Tôhoku Math J.
43 (1991), 301–326

ÜBER "PRIMZAHLSÄTZE" FÜR HYPERBOLISCHE KLASSEN UND DIE KONVERGENZABSZISSE DER LOGARITHMISCHEN ABLEITUNG EINER SELBERG'SCHEN ZETAFUNKTION FÜR ELLIPTISCHE MODULGRUPPEN

ULRICH CHRISTIAN

(Received May 7, 1990, revised October 29, 1990)

0. Einleitung. Um 1954 führte Selberg [36], [37] die berühmte Spurformel und im Zusammenhang damit die nach ihm benannte Zetafunktion ein. Genauso, wie man mit Hilfe der Riemannschen Zetafunktion den Primzahlsatz beweist, zeigt man mit Hilfe der Selbergschen Zetafunktion, dass ein "Primzahlsatz" auch für die Konjugiertenklassen primitiver hyperbolischer Elemente gilt. Diese Zusammenhänge wurden z. B. von Hejhal [13] sehr schön beschrieben.

In der vorliegenden Arbeit seien $\mathbf{M}(q)$ die Hauptkongruenzgruppe q-ter Stufe zur elliptischen Modulgruppe, $q \geqq 3$ und

$$\pi_0^+(q, x) = \{\text{Anzahl der primitiven hyperbolischen Klassen } \{P_0\} \text{ von } \mathbf{M}(q) \text{ mit } N(P_0) \leqq x \text{ und } \operatorname{Tr} P_0 > 2\},$$

$$\pi_0^-(q, x) = \{\text{Anzahl der primitiven hyperbolischen Klassen } \{P_0\} \text{ von } \mathbf{M}(q) \text{ mit } N(P_0) \leqq x \text{ und } \operatorname{Tr} P_0 < -2\}.$$

Dabei ist $N(P)$ die Norm eines hyperbolischen Elementes $P \in \mathbf{M}(q)$ und Tr die Spur einer Matrix.

Wir beweisen den "Primzahlsatz"

$$\pi_0^{\pm}(q, x) = \frac{1}{2} \operatorname{li} x + O(x^{3/4}(\log x)^{-1/2}) \qquad (x \to \infty).$$

Dabei bezeichnet li den Integrallogarithmus. Es gilt

$$\pi_0(q, x) = \pi_0^+(q, x) + \pi_0^-(q, x) = \{\text{Anzahl der primitiven hyperbolischen Klassen } \{P_0\} \text{ von } \mathbf{M}(q) \text{ mit } N(P_0) \leq x\}.$$

Für verschiedene Gruppen bewiesen bereits Hejhal [14], [15], Huber [24], Kuznetsov [27], [28], [29], Venkov [38], [39], Venkov-Vinigradov [40] die Abschätzung

$$\pi_0(q, x) = \operatorname{li} x + O(x^{3/4}(\log x)^{-1/2}) \qquad (x \to \infty),$$

während Iwaniec [26] für die volle elliptische Modulgruppe $SL(2, \boldsymbol{Z})$ ein verschärftes

Restglied fand.

Es seien $g \in \boldsymbol{Z}$ und $\phi(q, g, s)$ die Determinante der Scatteringmatrix von $\mathbf{M}(q)$, welche sich aus dem nullten Foerierkoeffizienten der Eisensteinreihen vom Gewicht g ableitet. Wie man entweder aus Christian [7] oder aus Fischer [12] oder aus Hejhal [14], [15] entnimmt, sind die Realteile der Pole von $\phi(q, g, \mathrm{s})$ beschränkt. Für $T \in \boldsymbol{R}$, $T > 0$ bezeichne $\tilde{\mathfrak{N}}(q, g, T)$ die Anzahl der Polstellen von $\phi(q, g, s)$, deren Imaginarteil zwischen 0 und T liegt. Wie man etwa aus Christian [4], [5], Fischer [12], Hejhal [14], [15], Hiramatsu [16] bis [23], Selberg [36], [37] oder Venkov [38], [39] entnimmt, besitzt der Laplaceoperator

$$\Delta_g = y^2(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2) - igy(\partial/\partial x)$$

in einem passenden Hilbertraum $\mathfrak{H}(q, g)$ ein diskretes Spektrum $\{\lambda_\nu\}$. Für $T \in \boldsymbol{R}$, $T > 0$ sei $\mathfrak{N}(q, g, T)$ die Anzahl der Eigenwerte λ_ν mit $0 < \sqrt{\lambda_\nu - 1/4} \leq T$. Aus Fischer [12] und Hejhal [14], [15] entnimmt man

$$\tilde{\mathfrak{N}}(q, g, T) = O(T^2)\,, \quad \mathfrak{N}(q, g, T) = O(T^2) \qquad (T \to \infty)\,.$$

Wie in Hejhal [14], Seite 95 ff beschrieben wird, benötigt man für ein möglichst scharfes Restglied im "Primzahlsatz," dass die Differenzen

$$\tilde{\mathfrak{N}}(q, g, T+a) - \tilde{\mathfrak{N}}(q, g, T) \quad \text{und} \quad \mathfrak{N}(q, g, T+a) - \mathfrak{N}(q, g, T)$$

mit einer Konstanten a eine geringere Grössenordnung als $O(T^2)$ besitzen. In sehr scharfsinniger Weise zeigt Hejhal [15], Seite 458, theorem 2.24, dass diese Differenzen die Grössenordnung $O(T)$ $(T \to \infty)$ besitzen. Eine elegantere Lösung ist es natürlich, explizitere Formeln für $\tilde{\mathfrak{N}}(q, g, T)$ und $\mathfrak{N}(q, g, T)$ zu finden. Hierfür hat man einmal die Weyl-Selberg Formel (siehe etwa Fischer [12], Seite 138, 3.3.13 theorem), welche $\mathfrak{N}(q, g, T)$ mit dem Integral

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-T}^{T} (\phi'/\phi)(q, g, (1/2) + it)dt$$

verknüpft.

Für die Hauptkongruenzgruppe $\mathbf{M}(q)$ haben Christian [7], Efrat [8], Huxley [25] die Determinante der Scatteringmatrix $\phi(q, g, s)$ berechnet, woraus sich

$$\tilde{\mathfrak{N}}(q, g, T) = (p(q)/\pi)T \log T + O(T) \qquad (T \to \infty)\,,$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-T}^{T} (\phi'/\phi)(q, g, (1/2) + it)dt = (p(q)/\pi)T \log T + O(T) \qquad (T \to \infty)$$

ergibt. Dabei ist $p(q)$ die Anzahl der $\mathbf{M}(q)$-inäquivalenten Spitzen eines Fundamentalbereiches von $\mathbf{M}(q)$. Mittels der Weyl-Selberg Formel ergibt sich daraus

$$\mathfrak{N}(q, g, T) - ((qp(q))/12)T^2 - ((2p(q)/\pi)T \log T + O(T) \qquad (T \to \infty)\,.$$

Mittels dieser Formeln kann man nun sehr genaue Abschätzungen durchführen.

Die folgenden Rechnungen haben Ähnlichkeit mit gewissen Untersuchungen in Hejhal [15], insbesondere chapter ten, 2 und 3. Bei Hejhal wird jedoch viel auf frühere Stellen verwiesen. Daher ziehen wir es vor, überwiegend wie bei Hejhal [14], Seiten 39–118 vorzugehen. Die logarithmische Ableitung einer anderen Selbergschen Zetafunktion ist

$$\zeta(q,g,s)=\sum_{\substack{\{P\}_{\mathbf{M}(q)}\\ |\operatorname{Tr}P|>2}}(\operatorname{sign}\operatorname{Tr}P)^g\frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2}-N(P)^{-1/2}}\left(2\cosh\frac{1}{2}\log N(P)\right)^{-2s}$$

($g=0, 1$). Dabei durchläuft $\{P\}_{\mathbf{M}(q)}$ die Konjugiertenklassen der hyperbolischen Elemente von $\mathbf{M}(q)$, weiter ist P_0 das zu P gehörige primitive Element und s eine komplexe Variable. Diese Funktion wurde zuerst von Hiramatsu [16] bis [23] eingeführt und dann auch von Christian [5] untersucht. Wegen Christian [5], Satz 3 haben $\zeta(q, 0, s)$ und $\zeta(q, 1, s)$ die Abszisse absoluter Konvergenz 1/2. Dieses ist auch die Konvergenzabszisse von $\zeta(q, 0, s)$, während die Konvergenzabszisse von $\zeta(q, 1, s)$ zwischen 0 und 1/2 liegt. In der vorliegenden Arbeit werden wir zeigen, daß $\zeta(q, 1, s)$ für $\operatorname{Re} s > 1/4$ konvergiert, falls man in der Reihenfolge aufsteigender Normen $N(P)$ summiert. Die Konvergenzabszisse von $\zeta(q, 1, s)$ liegt also zwischen 0 und 1/4.

