SUR UNE VARIÉTÉ MUNIE D'UNE STRUCTURE DE CONTACT ADMETTANT CERTAINES TRANSFORMATIONS

SHÛKICHI TANNO

(Reçu le 6 mai, 1965)

Introduction. Toute variété différentiable M munie d'une structure de contact admet une (ϕ, ξ, η, g)-structure, η étant une forme donnée de contact, ξ le champ associé à η, ϕ (1,1)-tenseur et g la métrique riemannienne associée, satisfaisant à certaines relations ([7], [8], [9]). En particulier, nous avons l'égalité fondamentale :

$$d\eta(X,Y) = g(X,\phi Y)$$

pour tous vecteurs X, Y de M. Dans cette note, en généralisant le résultat [11], nous démonstrerons le suivant

THÉORÈME. *Supposons que* (i) *M soit connexe et complète par rapport à g,* (ii) *M admette une transformation μ qui laisse ϕ invariant, mais ne soit pas un automorphisme de la structure. Alors la variété M est munie d'une structure d'espace fibré principal $M(M/\xi, R, \pi)$ de base M/ξ la variété symplèctique, de groupe structural R. η définit une connexion infinitésimale sur M.*

De nouveau, si (iii) *ξ est le champ de vecteur de Killing, M/ξ est la variété presque kählerienne qui est euclidienne: $M/\xi = R^{2n}$. Et M est un'espace produit $R \times R^{2n}$.*

C'est-à-dire, si M, satisfaisant à (i) ((i) et (iii), resp.), n'est pas munie d'une structure d'espace fibré principal $M(M/\xi, R, \pi)$ ($R \times R^{2n}$, resp.), toute transformation qui laisse ϕ invariant est un automorphisme de la (ϕ, ξ, η, g)-structure.

1. Lemmes. Sopposons que μ soit une transformation qui laisse ϕ invariant. Alors on a $\mu^*\eta = c\eta$, $\mu\xi = c\xi$ et

$$(1°) \qquad \mu^* g = c\,g + c(c-1)\,\eta \otimes \eta\,,$$

où c est constante, $\otimes$ est le produit tensoriel et μ^* est un isomorphisme des tenseurs covariants en μx sur les tenseurs covariants en x ([9]). Par suite, si $c=1$, μ est un automorphisme de la structure. Soit μ une transformation qui ne soit pas un automorphisme de la structure. En passant au besoin à l'inverse μ^{-1}, nous pouvons supposer que $c<1$. Il en résulte ([9]):

(2°) Il y a seulement un point p qui est invariant par μ.

(3°) La longueur $\bar{r}$ de l'image par μ d'un chemin C est inférieure à la longueur r du chemin $C; \bar{r}<cr$.

(4°) $\alpha_{ct}\mu=\mu\alpha_t$, $(\mu\xi=c\xi)$,

où $\alpha_t=\exp t\xi$ $(-\infty<t<\infty)$ est un groupe à 1-paramètre de transformations globales de M engendré par le champ de vecteur ξ, et $\alpha_t q$ $(-\infty<t<\infty)$ est une géodésique pour $q\in M$.

Supposons maintenant que il y a un point q et un nombre réel λ tels que $\alpha_\lambda q=q$, et soit $l=(\alpha_t q: 0\leqq t<\lambda)$ un lacet en q de la longueur λ. Alors si $\mu^k l$ et $\mu^k q$ sont deux itérés de l et q par μ, il est facile de voir que $\mu^k q$ tend vers p quand $k\to\infty$, et la longueur de $\mu^k l$ tend vers 0. Ce qui est en contradiction avec la non-singularité de ξ. Nous énonçons:

LEMME 1. *Toute trajectoire de ξ est homéomorphe à R, groupe additif de nombres réels.*

