich folgenderweise formell entwickeln lässt:

$$(20) \quad \beta(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r(x, \lambda, \mu),$$

wo  $\beta_r(x, \lambda, \mu)$  für  $D$  stetig ist, und für  $\beta_r(x, \lambda, \mu)$  dass es sich in Bezug auf  $\lambda$  und  $\mu$  folgenderweise formell entwickeln lässt:

$$\beta_r(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \beta_{rs}(x) \lambda^{s-2r} \mu^{r-s},$$

wo  $\beta_{rs}(x)$  für  $\alpha \leq x \leq \beta$  genügend oft differentierbar ist. Gilt die folgende Beziehung:

$$\beta(x, \lambda, \mu) - \sum_{r=0}^N \beta_r(x, \lambda, \mu) = O(\lambda^{-2(N+1)} \mu^{N+1}),$$

so nennen wir die rechte Seite von (20) die asymptotische Entwicklung von  $\beta(x, \lambda, \mu)$ . Da es

$$\lambda^{-N-1} + \mu^{-N-1} = O(\lambda^{-2(N+1)} \mu^{N+1})$$

ist, so kann man die Funktion  $A(x, \lambda, \mu)$  im oben gesprochenen Sinne asymptotisch entwickeln. Mit Ausnahme von  $a_{22}(x, \lambda, \mu)$  lassen sich  $a_{jk}(x, \lambda, \mu)$  ( $j, k = 1, 2$ ) auch folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$a_{jk}(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_{jr}(x, \lambda, \mu) \quad \text{für } D, \lambda, \mu \rightarrow \infty, \quad (j, k = 1, 2),$$

wo offenbar  $a_{jk}(x, \lambda, \mu) = O(\lambda \mu^{-1})$  ist. Also kann man Konstanten  $K$  und  $H$  hinreichend gross annehmen, so dass für  $\lambda, \mu > R$  es die Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned} |b_j(x, \lambda, \mu)| &\leq K \lambda^{-2(N+1)} \mu^{N+1}, & (j = 1, 2), \\ |a_{jk}(x, \lambda, \mu)| &\leq H(\lambda^{-2} \mu + \lambda \mu^{-1}), & (j, k = 1, 2). \end{aligned}$$

Durch die Transformation

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2 e^{-F(x, \lambda, \mu)}$$

erhält man

$$(21) \quad \begin{cases} v_1' = a_{11}(x, \lambda, \mu) v_1 + a_{12}(x, \lambda, \mu) e^{-F(x, \lambda, \mu)} v_2 + b_1(x, \lambda, \mu) \\ v_2' = a_{21}(x, \lambda, \mu) e^{F(x, \lambda, \mu)} v_1 + b_2(x, \lambda, \mu) e^{F(x, \lambda, \mu)}. \end{cases}$$

Wenn es die folgenden Ungleichungen gelten:

$$(22) \quad \begin{cases} L \frac{\partial G_1(x, \lambda, \mu)}{\partial x} > \{LH(\lambda^{-2} \mu + \lambda \mu^{-1}) (e^{x-x_1} + e^{x-x_2}) + K\} \lambda^{-2(N+1)} \mu^{N+1}, \\ L \frac{\partial G_2(x, \lambda, \mu)}{\partial x} > \{LH(\lambda^{-2} \mu + \lambda \mu^{-1}) e^{x-x_1} + K\} \lambda^{-2(N+1)} \mu^{N+1} e^{F(x, \lambda, \mu)}, \end{cases}$$

so folgt sogleich

$$|v_j(x, \lambda, \mu)| \leq LG_j(x, \lambda, \mu) \quad (j = 1, 2).$$

Dabei nimmt man

$$\begin{cases} LG_1(x, \lambda, \mu) \leq L\lambda^{-2(N+1)} \mu^{N+1} e^{x-\alpha_1}, \\ LG_2(x, \lambda, \mu) \leq L\lambda^{-2(N+1)} \mu^{N+1} e^{F(x, \lambda, \mu)+x-\alpha_2} \end{cases} \quad (x_j = \alpha \quad (j = 1, 2))$$

an, und erfüllt  $v_j(x, \lambda, \mu)$  die folgende Anfangsbedingung:<sup>8)</sup>

$$(23) \quad v_j(x_j) = v_j^0, \quad |v_j^0| \leq LG_j(x_j, \lambda, \mu), \quad (j = 1, 2).$$