Für Literaturhinweise danke ich T. Hiramatsu.

1. Grundlagen. Die Begriffe $\mathfrak{Z}(1)$, $N\langle z\rangle$, x_N, y_N, $N\{z\}$, $j_N(g, z)$, $d\omega_z$, $f_N(z)=(f|[N, g])(z)$, Δ_g, $\mathbf{M}(q)$, $\mathfrak{F}(q)$, $p(q)$, $\omega(\mathfrak{F}(q))$, $D(P)$, $\alpha(P)$, $N(P)$, P_0, $\psi(s)$, $\Phi(q, g, s)$, $\phi(q, g, s)$, $\phi_{\iota\kappa}(q, g, s)$, werden wie in Christian [5] erklärt; dabei können wir uns auf den Fall $g=0, 1$ beschränken, da die zu untersuchenden Funktionen nur von der Restklasse g mod 2 abhängen; $q\geq 3$.

Definition 1. Für $x>0$ bilden wir die folgenden Funktionen

$$\pi_0^+(q,x)=\sum_{\substack{\{P_0\}_{\mathbf{M}(q)}\\ N(P_0)\leq x\\ \operatorname{Tr}P_0>2}}1,\qquad \pi_0^-(q,x)=\sum_{\substack{\{P_0\}_{\mathbf{M}(q)}\\ N(P_0)\leq x\\ \operatorname{Tr}P_0<-2}}1,\tag{1}$$

$$\pi_{00}^+(q,x)=\sum_{\substack{\{P\}_{\mathbf{M}(q)}\\ N(P)\leq x\\ \operatorname{Tr}P>2}}1,\qquad \pi_{00}^-(q,x)=\sum_{\substack{\{P\}_{\mathbf{M}(q)}\\ N(P)\leq x\\ \operatorname{Tr}P<-2}}1,\tag{2}$$

wobei in (1) über die primitiven hyperbolischen Klassen, in (2) über alle hyperbolischen Klassen zu summieren ist. Weiter seien

$$\Psi_0^+(q,x)=\sum_{\substack{\{P\}_{\mathbf{M}(q)}\\ N(P)\leq x\\ \operatorname{Tr}P>2}}\frac{\log N(P_0)}{1-N(P)^{-1}},\tag{3}$$

$$\Psi_0^-(q, x) = \sum_{\substack{\{P\}_{\mathrm{M}(q)} \\ N(P) \leq x \\ \mathrm{Tr}\, P < -2}} \frac{\log N(P_0)}{1 - N(P)^{-1}}, \tag{4}$$

$$\Psi_0(q, g, x) = \sum_{\substack{\{P\}_{\mathrm{M}(q)} \\ N(P) \leq x}} (\operatorname{sign} \mathrm{Tr}\, P)^g \frac{\log N(P_0)}{1 - N(P)^{-1}}. \tag{5}$$

Schließlich seien

$$\Psi_1^{\pm}(q, x) = \int_1^x \Psi_0^{\pm}(q, t)\, dt, \tag{6}$$

$$\Psi_1(q, g, x) = \int_1^x \Psi_0(q, g, t)\, dt. \tag{7}$$

Offenbar gilt

$$\Psi_{\substack{0\\1}}(q, 0, x) = \Psi_{\substack{0\\1}}^+(q, x) + \Psi_{\substack{0\\1}}^-(q, x), \qquad \Psi_{\substack{0\\1}}(q, 1, x) = \Psi_{\substack{0\\1}}^+(q, x) - \Psi_{\substack{0\\1}}^-(q, x), \tag{8}$$

$$\Psi_{\substack{0\\1}}^{\pm}(q, x) = \frac{1}{2}\left(\Psi_{\substack{0\\1}}(q, 0, x) \pm \Psi_{\substack{0\\1}}(q, 1, x)\right). \tag{9}$$

Alle weiteren Untersuchungen dienen dazu, aus (11) asymptotische Formeln für $\Psi_1(q, g, x)$ und $\Psi_0(q, g, x)$ abzuleiten. Man bilde die Reihe

$$(\Xi_{\mathrm{hyp}}'/\Xi_{\mathrm{hyp}})(q, g, s) = \sum_{\substack{\{P\}_{\mathrm{M}(q)} \\ |\mathrm{Tr}\, P| > 2}} (\operatorname{sign} \mathrm{Tr}\, P)^g \frac{\log N(P_0)}{1 - N(P)^{-1}} N(P)^{-(1/2)-s}, \tag{10}$$

welche nach Christian [5], Seite 516, Hilfssatz 9 für $\mathrm{Re}\, s > 1/2$ absolut konvergiert.

Nach Ayoub [3], Seite 55, Theorem 3.4 ($1/2\pi i$ wurde dort vergessen) folgt mit $s + (1/2)$ statt s

$$\Psi_1(q, g, x) = (1/2\pi i) \int_{(1/2)+\varepsilon - i\infty}^{(1/2)+\varepsilon + i\infty} (\Xi_{\mathrm{hyp}}'/\Xi_{\mathrm{hyp}})(q, g, s) \frac{x^{s+(3/2)}}{(s + (1/2))(s + (3/2))} ds; \tag{11}$$

dabei werde $\varepsilon > 0$ weiterhin festgehalten.

HILFSSATZ 1. *Die Funktion $\phi(q, g, (1/2) + s)$ ist in $\boldsymbol{C}$ meromorph. Sie besitzt folgende Eigenschaften*:

$$\phi(q, g, (1/2) + s)\phi(q, g, (1/2) - s) = 1, \tag{12}$$

$$(\phi'/\phi)(q, g, (1/2) + s) = (\phi'/\phi)(q, g, (1/2) - s), \tag{13}$$

$$\phi(q, g, (1/2) + \bar{s}) = \overline{\phi(q, g, (1/2) + s)}. \tag{14}$$

Es gibt ein

(15) $$c_0 \in N, \qquad c_0 \geq 6$$

mit folgenden Eigenschaften:
Alle Null- und Polstellen von $\phi(q, g, (1/2)+s)$ liegen in dem Streifen

(16) $$|\sigma| < (c_0/2)-1 \qquad (s=\sigma+it),$$

und es gilt

(17) $$(\phi'/\phi)(q, g, (1/2)+s) = O(1) \qquad (|s| \to \infty;\ |\sigma| \geq (c_0/2)-1).$$

Die Null- und Polstellen von $\phi(q, g, (1/2)+s)$ verteilen sich wie folgt: Es gibt reelle Zahlen $\alpha(q, g, m)$ $(m=1, \ldots, M(q, g))$, $\beta(q, g, n)$ $(n=1, 2, ,3, \ldots)$, $\gamma(q, g, n)$ $(n=N(q, g)+1, N(q, g)+2, \ldots)$ mit

(18) $$0 < \alpha(q, g, m) \leq 1/2 < (c_0/2)-1 \qquad (m=1, \ldots, M(q, g)),$$

(19) $$0 < \beta(q, g, n) < (c_0/2)-1 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

(20) $$0 < \gamma(q, g, n) \qquad (n=N(q, g)+1, N(q, g)+2, \ldots),$$

so daß folgendes gilt: Die Nullstellen von $\phi(q, g, s)$ liegen bei

(21) $$-\alpha(q, g, m) \qquad (m=1, \ldots, M(q, g)),$$

(22) $$\beta(q, g, n) \qquad (n=1, \ldots, N(q, g)),$$

(23) $$\beta(q, g, n) \pm i\gamma(q, g, n) \qquad (n=N(q, g)+1, N(q, g)+2, \ldots);$$

die Polstellen von $\phi(q, g, s)$ liegen bei

(24) $$\alpha(q, g, m) \qquad (m=1, \ldots, M(q, g)),$$

(25) $$-\beta(q, g, n) \qquad (n=1, \ldots, N(q, g)),$$

(26) $$-\beta(q, g, n) \pm i\gamma(q, g, n) \qquad (n=N(q, g)+1, N(q, g)+2, \ldots).$$