Soient X, Y, Z les champs de vecteurs, il vient (voir, par example [2])

$$2g(\nabla_X Z, Y)=X\cdot g(Y,Z)+Z\cdot g(Y,X)-Y\cdot g(Z,X)$$
$$+g(X,[Y,Z])+g(Z,[Y,X])-g(Y,[Z,X]),$$

où ∇ est l'opérateur de dérivation covariante. Dans la suite on a

(5°) $$2g(\nabla_X X, Y)=2X\cdot g(X,Y)+2g(X,[Y,X])-Y\cdot g(X,X).$$

LEMME 2. *Soit $l=l(x,y)$ une géodésique joignant x à y, qui est une courbe intégrale de la distribution $\eta=0$. Alors μl est la géodésique joignant μx à μy et une ligne courbe intégrale de $\eta=0$ encore.*

DÉMONSTRATION. Désignons par X le champ de vecteur sur M tel que X est tangentiel à l en chaque point de l et $(\nabla_X X)|_l=0$ est la equation de la géodésique. D'abord, de $\mu^*\eta=c\eta$, il résulte immédiatement que la distribution $\eta=0$ est invartante par μ. Soit r un point générique de l et soit $s=\mu r$, d'après (5°), on a

$$2g_s(\nabla_{\mu X}\mu X, \mu Y)=2(\mu X)_s\cdot g(\mu X,\mu Y)+2g_s(\mu X,[\mu Y,\mu X])-(\mu Y)_s\cdot g(\mu X,\mu X)$$

quel que soit de Y. De (1°) et $\eta_r(X)=0$, on déduit

$$(\mu X)_s \cdot g(\mu X, \mu Y) = (\mu X)_s \cdot (cg(X, X) \cdot \mu^{-1}) = cX_r \cdot g(X, Y)\,.$$

Ainsi

$$g_s(\nabla_{\mu X} \mu X, \mu Y) = cg_r(\nabla_X X, Y) = 0\,.$$

Par suite, μl est une géodésique.

D'autre part, on a (voir, par example [5])

LEMME 3. *Étant donnée une géodésique $l = l(x, y)$ joignant x à y, si l est orthogonale à le vecteur de Killing ξ en x, il en est de même à tout point de l, en particulier en y.*

Désignons par U un voisinage convexe et assez petit de p, p étant un point invariant par μ, il est possible de trouver un voisinage V de p dans U qui est plat par rapport au ξ et de centre p ([6]), tel que, pour chaque courbe intégrale C de ξ contenue dans V, il existe une géodésique $l = l(p, x)$ joignant p à $x \in C$ et donnant la distance qui est la plus courte. l et C sont perpendiculaire en x l'un l'autre, ainsi, si ξ est le champ de vecteur de Killing, d'après le Lemme 3, l est orthogonale à ξ en p. Soit S une hypersurface dans V définie comme une réunion de ces géodésiques partant de p, alors pour chaque point $q \in S$ une trajectoire de ξ qui passe q et est contenue dans U recontre S une fois en q seulement.

LEMME 4. *La distribution par ξ est reguliére.*

DÉMONSTRATION. Supposons maintenant que il y ait un point q qui ne soit pas regulier, il existe un nombre k tel que $\mu^k q \in V$. Ainsi, supposons que $q \in V$. On a deux points q_1 et q_2 proches à q dans V tels que, q_1 et q_2 appartiennent à deux trajectoires différentes de ξ contenues dans V, et $q_1 = \alpha_\lambda q_2$ pour un certain nombre λ. Tandis qu'on voit qu'il existe un nombre réel κ tel que la longueur de chaque trajectoire de ξ dans V est plus grande que κ. Et on a $c^m \lambda < \kappa$ pour un grand nombre m, ce qui est en contradiction.