Wenn es zwei Lösungen von (21) derart gibt, dass sie eine Anfangsbedingung (23) erfüllen, dann muss  $w_j(x)$  (die Differenz dieser Lösungen) die folgende Differentialgleichung und Anfangsbedingung

$$\begin{cases} w_1' = a_{11}(x, \lambda, \mu)w_1 + a_{12}(x, \lambda, \mu)e^{-F(x, \lambda, \mu)}w_2, \\ w_2' = a_{21}(x, \lambda, \mu)w_1 e^{F(x, \lambda, \mu)}, \\ w_j(x_j) = 0 \end{cases}$$

erfüllen. Wir bestimmen  $\bar{L}$  durch

$$(24) \quad \bar{L} = \max_{j=1}^2 \{|w_j(x)| / G_j(x, \lambda, \mu)\}.$$

Ist  $\bar{L} > 0$ , so folgt aus (22) sogleich

$$\frac{\partial G_j(x, \lambda, \mu)}{\partial x} > \frac{d|w_j(x)|}{dx},$$

$$\therefore \quad \bar{L}G_j(x, \lambda, \mu) > |w_j(x)|$$

entgegen (24). Also muss  $w_j(x) \equiv 0$  sein.<sup>9)</sup> Die hinreichende Bedingung dafür, dass die erste Ungleichung von (22) besteht, wird gegebenen durch

$$(25) \quad 2\bar{K}\lambda \leq \mu \leq M^*\lambda^{2-\epsilon} \quad \text{für } \lambda, \mu > R,$$

worin  $\bar{K} = 2He^{g-\alpha}$  ist, und man die Konstante  $M^* (> 0)$  willkürlich gross annehmen kann. Mit Betrachtung der Voraussetzung 12° und (26) ist es auch klar, dass zweite Ungleichung von (22) für  $\lambda, \mu > R$  besteht.

**4. Asymptotische Entwicklung.** Für eine natürliche Zahl  $M (\geq \frac{1}{\epsilon})$  wird die Funktion  $\lambda^{r/M} p_j(x, \lambda, \mu)$  für  $D$  stetig und beschränkt. Bestimmen wir eine Funktion  $f(\lambda)$  durch

$$f(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} e^{-a_r t} t^{-2} dt,$$

wo  $f(\lambda) = 0$  ( $r < M$ ) ist, so lassen sich folgende Tatsachen leicht versichern:<sup>10)</sup>

(i) Man kann eine hinreichend kleine positive Zahl  $a_r$  so bestimmen, dass die folgende Ungleichung gilt:

8) Vgl. [1]. S. 269.

9) Vgl. [1]. S. 270.

10) Vgl. [1]. S. 272.

$$|\lambda^{-1} - f(\lambda)| \leq 1/\max_{j=1}^2 (|\lambda^{r/M} p_j(x_j, \lambda, \mu)|) \quad \text{für } D.$$

(ii) Wie gross die natürliche Zahl  $n$  auch sein mag, wird  $\lambda^n f(\lambda)$  ( $r = 1, \dots$ ) für  $\lambda \rightarrow \infty$  gegen 0 gleichmässig konvergent.

Wenn wir die Funktionen  $\phi_j(\lambda, \mu)$  ( $j = 1, 2$ ) von  $\lambda$  und  $\mu$  durch

$$\phi_j(\lambda, \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} p_j(x_j, \lambda, \mu) \lambda(\lambda^{-1} - f(\lambda)) \quad (j = 1, 2)$$

bestimmen, so folgt aus (i)

$$\begin{cases} |p_j(x_j, \lambda, \mu) \lambda(\lambda^{-1} - f(\lambda))| = |p_j(x_j, \lambda, \mu)| \quad \text{für } r < M, \\ \leq \lambda^{-\frac{r-M}{M}} \quad \text{für } r \geq M. \end{cases}$$

Danach wird  $\phi_j(\lambda, \mu)$  für  $\lambda, \mu > R$  gleichmässig konvergent. Es gilt:

$$\begin{aligned} \phi_j(\lambda, \mu) - \sum_{r=0}^N p_j(x_j, \lambda, \mu) &= -\lambda \sum_{r=0}^N p_j(x_j, \lambda, \mu) f(\lambda) + \sum_{r=N+1}^{\infty} p_j(x_j, \lambda, \mu) \lambda(\lambda^{-1} - f(\lambda)) \\ &= -\lambda \sum_{r=M}^{M(N+2)} p_j(x_j, \lambda, \mu) f(\lambda) + \sum_{r=N+1}^{M(N+1)} p_j(x_j, \lambda, \mu) + \sum_{r=M(N+2)}^{\infty} p_j(x_j, \lambda, \mu) \lambda(\lambda^{-1} - f(\lambda)), \end{aligned} \quad (j = 1, 2).$$