Mit einer passenden natürlichen Zahl n_0 gilt eine Produktdarstellung

(27) $$\phi(q, g, (1/2)+s)$$
$$= n_0^{-s}\phi(q, g, 1/2) \cdot \prod_{m=1}^{M(q,g)} \frac{-s-\alpha(q, g, m)}{s-\alpha(q, g, m)} \cdot \prod_{n=1}^{N(q,g)} \frac{s-\beta(q, g, n)}{-s-\beta(q, g, n)} \cdot$$
$$\prod_{n \geq N(q,g)+1} \frac{(s-\beta(q, g, n)-i\gamma(q, g, n))(s-\beta(q, g, n)+i\gamma(q, g, n))}{(-s-\beta(q, g, n)-i\gamma(q, g, n))(-s-\beta(q, g, n)+i\gamma(q, g, n))}$$

und eine Summendarstellung

(28) $(\phi'/\phi)(q, g, (1/2)+s)$

$$= -\log n_0 - \sum_{m=1}^{M(q,g)} \frac{2\alpha(q,g,m)}{s^2-\alpha^2(q,g,m)} + \sum_{n=1}^{N(q,g)} \frac{2\beta(q,g,n)}{s^2-\beta^2(q,g,n)}$$

$$+ \sum_{n \geq N(q,g)+1} \left(\frac{2\beta(q,g,n)}{(s+i\gamma(q,g,n))^2-\beta^2(q,g,n)} + \frac{2\beta(q,g,n)}{(s-i\gamma(q,g,n))^2-\beta^2(q,g,n)} \right).$$

Auf der Geraden $\sigma=0$ besitzt $\phi(q, g, (1/2)+s)$ keine Null- und Polstellen. Es seien $T \in \boldsymbol{R}$, $T>0$ und $\mathfrak{N}(q, g, T)$ die Anzahl der $\gamma(q, g, n)$ mit $0<\gamma(q, g, n) \leq T$. Dann gilt

$$\mathfrak{N}(q, g, T) = (p(q)/\pi) T \log T + O(T) \qquad (T \to \infty), \tag{29}$$

und

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-T}^{T} (\phi'/\phi)(q, g, (1/2)+it)dt = (p(q)/\pi) T \log T + O(T) \qquad (T \to \infty). \tag{30}$$

BEWEIS. Alles bis auf die Aussagen (17), (29), (30) folgt aus Fischer [12] Seite 34, insbesondere (1.5.6), (1.5.7) und Seiten 96, 97 insbesondere 2.4.15 Notation, 2.4.16 Lemma, 2.4.17 Corollary, sowie aus Christian [7].

Man bilde das Polynom

$$V(q, g, s) = \prod_{m=1}^{M(q,g)} (s-\alpha(q, g, m)). \tag{31}$$

Dann ist

$$V(q, g, s) = O(|s|^{M(q,g)}), \qquad V^{-1}(q, g, s) = O(|s|^{-M(q,g)}) \qquad (|s| \to \infty), \tag{32}$$

$$(V'/V)(q, g, s) = O(|s|^{-1}) \qquad (|s| \to \infty). \tag{33}$$

HILFSSATZ 2. *Das Weierstraßprodukt*

$$U(q, g, s) = \prod_{n=1}^{N(q,g)} \left\{ \left(1 - \frac{s}{\beta(q,g,n)}\right) \exp\left(\frac{s}{\beta(q,g,n)}\right) \right\} \cdot \tag{34}$$

$$\prod_{n \geq N(q,g)+1} \left\{ \left(1 - \frac{s}{\beta(q,g,n)+i\gamma(q,g,n)}\right) \exp\left(\frac{s}{\beta(q,g,n)+i\gamma(q,g,n)}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \left(1 - \frac{s}{\beta(q,g,n)-i\gamma(q,g,n)}\right) \exp\left(\frac{s}{\beta(q,g,n)-i\gamma(q,g,n)}\right) \right\}$$

ist eine ganze Funktion in s. Die Nullstellen liegen genau bei $\beta(q, g, n)$ $(n=1, \ldots, N(q, g))$ und $\beta(q, g, n) \pm i\gamma(q, g, n)$ $(n \geq N(q, g)+1)$.

BEWEIS. Die durch Logarithmieren entstehende Summe konvergiert wegen (29).

ANMERKUNG. Die Funktion $U(q, g, s)$ entspricht dem $P(s)$ aus Fischer [12], Seite 118, 3.2.2 Definition. Wegen (29) kommen wir jedoch mit konvergenzerzeugenden Faktoren erster Ordnung aus. Fischer kann nur $\mathfrak{N}(q, g, T) = O(T^2)$ benutzen. Daher benötigt er konvergenzerzeugende Faktoren zweiter Ordnung.

Aus (34) folgt

$$(35)\qquad (U'/U)(q, g, s) = \sum_{n=1}^{N(q,g)} \left(\frac{1}{s - \beta(q, g, n)} + \frac{1}{\beta(q, g, n)} \right) + \sum_{n \geq N(q,g)+1} \left(\frac{1}{s - \beta(q, g, n) - i\gamma(q, g, n)} + \frac{1}{\beta(q, g, n) + i\gamma(q, g, n)} + \frac{1}{s - \beta(q, g, n) + i\gamma(q, g, n)} + \frac{1}{\beta(q, g, n) - i\gamma(q, g, n)} \right).$$

Die Kombination von (28), (31), (35) liefert

$$(36)\qquad (\phi'/\phi)(q, g, (1/2)+s) = k_1 + (U'/U)(q, g, s) + (U'/U)(q, g, -s) - (V'/V)(q, g, s) - (V'/V)(q, g, -s),$$

mit einer Konstanten k_1. Daraus folgt

$$(37)\qquad \phi(q, g, (1/2)+s) = e^{k_1 s + k_2} \frac{U(q, g, s)V(q, g, -s)}{U(q, g, -s)V(q, g, s)}$$

mit einer weiteren Konstanten k_2.

Aus (19), (34), (35) folgt

$$(38)\qquad \overline{U(q, g, s)} = U(q, g, \bar{s}), \qquad \overline{(U'/U)(q, g, s)} = (U'/U)(q, g, \bar{s}),$$

$$(39)\qquad |(U'/U)(q, g, s)| \geq |(U'/U)(q, g, -s)| \qquad (\sigma \geq 0).$$

HILFSSATZ 3. *Es gilt*

$$(40)\qquad |(U'/U)(q, g, s)| = O(1) \qquad (|s| \to \infty;\ |\sigma| \geq (c_0/2) - 1).$$

BEWEIS. Man benutze (17), (33), (36), (39).

HILFSSATZ 4. *Es seien* $|\sigma| \leq c_0$, $T \geq 1000$,

$$(41)\qquad W(T, |\sigma|) = \sum_{T-1 \leq \gamma(q,g,n) \leq T+1} \frac{1}{\sqrt{(|\sigma| - \beta(q, g, n))^2 + (T - \gamma(q, g, n))^2}}.$$

Dann ist

$$(42)\qquad |(U'/U)(q, g, \sigma + iT)| = O(W(T, |\sigma|) + T \log T) \qquad (T \to \infty).$$

BEWEIS. Aus (35) folgt

$$|(U'/U)(q,g,\sigma+iT)|\le U_1^*+U_2^*+U_3^*+U_4^*+U_5^*+O(T^{-1}), \tag{43}$$

$$U_1^*=\sum_{1\le\gamma(q,g,n)\le\sqrt{T}}\chi(n,T,\sigma), \qquad U_2^*=\sum_{\sqrt{T}<\gamma(q,g,n)<T-1}\chi(n,T,\sigma), \tag{44}$$

$$U_3^*=\sum_{T-1\le\gamma(q,g,n)\le T+1}\chi(n,T,\sigma), \qquad U_4^*=\sum_{T+1<\gamma(q,g,n)<2T}\chi(n,T,\sigma), \tag{45}$$

$$U_5^*=\sum_{2T\le\gamma(q,g,n)}\chi(n,T,\sigma) \tag{46}$$

mit

$$\begin{aligned}\chi(n,T,\sigma)=\Bigg|&\frac{1}{\sigma-\beta(q,g,n)+i(T-\gamma(q,g,n))}+\frac{1}{\beta(q,g,n)+i\gamma(q,g,n)}\\&+\frac{1}{\sigma-\beta(q,g,n)+i(T+\gamma(q,g,n))}+\frac{1}{\beta(q,g,n)-i\gamma(q,g,n)}\Bigg|.\end{aligned} \tag{47}$$