LEMME 5. *Si ξ est le champ de vecteur de Killing, M est difféomorphe à $R^{2n} \times R = R^{2n+1}$, $2n+1$ désignant la dimension de M.*

DÉMONSTRATION. Cet espace étant complet, nous prolongeons infiniment chaque géodésique orthogonale à ξ partant de p. Si, pour deux géodésiques différentes l_1 et l_2, ils existent un point x et un nombre réel λ tels que x appartient à l_1 et $\alpha_\lambda x$ appartient à l_2. De Lemme 2, itérativement, $\mu^k l_1$ et $\mu^k l_2$ sont les géodésiques partant de p encore. Toutefois, pour un certain grand nombre k, $\mu^k l_1$ et $\mu^k l_2$ sont contenues dans V. Et $\mu^k x$ et $\mu^k \alpha_\lambda x$ sont dans la même trajectoire de ξ, ce qui est en contradiction avec la propriété de V. Cette discussion montre que ces géodésiques définissent une hypersurface $\widetilde{S}$ contenant S. Par la application exponentiele Exp en p, $\widetilde{S}$ est difféomorphe au sous-espace $T_p(\eta)$ (identifié à R^{2n}) orthogonal à ξ de l'espace des vecteurs tangentiels à M en p. Nous définissons une application $\varphi: R^{2n} \times R \to M$ par

$$\varphi(a, t) = \alpha_t \operatorname{Exp} a ,$$

où $a \in R^{2n}$, $t \in R$. Soit x un point générique de M, pour un certain nombre k, on a $\mu^k x \in V$. Il existe une géodésique $l(p, \bar{x})$ joignant p à $\bar{x}$ contenue dans S, $\bar{x}$ désignant un point tel que $\alpha_\lambda \bar{x} = \mu^k x$ pour un certain nombre λ.

De (4°), on déduit que $\alpha_{-c-k\lambda} x$ appartient à la géodésique $\mu^{-k} l(p, \bar{x})$. Ainsi φ est une bijection.

2. Démonstration de Théorème. Désignons nous par M/ξ toutes les trajectoires maximales de ξ, D'après Lemmes 1 et 4, M est l'espace fibré principal de base M/ξ, de groupe structural R. η définit une connexion infinitésimale sur M, car η est invariante par α_t, $t \in R$. $d\eta$ étant horizontale et invatiante par α_t, M/ξ a la structure sympléctique W telle que $\pi^* W = d\eta$, π^* étant l'application duale de la projection $\pi: M \to M/\xi$.

Si ξ est le champ de vecteur de Killing, M/ξ est difféomorphe à R^{2n}, nous définissons la structure presque complexe F et métrique presque kählerienne h sur M/ξ de même méthode que [11]. Il vient

$$W(u, v) = h(u, Fv)$$

pour tous vecteurs u, v sur M/ξ.

De même de [11], il est aisé de voir que μ définit une homothétie γ sur M/ξ. La variété M étant complète M/ξ est complète encore par rapport à h. Ainsi M/ξ admettant γ est localement enclidienne, par suite globalement euclidienne. (voir, [3], [4]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. M. BOOTHBY AND H. C. WANG, On contact manifolds, Ann. of Math., 68(1958), 721–734.

[2] S. HELGASON, Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, 1962.

[3] S. KOBAYASHI, A theorem on the affine transformation group of a Riemannian manifold, Nagoya Math. Journ., 9(1955), 39-41.
[4] A. LICHNEROWICZ, Géométrie des groupes de transformations, Dunod, Paris, 1958.
[5] T. NAGANO, Sur les hypersurfaces et quelques groupes d'isométries d'un espace riemannien, Tôhoku Math. Journ., 10(1958), 242-252.
[6] R. S. PALAIS, A global formulation of the Lie theory of transformation groups, Mem. of Amer. Math. Soc., 22(1957).
[7] S. SASAKI, On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I, Tôhoku Math. Journ., 12(1960), 459-476.
[8] ——— AND Y. HATAKEYAMA, On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II, ibid., 13(1961), 281-294.
[9] S. TANNO, Some transformations on manifolds with almost contact and contact metric structures I, II, ibid., 15(1963), 140-147, 322-331.
[10] ———, On fiberings of some non-compact contact manifolds, ibid., 15(1963), 289-297.
[11] ———, A remark on transformations of a K-contact manifold, ibid., 16(1964), 173-175.

TÔHOKU UNIVERSITY.