Nach Betrachtung von (18) und (ii) erhält man

$$(26) \quad -\lambda \sum_{r=M}^{M(N+2)} p_j(x_j, \lambda, \mu) f(\lambda), \quad \sum_{r=N+1}^{M(N+1)} p_j(x_j, \lambda, \mu) = O(\lambda^{-2(N+1)} \mu^{N+1}) \quad (j = 1, 2).$$

Mit Benutzung von (i) wird das letzte Glied für  $\lambda, \mu > R$  gleichmässig konvergent, also ergibt sich

$$(27) \quad \sum_{r=M(N+2)}^{\infty} p_j(x_j, \lambda, \mu) \lambda(\lambda^{-1} - f(\lambda)) = O(\lambda^{-N-1}) = O(\lambda^{-2(N+1)} \mu^{N+1}).$$

Da aus (26) und (27)

$$\phi_j(\lambda, \mu) - \sum_{r=0}^N p_j(x_j, \lambda, \mu) = O(\lambda^{-2(N+1)} \mu^{N+1}) \quad (j = 1, 2)$$

folgt, so lässt sich  $\phi_j(\lambda, \mu)$  folgenderweise asymptotisch entwickeln:

$$\phi_j(\lambda, \mu) \sim \sum_{r=0}^{\infty} p_j(x_j, \lambda, \mu) \quad \text{für } D, \quad \lambda, \mu \rightarrow \infty, \quad (j = 1, 2).$$

Zur Lösung von (16), welche die Anfangsbedingung erfüllt:

$$\eta_j(x_j) = \phi_j(\lambda, \mu) \quad (j = 1, 2).$$

entspricht die Lösung von (21), welche eine Anfangsbedingung (23) erfüllt. Da es gilt:

$$\begin{cases} v_1(x_1) = v_1^0 = \phi_1(\lambda, \mu) - \sum_{r=0}^{N+1} p_1(x_1, \lambda, \mu), \\ v_2(x_2) = v_2^0 = \left\{ \phi_2(\lambda, \mu) - \sum_{r=0}^{N+1} p_2(x_2, \lambda, \mu) \right\} e^{F(x_2, \lambda, \mu)}, \end{cases}$$

so ergibt sich für eine hinreichend grosse Zahl  $L$  die Beziehung (23). Folglich erhält man

$$|v_j(x, \lambda, \mu)| \leq LG_j(x, \lambda, \mu) \quad (j = 1, 2),$$

d. h.

$$|\eta_j - \sum_{r=0}^{N+1} p_j(x, \lambda, \mu)| \leq L \lambda^{-2(N+1)} \mu^{N+1} e^{\sigma - x_j} \quad (j = 1, 2).$$

Da es

$$p_{N+1}^j(x, \lambda, \mu) = O(\lambda^{-2(N+1)} \mu^{N+1}) \quad (j = 1, 2)$$

ist, so folgt sogleich

$$(28) \quad \eta_j - \sum_{r=0}^N p_j^r(x, \lambda, \mu) = O(\lambda^{-2(N+1)} \mu^{N+1}) \quad (j = 1, 2).$$

Die Gleichung (28) bedeutet, dass (16) die asymptotische Lösung (17) besitzt, also dass (1) für (25) die asymptotische Lösung (15) besitzt.

Wenn  $1 + \varepsilon \leq \sigma \leq 2$  ist, so kann man genau wie im obigen Falle es behandeln. Ferner müssen wir noch die Fälle  $\sigma \leq 1$  und  $\sigma \geq 2$  erörtern. Jedoch möchte ich nachher sie tun.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] M. HUKUHARA, Sur les propriétés asymptotiques des solutions d'un système d'équations différentielles linéaires contenant un paramètre, Memo. Fac. Eng. Kyūshū Imp. Univ. VIII(1937), 249-280.
- [2] C. C. HURD, Asymptotic theory of linear differential equations singular in the variable of differentiation and in a parameter, Tôhoku Math. Journ., 44(1938), 243-274.
- [3] C. C. HURD, Asymptotic theory of linear differential equations containing two parameters, Tôhoku Math. Journ., 45(1938), 58-68.
- [4] K. TAKAHASHI, Lineare homogene simultane Differentialgleichungen, welche auf zwei Parametern abhängen, (III), Memo. Faculty of Liberal Arts and Education, Yamanashi Univ., 6(1955), 113-118.