Indem man alles auf den Hauptnenner bringt, folgt

$$\chi(n,T,\sigma)=O\left(\frac{T(T+\gamma^2(q,g,n))}{|T-\gamma(q,g,n)|\,|T+\gamma(q,g,n)|\,\gamma^2(q,g,n)}\right). \tag{48}$$

Wie es etwa auf den ersten 60 Seiten von Hejhal [14] mehrmals beschrieben wird, verwandelt man die Summen U_k^* $(k=1,2,\ldots,5)$ in ein Stieltjes'schen Integral und schätzt dieses mittels (29) ab. Dann erhält man die Behauptung. Der Term $W(T,|\sigma|)$ kommt durch U_3^* hinein. Hilfssatz 4 ist bewiesen. Die Begriffe $\mathfrak{H}(q,g,s)$, $\tilde{\Delta}_g$, $\tau(q,g)$, $\rho(q,g)$, $\lambda_\nu(q,g)$ $(\nu=-\tau(q,g),1-\tau(q,g),\ldots)$, $\mu_\nu(q,g)$, $r_\nu(q,g)$ $(\nu=1,2,\ldots)$, $a_\nu(q,g)$ $(\nu=-\tau(q,g),\ldots,-1)$ werden wie in Christian [5] erklärt.

Es sei $T>0$ und

$$\mathfrak{N}(q,g,T)=\sum_{0<r_\nu(q,g)\le T}\mu_\nu(q,g). \tag{49}$$

Dann gilt nach Christian [7], (214)

$$\mathfrak{N}(q,g,T)=((qp(q))/12)T^2-((2p(q)/\pi)T\log T+O(T) \qquad (T\to\infty). \tag{50}$$

DEFINITION 2. Es seien

$$e(q,g,\nu)=-d(q,g,\nu)+ib(q,g,\nu) \qquad (\nu=1,2,3,\ldots) \tag{51}$$

die Gesamtheit der Zahlen $ir_\nu(q,g)$ $(\nu\in N)-\beta(q,g,n)$ $(n=1,\ldots,N(q,g))$ und $-\beta(q,g,n)+i\gamma(q,g,n)$ $(n\ge N(q,g)+1)$, so angeordnet, daß

$$0\le b(q,g,1)\le b(q,g,2)\le b(q,g,3)\le\ldots \tag{52}$$

gilt. Es sei $h(q, g, v)$ die "Vielfachheit" von $e(q, g, v)$, d.h., $h(q, g, v) = \mu_{v^*}(q, g)$ für $e(q, g, v) = ir_{v^*}(q, g)$ und $h(q, g, v)$ die Polstellenordnung von $\phi(q, g, s)$ im Punkte $e(q, g, v) = -\beta(q, g, n) + i\gamma(q, g, n)$. Für $T > 0$ sei

$$\mathfrak{M}(q, g, T) = \sum_{0 < b(q, g, v) \leq T} h(q, g, v) . \tag{53}$$

Aus (19) und Definition 2 folgt

$$0 \leq d(q, g, v) \leq (c_0/2) - 1 \qquad (v \in \boldsymbol{N}) . \tag{54}$$

Weiterhin ist

$$\mathfrak{M}(q, g, T) = \mathfrak{N}(q, g, T) + \tilde{\mathfrak{N}}(q, g, T) . \tag{55}$$

Aus (29), (50) oder Christian [7], (215) folgt

$$\mathfrak{M}(q, g, T) = (qp(q)/12)T^2 - (p(q)/\pi)T \log T + O(T) \qquad (T \to \infty) . \tag{56}$$

Wir übertragen jetzt eine Methode aus Hejhal [14], Seiten 77, 78, welche auch bei Hejhal [15] beschrieben wird.

DEFINITION 3. Für $m \in \boldsymbol{N}$, $m > 2$ sei

$$A(m) = \sum_{m-2 < b(q, g, v) \leq m+2} h(q, g, v) . \tag{57}$$

m heißt "gut," wenn $0 \leq A(m) \leq qp(q)m$ ist. Ein großes positives $T \in \boldsymbol{R}$ heißt "zulässig" genau dann, wenn $m = [T]$ gut ist, und wenn

$$|b(q, g, v) - T| \geq \frac{1}{10(1 + A(m))} \tag{58}$$

für alle $b(q, g, v)$ gilt.

HILFSSATZ 5. *Es sei $\delta > 0$ und L genügend groß. Dann gibt es im Intervall $[L, L(1+\delta)]$ zulässige Werte T.*

BEWEIS. Hejhal [14], Seite 78, Proposition 4.22.

HILFSSATZ 6. *Es seien $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a < b$, $a \leq \sigma \leq b$, $T \geq 1000$, T zulässig. Dann gilt*

$$(U'/U)(q, g, \sigma \pm iT) = O(T^2) \qquad (T \to \infty) , \tag{59}$$

$$(\phi'/\phi)\left(q, g, \frac{1}{2} + \sigma \pm iT\right) = O(T^2) \qquad (T \to \infty) , \tag{60}$$

$$\int_a^b |(U'/U)(q, g, \sigma \pm iT)| \, d\sigma = O(T \log T) \qquad (T \to \infty) , \tag{61}$$

$$\int_a^b \left|(\phi'/\phi)\left(q, g, \frac{1}{2}+\sigma \pm iT\right)\right| d\sigma = O(T \log T) \qquad (T \to \infty) . \tag{62}$$

BEWEIS. Man benutze die bei Hejhal [14], [15] beschriebenen Methoden.

2. Selberg'sche Zetafunktionen. Wir gehen aus von Christian [5], §2, wobei wir aber $s-(1/2)$ durch s ersetzen. Aus Christian [5], Seite 519, (126), (127) folgt

$$\Xi(q, g, s) = \Xi_I(q, g, s)\Xi_{\mathrm{hyp}}(q, g, s)\Xi_{\mathrm{par}}(q, g, s) , \tag{63}$$

also

$$(\Xi'/\Xi)(q, g, s) = (\Xi_I'/\Xi_I)(q, g, s) + (\Xi_{\mathrm{hyp}}'/\Xi_{\mathrm{hyp}})(q, g, s) + (\Xi_{\mathrm{par}}'/\Xi_{\mathrm{par}})(q, g, s) . \tag{64}$$

Der elliptische Anteil entfällt wegen (5).

SATZ 1. *$\Xi(q, g, s)$ ist eine ganze Funktion von s. Sie hat folgende Nullstellen:*

$g=0$

(a) *Bei $s=\pm 1/2$ der Ordnung* 1,

(b) *Bei $s=\pm a_\nu(q, 0)$ der Ordnung $\mu_\nu(q, 0)$* $(\nu=-\rho(q, 0), \ldots, -1)$,

(c) *Bei $s=0$ der Ordnung $2\mu_0(q, 0)$*,

(d) *Bei $s=\pm ir_\nu(q, 0)$ der Ordnung $\mu_\nu(q, 0)$* $(\nu \in \boldsymbol{N})$,

$g=1$

(e) *Bei $s=0$ der Ordnung $2\mu_0(q, 1)=2\eta(q, 1)$*,

(f) *Bei $s=\pm ir_\nu(q, 1)$ der Ordnung $\mu_\nu(q, 1)$* $(\nu \in \boldsymbol{N})$.

Es gilt

$$\begin{aligned} &(1/2s)(\Xi'/\Xi)(q, 0, s)-(1/2)(\Xi'/\Xi)(q, 0, 1) \\ &\quad = (s^2-(1/4))^{-1}-(4/3)+\sum_{\nu=-\rho(q,0)}^{-1} \mu_\nu(q, 0)\left(\frac{1}{s^2-a_\nu^2(q, 0)}-\frac{1}{1-a_\nu^2(q, 0)}\right) \\ &\quad + \mu_0(q, 0)(s^{-2}-1)+\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_\nu(q, 0)\left(\frac{1}{s^2+r_\nu^2(q, 0)}-\frac{1}{1+r_\nu^2(q, 0)}\right) \\ &\qquad (g=0) , \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} &(1/2s)(\Xi'/\Xi)(q, 1, s)-(1/2)(\Xi'/\Xi)(q, 1, 1) \\ &\quad = \eta(q, 1)(s^{-2}-1)+\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_\nu(q, 0)\left(\frac{1}{s^2+r_\nu^2(q, 1)}-\frac{1}{1+r_\nu^2(q, 1)}\right) \qquad (g=1) , \end{aligned} \tag{66}$$

$$(\Xi'/\Xi)(q, g, s) = -(\Xi'/\Xi)(q, g, -s) , \tag{67}$$

$$\Xi(q, g, s) = \Xi(q, g, -s) , \tag{68}$$

$$\eta(q, 1) = (1/2)\operatorname*{Res}_{s=0}(\Xi'/\Xi)(q, 1, s) . \tag{69}$$

BEWEIS. Satz 1, Fischer [12], Seite 116, (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3). (69) folgt aus (66).

HIFSSATZ 7. *Es gilt*

$$(\Xi_I'/\Xi_I)(q,g,s) = -(qp(q)/3)s\psi(s+(1-g)/2) - (qp(q)/6)g\,. \tag{70}$$

BEWEIS. Christian [5], Seite 516, (107) und $\psi(s+1) = (1/s) + \psi(s)$.

HILFSSATZ 8. *Für* $\operatorname{Re} s > 1/2$ *ist*

$$\Xi_{\mathrm{hyp}}(q,g,s) = \prod_{\substack{\{P_0\}_{M(q)}\\ |\operatorname{Tr} P_0|>2}} \prod_{m=0}^{\infty} (1 - (\operatorname{sign} \operatorname{Tr} P_0)^g N(P_0)^{-(1/2)-s-m})\,, \tag{71}$$

$$(\Xi_{\mathrm{hyp}}'/\Xi_{\mathrm{hyp}})(q,g,s) = \sum_{\substack{\{P\}_{M(q)}\\ |\operatorname{Tr} P|>2}} (\operatorname{sign} \operatorname{Tr} P)^g \frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2} - N(P)^{-1/2}} N(P)^{-s}\,. \tag{72}$$

BEWEIS. Christian [5], Seite 516, Hilfssatz 9.

HILFSSATZ 9. *Es sei* $\beta(q,g)$ *durch Christian* [5], *Seite 509*, (49) *erklärt. Dann gilt*

$$\begin{aligned}(\Xi_{\mathrm{par}}'/\Xi_{\mathrm{par}})(q,g,s) &= -p(q)\log 2 - p(q)\psi(s+1-(g/2)) + (2\beta(q,g))/s \\ &\quad -(1/2)\log n_0 + (s/4)\log n_0 + \sum_{m=1}^{M(q,g)} \left(\frac{1}{s+\alpha(q,g,m)} - \frac{2s}{(1/2)+\alpha(q,g,m)}\right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{N(q,g)} \left(\frac{1}{s+\beta(q,g,m)} - \frac{2s}{(1/2)+\beta(q,g,m)}\right) \\ &\quad - \sum_{n \geq N(q,g)+1} \left(\frac{1}{s+\beta(q,g,n)+i\gamma(q,g,n)} + \frac{1}{s+\beta(q,g,n)-i\gamma(q,g,n)}\right. \\ &\quad \left. - \frac{2s}{(1/2)+\beta(q,g,n)+i\gamma(q,g,n)} - \frac{2s}{(1/2)+\beta(q,g,n)-i\gamma(q,g,n)}\right).\end{aligned} \tag{73}$$

BEWEIS. Aus Christian [5], Seite 508, Hilfssatz 3, Seite 509, (49) und Seite 519, (123) folgt wegen $\psi(x) = \psi(x+1) - (1/x)$ und $s \to s + (1/2)$

$$\begin{aligned}(\Xi_{\mathrm{par}}'/\Xi_{\mathrm{par}})(q,g,s) &= -p(q)\log 2 + p(q)\psi(s+(1+g)/2) \\ &\quad - p(q)(\psi(s+(1/2)) + \psi(s+1)) + (2\beta(q,g)/s) \\ &\quad + (s/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} ((s^2+t^2)^{-1} - ((1/4)+t^2)^{-1})(\phi'/\phi)(q,g,(1/2)+it)\,dt\,.\end{aligned} \tag{74}$$

Es gilt für $\alpha \in \boldsymbol{C}$

$$((t^2+\alpha^2)(t^2+s^2))^{-1} = (s^2-\alpha^2)^{-1}((t^2+\alpha^2)^{-1} - (t^2+s^2)^{-1})\,.$$

Beachtet man, daß die Integration von $(t^2+\alpha^2)^{-1}$ auf den arc tg führt, so kann man das in (74) auftretende Integral mittels (28) berechnen. Dann folgt (73). Hilfssatz 9 ist bewiesen.

HILFSSATZ 10. *Es gilt*

$$(\Xi'_{\mathrm{par}}/\Xi_{\mathrm{par}})(q,g,s)=k_3+k_4s-p(q)\psi(s+1-(g/2))+(2\beta(q,g)/s) \\ -(V'/V)(q,g,-s)+(U'/U)(q,g,-s) \tag{75}$$

mit gewissen Konstanten k_3, k_4.

BEWEIS. Man benutze (29), (31), (35), Hilfssatz 9.

SATZ 2. *Der Ausdruck*

$$Z(q,g,s)=\Xi_{\mathrm{hyp}}(q,g,s)s^{2\beta(q,g)}\Gamma(s+1-(g/2))^{-p(q)}V(q,g,-s) \tag{76}$$

ist eine ganze Funktion in s. Dabei ist $\beta(q,g)$ *durch Christian* [5], *Seite* 509, (49) *erklärt. Die Nullstellen von* $Z(q,g,s)$ *liegen*:

$g=0$
(a) *Bei* $s=\pm 1/2$ *der Ordnung* 1,
(b) *Bei* $s=\pm a_\nu(q,0)$ *der Ordnung* $\mu_\nu(q,0)$ $(\nu=-\rho(q,0),\dots,-1)$,
(c) *Bei* $s=0$ *der Ordnung* $2\mu_0(q,0)$
(d) *Bei* $s=e(q,0,\nu)$, $\overline{e(q,0,\nu)}$ *der Ordnung* $h(q,0,\nu)$ $(\nu=1,2,3,\dots)$,
(e) *Bei* $s=-(\nu+(1/2))$ *der Ordnung* $(qp(q)/3)(\nu+(1/2))$ $(\nu\in 0\cup \boldsymbol{N})$.

$g=1$
(f) *Bei* $s=0$ *der Ordnung* $2\eta(q,1)$,
(g) *Bei* $s=e(q,1,\nu)$, $\overline{e(q,1,\nu)}$ *der Ordnung* $h(q,1,\nu)$ $(\nu=1,2,3,\dots)$,
(h) *Bei* $s=-\nu$ *der Ordnung* $(qp(q)/3)\nu$ $(\nu\in\boldsymbol{N})$.

Es gelten die Darstellungen

$$\mathbf{Z}(q,g,s)=\Xi(q,g,s)\Xi_I^{-1}(q,g,s)\Xi_{\mathrm{par}}^{-1}(q,g,s) \\ \times s^{2\beta(q,g)}\Gamma(s+1-(g/2))^{-p(q)}V(q,g,-s)\,, \tag{77}$$

$$(Z'/Z)(q,g,s)=(\Xi'/\Xi)(q,g,s)+D(q,g,s) \tag{78}$$

mit

$$D(q,g,s)=(qp(q)/3)s\psi(s+(1-g)/2)+(gqp(q)/6)-k_3-k_4s-(U'/U)(q,g,-s)\,. \tag{79}$$

Weiter ist

$$(Z'/Z)(q,g,s)=F(q,g,s)+2s\Omega(q,g,s)+(qp(q)/3)s\psi(s+(g-1)/2) \tag{80}$$

mit

(81) $$F(q,0,s)=2s(s^2-(1/4))^{-1}+2s\sum_{\nu=-\rho(q,0)}^{-1}\mu_\nu(q,0)((s^2-a_\nu^2(q,0))^{-1}-(1-a_\nu^2(q,0))^{-1})$$
$$+2\mu_0(q,0)/s+\sum_{n=1}^{N(q,0)}(s+\beta(q,0,n))^{-1}+k_5s+k_6\,.$$

(82) $$F(q,1,s)=2\eta(q,1)/s+\sum_{n=1}^{N(q,1)}(s+\beta(q,1,n))^{-1}+k_5s+k_6\,.$$

Dabei sind k_5, k_6 Konstanten. Schließlich ist

(83) $$\Omega(q,g,s)=\sum_{\nu\geq N(q,g)+1}h(q,g,\nu)\left(\frac{s+d(q,g,\nu)}{s((s+d(q,g,\nu))^2+b^2(q,g,\nu))}\right.$$
$$\left.-\frac{1+d(q,g,\nu)}{(1+d(q,g,\nu))^2+b^2(q,g,\nu)}\right).$$

Es gilt $\eta(q,1)=(1/2)\operatorname{Res}_{s=0}(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,1,s)$. Weiter bestent die Funktionalgleichung

(84) $$(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,s)=-(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,-s)+B(q,g,s)$$

mit

(85) $$B(q,g,s)=D(q,g,s)+D(q,g,-s)\,,$$

also

(86) $$B(q,g,-s)=B(q,g,s)\,.$$

BEWEIS. Klar, wegen der vorher bewiesenen Resultate.

Aus (77) folgt

(87) $$(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,s)=(\Xi'_{\text{hyp}}/\Xi_{\text{hyp}})(q,g,s)+2\beta(q,g)/s$$
$$-p(q)\psi(s+1-(g/2))-(V'/V)(q,g,-s)\,.$$

HILFSSATZ 11. *Es seien $\varepsilon>0$ und $\sigma\geq(1/2)+\varepsilon$. Dann ist*

(88) $$(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,s)=-p(q)\log s+h(\varepsilon,s)\,,$$

mit

(89) $$|h(\varepsilon,s)|\leq(1/\varepsilon)+O(1)\qquad(|s|\to\infty)\,,$$

wobei die in O steckenden Konstanten nicht von ε abhängen.

BEWEIS. Aus (33), (87), Christian [5], (102) folgt die Darstellung (88) mit $h(\varepsilon,s)=(\Xi'_{\text{hyp}}/\Xi_{\text{hyp}})(q,g,s)+O(1)$. Wegen Hilfssatz 8 ist

$$|(\Xi'_{\text{hyp}}/\Xi_{\text{hyp}})(q,g,s)|\leq(\Xi'_{\text{hyp}}/\Xi_{\text{hyp}})(q,0,(1/2)+\varepsilon)=(1/\varepsilon)+O(1)\,,$$

da $(\Xi'_{\mathrm{hyp}}/\Xi_{\mathrm{hyp}})(q, 0, (1/2)+\varepsilon)$ bei $\varepsilon=0$ einen Pol erster Ordnung vom Residuum 1 besitzt. Hilfssatz 11 ist bewiesen.

HILFSSATZ 12. *Es gilt*

$$B(q, g, s)=(qp(q)/3)s\pi \operatorname{tg} \pi(s+(g/2))-(\phi'/\phi)(q, g, (1/2)+s) \\ -((V'/V)(q, g, s)+(V'/V)(q, g, -s))+k_7 \tag{90}$$

mit einer Konstanten k_7.

BEWEIS. (36), (79), (85), Nielsen [33], Seite 15, (7).

Wegen (14), (79) gilt

$$\overline{B(q, g, s)}=B(q, g, \bar{s}) . \tag{91}$$

HILFSSATZ 13. *Es seien* $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a<b$, $a \leq \sigma \leq b$, $T \geq 1000$, T *zulässig. Dann gilt*

$$B(q, g, \sigma \pm iT)=O(T^2) \qquad (T \to \infty) , \tag{92}$$

$$\int_a^b |B(q, g, \sigma \pm iT))| \, d\sigma=O(T \log T) \qquad (T \to \infty) . \tag{93}$$

BEWEIS. Es gilt $\operatorname{tg} \pi(\sigma+(g/2) \pm iT)=O(1)$ $(T \to \infty)$. Aus (33), Hilfssatz 6, Hilfssatz 12, folgt daher die Behauptung.

HILFSSATZ 14. *Es seien* $a, b, c, x \in \boldsymbol{R}$, $a<b$, $x>1000$, $|c| \geq (c_0/2)-1$, $c+(g/2) \in \boldsymbol{Z}$. *Dann ist*

$$\int_{c+ia}^{c+ib} \frac{x^{s+(3/2)}}{(s+(1/2))(s+(3/2))} B(q, g, s) ds=O(x^{(3/2)+c}) \qquad (x \to \infty) \tag{94}$$

Die in O steckenden Konstanten hängen nicht von a, b, c ab.

BEWEIS. $c+(g/2) \in \boldsymbol{Z}$ bewirkt

$$\operatorname{tg} \pi(s+(g/2))=O(1) \tag{95}$$

auf der Geraden $\operatorname{Re} s=c$. Aus (17), (33), (90), (91) erhält man

$$B(q, g, s)=(qp(q)/3)\pi(s+(1/2)) \operatorname{tg} \pi(s+(g/2))+O(1) . \tag{96}$$

Aus (96) folgt

$$\left|\int_{c+ia}^{c+ib} \frac{x^{s+(3/2)}}{(s+(1/2))(s+(3/2))} B(q, g, s) ds\right| \\ =(qp(q)/3)\pi J_1(x)+O\left(x^{(3/2)+c} \int_a^b |c+(1/2)+it|^{-1} \, |c+(3/2)+it|^{-1} dt\right) . \tag{97}$$

Dabei ist

$$J_1(x)=\left|\int_{c+ia}^{c+ib}\frac{x^{s+(3/2)}}{(s+(3/2))}\operatorname{tg}\pi(s+(g/2))ds\right|. \tag{98}$$

Nach unseren früher gemachten Voraussetzungen ist $|c|\geq 2$. Also

$$\int_a^b |c+(1/2)+it|^{-1}\,|c+(3/2)+it|^{-1}dt\leq\int_{-\infty}^{\infty}((1/4)+t^2)^{-1}dt<\infty. \tag{99}$$

Aus (97), (99) folgt

$$\left|\int_{c+ia}^{c+ib}\frac{x^{s+(3/2)}}{(s+(1/2))(s+(3/2))}B(q,g,s)ds\right|=(qp(q)/3)\pi J_1(x)+O(x^{(3/2)+c}) \tag{100}$$
$$(x\to\infty),$$

wobei die in O eingehenden Konstanten von a, b, c nicht abhängen.

Es bleibt zu zeigen

$$J(x)=O(x^{(3/2)+c}), \tag{101}$$

wobei die in O steckenden Konstanten nicht von a, b, c abhängen. Indem man den Integrationsweg zerlegt, erkennt man, daß es genügt, die Fälle $a<b\leq -1$, $-1\leq a<b\leq 1$, $1\leq a<b$ zu betrachten. Durch die Substitution $t\to -t$ und Übergang zum konjugiert-Komplexen führt man den Fall $a<b\leq -1$ auf $1\leq a<b$ zurück. Im Fall $-1\leq a<b\leq 1$ sind $\operatorname{tg}\pi(s+(g/2))$ wegen (95) und $|s+(3/2)|^{-1}$ vermöge $|c|\geq 2$ beschränkt. Daraus folgt leicht (101).

Es bleibt der Fall $1\leq a<b$. Für $t>0$ ist

$$\operatorname{tg}\pi(s+(g/2))=i+O(e^{-2\pi t})\qquad(t\to\infty). \tag{102}$$

Wegen (98) also

$$\begin{aligned} J_1(x)=&\left|\int_{c+i}^{c+ib}(s+(3/2))^{-1}x^{s+(3/2)}ds-\int_{c+i}^{c+ia}(s+(3/2))^{-1}x^{s+(3/2)}ds\right| \\ &+O\left(x^{(3/2)+c}\int_a^b|(1/2)+it|^{-1}\exp(-2\pi t)dt\right) \\ &+\left|\int_{c+i}^{c+ib}(s+(3/2))^{-1}x^{s+(3/2)}ds\right|+\left|\int_{c+i}^{c+ia}(s+(3/2))^{-1}x^{s+(3/2)}ds\right| \\ &+O\left(x^{(3/2)+c}\int_1^{\infty}|(1/2)+it|^{-1}\exp(-2\pi t)dt\right). \end{aligned} \tag{103}$$

Hieraus und aus Hejhal [14], Seite 84. Lemma 5.5 folgt (101). Hilfssatz 14 ist bewiesen.

Wir wollen nun die von Hejhal [14], Seiten 53 bis 82 für $\mathbf{Z}(s)$ bewiesenen Resultate auf unsere Funktion $\mathbf{Z}(q,g,s)$ übertragen. Dabei greifen wir weitestgehend auf Hejhals Beweise zurück. Wir übertragen auch Hejhal [14], Seiten 95 bis 115. Da wir aber statt Hejhals $\mathfrak{N}(y)=cy^2+O(y)$ nur (50), (56) zur Verfügung haben, tritt in unseren Abschätzungen oft der zusätzliche Faktor $\log T$ auf. Für den Beweis des "Primzahlsatzes" ist das ohne Bedeutung.

HILFSSATZ 15. *Es sei* $s=\sigma+iT$, $|\sigma|\leq c_0$, $T\geq 1000$,

$$T\neq b(q,g,v) \qquad (v\in N)\,. \tag{104}$$

Dann gilt

$$(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,\sigma+iT)=X(T,\sigma)+O(T\log T) \qquad (T\to\infty) \tag{105}$$

mit

$$X(T,\sigma)=\sum_{T-1\leq b(q,g,v)\leq T+1}\frac{h(q,g,v)}{\sigma+d(q,g,v)+i(T-b(q,g,v))}\,. \tag{106}$$

BEWEIS. Man gehe aus von (80), benutze (54), Definition 3, (80), (81), (82), (83), und verfahre wie im Beweis von Hejhal [14], Seite 96 bis 102 theorems 6.3 und 6.4. Man beachte auch Hejhal [14] Seiten 58 bis 61.

HILFSSATZ 16. *Es seien* $s=\sigma+it$, $0<\varepsilon<1$, $t\geq 1000$, $t\neq b(q,g,v)$, $\sigma\geq\varepsilon$. *Dann gilt*

$$(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,\sigma+it)=O((t\log t)/\varepsilon)\,, \tag{107}$$

wobei die Konstante in O nur von $\mathbf{M}(q)$ *abhängt.*

BEWEIS. Man benutze (54), Hilfssatz 15 und verfahre wie bei Hejhal [14], Seite 102, Proposition 6.6. Man beachte auch Hejhal [14], Seite 61, Theorem 3.9.

HILFSSATZ 17 (Phragmén-Lindelöf Art). *Es seien* $s=\sigma+it$, $0<\varepsilon<1$, $t\geq 1000$, $\sigma\geq\varepsilon$. *Dann ist*

$$(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,\sigma+it)=O((1/\varepsilon)t^{2\max(0,(1/2)+\varepsilon-\sigma)}\log t)\,; \tag{108}$$

wobei die Konstante in O nur von $\mathbf{M}(q)$ *abhängt.*

BEWEIS. Wie Hejhal [14], Seite 103, Beweis von proposition 6.7 mit

$$f(w)=\varepsilon(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(w+\varepsilon)(\log(w+\varepsilon))^{-1}\,.$$

Man siehe auch Hejhal [14], Seite 67, proposition 4.4.

HILFSSATZ 18. *Es sei* $s=\sigma+iT$, $|\sigma|\leq c_0$, $T\geqq 1000$, T *zulässig. Dann ist*

$$(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,\sigma+iT)=O(T^2) \qquad (T\to\infty)\,. \tag{109}$$

BEWEIS. Aus Hilfssatz 17 folgt

$$(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,\sigma+iT)=O\left(\left(\sum_{T-1\leq b(q,g,v)\leq T+1}|T-b(q,g,v)|^{-1}\right)+T\log T\right). \tag{110}$$

Nun ist T zulässig, also $m=[T]$ gut. Wegen (58) also

(111) $$(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q, g, \sigma+iT) \\ = O((1+A(m))(\mathfrak{M}(q, g, T+1)-\mathfrak{M}(q, g, T-1-\delta))+T\log T).$$

Für kleines δ gilt aber $[T-1-\delta, T+1]\subset\langle m-2, m+2]$. Vermöge (102) also

(112) $$(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q, g, \sigma+iT)=O((1+A(m))A(m)+T\log T).$$

Aus (103) Definition 3, $m=[T]$ und (112) folgt (109). Hilfssatz 18 ist bewiesen.

Wie bei Hejhal [14], Seite 81, theorem 4.25 folgt aus den vorhergehenden Resultaten $|\mathbf{Z}(q, g, s)|\leq\exp(O(|s|^2))$ $(|s|\to\infty, s\in\boldsymbol{C})$.

3. "Primzahlsätze". Mittels der Formel (11) wollen wir nun $\Psi_1(q, g, x)$ berechnen.

HILFSSATZ 19. *Es gilt*

(113) $$\Psi_1(q, g, x) \\ =(2\pi i)^{-1}\int_{(1/2)+\varepsilon-i\infty}^{(1/2)+\varepsilon+i\infty}(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q, g, s)(s+(1/2))^{-1}(s+(3/2))^{-1}x^{s+(3/2)}ds \\ +O(x^{3/2}) \qquad (x\to\infty).$$

BEWEIS. Aus (11), (87) folgt

(114) $$\Psi_1(q, g, x) \\ =(2\pi i)^{-1}\int_{(1/2)+\varepsilon-i\infty}^{(1/2)+\varepsilon+i\infty}(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q, g, s)(s+(1/2))^{-1}(s+(3/2))^{-1}x^{s+(3/2)}ds+J(x)$$

mit

(115) $$J(x)=(2\pi i)^{-1}\int_{(1/2)+\varepsilon-i\infty}^{(1/2)+\varepsilon+i\infty}(s+(1/2))^{-1}(s+(3/2))^{-1}x^{(3/2)+s}j(s)ds,$$

(116) $$j(s)=-(2\beta(q, g)/s)+p(q)\psi(s+1-(g/2))+(V'/V)(q, g, -s).$$

Es sei

(117) $$\delta=(1/2)\min_{m=1,\ldots,M(q,g)}\alpha(q, g, m)\leq 1/4.$$

Aus (33) folgt

(118) $$j(s)=O(\log|s|) \qquad (|s|\to\infty).$$

Die Konvergenzverhältnisse des Integrals (115) sind also so, daß man den Integrationsweg nach links verschieben kann. Also

$$(119)\quad J(x)=\operatorname*{Res}_{s=0}[(s+(1/2))^{-1}(s+(3/2))^{-1}x^{(3/2)+s}j(s)]$$

$$+(2\pi i)^{-1}\int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty}(s+(1/2))^{-1}(s+(3/2))^{-1}x^{(3/2)+s}j(s)ds$$

$$=-2\beta(q,g)(4/3)x^{3/2}+(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}((1/2)-\delta)^2+t^2)^{-1}x^{(3/2)-\delta}\log t\,dt$$

$$\leq O(x^{3/2})\,.$$

Hilfssatz 19 ist bewiesen.

HILFSSATZ 20. *Es sei $x>0$ und $T\geq 1000$. Dann gilt*

$$(120)\quad \Psi_1(q,g,x)=(2\pi i)^{-1}\int_{(1/2)+\varepsilon-iT}^{(1/2)+\varepsilon+iT}(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,s)(s+(1/2))^{-1}(s+(3/2))^{-1}x^{s+(3/2)}ds$$

$$+O(x^{3/2})+O((x^{2+\varepsilon}/T)((1/\varepsilon)+\log T))\,.$$

Dabei hängen die Konstanten in O nicht von T und ε ab.

BEWEIS. Es genügt

$$(121)\qquad J(x,T,\varepsilon)=\int_{(1/2)+\varepsilon+iT}^{(1/2)+\varepsilon+i\infty}(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,s)(s+(1/2))^{-1}(s+(3/2))^{-1}x^{s+(3/2)}ds$$

abzuschätzen. Aus Hilfssatz 11 und (121) folgt

$$(122)\qquad J(x,T,\varepsilon)=O\left(x^{2+\varepsilon}\int_{T}^{\infty}t^{-2}((1/\varepsilon)+\log t)dt\right).$$

Durch partielle Integration folgt $J(x,T,\varepsilon)=O((x^{2+\varepsilon}/T)((1/\varepsilon)+\log T))$. Hilfssatz 20 ist bewiesen.

HILFSSATZ 21. *Es seien $x>0$, $T>1000$, T zulässig, $A=c_0+(g/2)$. Dann ist*

$$(123)\quad \Psi_1(q,g,x)=r(q,g,x)+r^{-}(q,g,x,T)+\sum_{\nu=1}^{3}(I_\nu(q,g,x,T,\varepsilon)-\overline{I_\nu(q,g,x,T,\varepsilon)})$$

$$+J(q,g,x,T)+O(x^{3/2})+O((x^{2+\varepsilon}/T)((1/\varepsilon)+\log T))\,.$$

Dabei ist

$$(124)\qquad r(q,0,x)=(x^2/2)+\sum_{\nu=-\rho(q,0)}^{-1}\mu_\nu(q,0)\frac{x^{(3/2)+a_\nu(q,0)}}{((1/2)+a_\nu(q,0))((3/2)+a_\nu(q,0))}\,,$$

$$(125)\qquad r(q,1,x)=0\,,$$

$$(126)\quad I_1(q,g,x,T,\varepsilon) = (2\pi i)^{-1}\int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{x^{(3/2)+\sigma+iT}}{(\sigma+(1/2)+iT)(\sigma+(3/2)+iT)}(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,\sigma+iT)d\sigma\,,$$

$$(127)\quad I_2(q,g,x,T,\varepsilon) = (2\pi i)^{-1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{x^{(3/2)+\sigma+iT}}{(\sigma+(1/2)+iT)(\sigma+(3/2)+iT)}(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,\sigma+iT)d\sigma\,,$$

$$(128)\quad I_3(q,g,x,T,\varepsilon) = (2\pi i)^{-1}\int_{\varepsilon}^{(1/2)+\varepsilon} \frac{x^{(3/2)+\sigma+iT}}{(\sigma+(1/2)+iT)(\sigma+(3/2)+iT)}(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,\sigma+iT)d\sigma\,,$$

$$(129)\quad J(q,g,x,T) = (2\pi i)^{-1}\int_{-A-iT}^{-A+iT} \frac{x^{(3/2)+s}}{(s+(1/2))(s+(3/2))}(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,s)ds\,.$$

$r^-(q,g,x,T)$ ist die Summe der Residuen von

$$(130)\qquad \frac{x^{(3/2)+s}}{(s+(1/2))(s+(3/2))}(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,s)$$

im Rechteck $[-A,0]\times[-T,T]$. Dazu gehören insbesondere die auf der imaginären Achse zwischen $-iT$ und iT gelegenen Residuen.

BEWEIS. $r(q,g,x)$ ist die Summe der Residuen von (130) in der rechten Halbebene. Der Rest ist klar.

HILFSSATZ 22. *Es seien $x>0$, $T>1000$, T zulässig, $A=c_0+(g/2)$. Dann ist*

$$(131)\qquad r^-(q,g,x,T) = O(x^{(3/2)}\log T)\,.$$

Die in O steckenden Konstanten hängen nicht von T ab.

BEWEIS. Es sei $r_0(q,g,x,T)$ die Summe der Residuen der Funktion (130) im Rechteck $[-A,0]\times[-T,T]$ bei allen Punkten $\neq -1/2,\ -3/2$. Aus Satz 3 folgt

(132)

$$r_0(q,0,x,T) = \sum_{\nu=-\rho(q,0)}^{-1} \mu_\nu(q,0)\frac{x^{(3/2)-a_\nu(q,0)}}{((1/2)-a_\nu(q,0))((3/2)-a_\nu(q,0))} + (8/3)\mu_0(q,0)x^{3/2}$$

$$+ \sum_{\substack{d(q,0,\nu)\pm ib(q,0,\nu)\neq -(1/2),\,-(3/2)\\ b(q,0,\nu)\leq T}} \frac{x^{(3/2)-d(q,0,\nu)\pm ib(q,0,\nu)}\cdot h(q,0,\nu)}{((1/2)-d(q,0,\nu)\pm ib(q,0,\nu))((3/2)-d(q,0,\nu)\pm ib(q,0,\nu))}$$

$$+ (qp(q)/3)\sum_{\nu=2}^{c_0-1}\frac{x^{1-\nu}}{\nu(\nu-1)}(\nu+(1/2))$$

$$=O\left(x^{3/2}\left(1+\sum_{2\le b(q,0,v)\le T} h(q,0,v)b^{-2}(q,0,v)\right)\right)$$

$$=O\left(x^{3/2}\left(1+\int_2^T u^{-2}d\mathfrak{M}(q,g,u)\right)\right)$$

$$=O\left(x^{3/2}\left(1+[u^{-2}\mathfrak{M}(q,g,u)]_2^T+\int_2^T u^{-3}\mathfrak{M}(q,g,u)du\right)\right)$$

$$=O\left(x^{3/2}\left(1+\int_2^T du/u\right)\right)=O(x^{3/2}\log T)\,.$$

Genauso verfährt man für $g=1$. Also

$$r_0(q,g,x,T)=O(x^{3/2}\log T)\,. \tag{133}$$

Bei $s=-1/2$, $-3/2$ liegen Pole zweiter Ordnung. Die Residuenberechnung wird bei Hejhal [14], Seiten 88, 89 beschrieben. Man sieht, daß das Residuum bei $s=-1/2$ die Größenordnung $x\log x$ und bei $s=-3/2$ die Größenordnung $\log x$ besitzt. Zusammen mit (133) folgt Hilfssatz 22.

HILFSSATZ 23. *Es seien $x>0$, $T>1000$, T zulässig, $A=c_0+(g/2)$. Dann ist*

$$J(q,g,x,T)=O(x^{(3/2)-A})\,. \tag{134}$$

Die in O eingehenden Konstanten hängen nicht von T ab.

BEWEIS. Aus (84), (129) folgt

$$\begin{aligned} &J(q,g,x,T) \\ &=(2\pi i)^{-1}\int_{-A-iT}^{-A+iT}\frac{x^{(3/2)+s}}{(s+(1/2))(s+(3/2))}[-(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,-s)+B(q,g,s)]ds\,. \end{aligned} \tag{135}$$

Wegen Hilfssatz 14 also

$$\begin{aligned} &J(q,g,x,T) \\ &=-(2\pi i)^{-1}\int_{A-iT}^{A+iT}\frac{x^{(3/2)-s}}{((1/2)-s)((3/2)-s)}(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q,g,-s)ds+O(x^{(3/2)-A})\,. \end{aligned} \tag{136}$$

Vermöge Hilfssatz 11 also

$$J(q,g,x,T)=O\left(x^{(3/2)-A}\left(1+\int_{-\infty}^{\infty} t^{-2}\log t\,dt\right)\right)\,. \tag{137}$$

Daraus folgt (134). Hilfssatz 23 ist bewiesen.

HILFSSATZ 24. *Es seien $x>0$, $T>1000$, T zulässig, $A=c_0+(g/2)$. Dann ist*

$$(138)\qquad I_1(q, g, x, T, \varepsilon) = O((x^{(3/2)-\varepsilon}/T)((1/\varepsilon) + \log T)) .$$

Die in O steckenden Konstanten hängen nicht von T, ε ab.

BEWEIS. Aus (84), (126) folgt

$$(139)\quad I_1(q, g, x, T, \varepsilon) = (2\pi i)^{-1} \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{x^{(3/2)+\sigma+iT}}{(\sigma+(1/2)+iT)(\sigma+(3/2)+iT)} \cdot$$

$$(-(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q, g, -\sigma - iT) + B(q, g, \sigma + iT))d\sigma$$

$$= O((x^{(3/2)-\varepsilon}/T^2)\left(\int_{\varepsilon}^{A} |(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z})(q, g, \sigma+iT)|\, d\sigma + \int_{\varepsilon}^{A} |B(q, g, \sigma+iT)|\, d\sigma\right) .$$

Vermöge Hilfssatz 13, (93), Hilfssatz 17 folgt

$$(140)\quad I_1(q, g, x, T, \varepsilon) = O\Bigg((x^{(3/2)-\varepsilon}/T^2)((\log T)/\varepsilon) \cdot$$

$$\left(\int_{\varepsilon}^{A} T^{2\max(0,(1/2)+\varepsilon-\sigma)} d\sigma + T \log T\right)\Bigg)$$

$$= O\left((x^{(3/2)-\varepsilon}/T^2)((\log T)/\varepsilon)\left(1 + T^{1+2\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{(1/2)+\varepsilon} e^{-2\sigma \log T} d\sigma\right) + T \log T\right)$$

$$= O((x^{(3/2)-\varepsilon}/T^2)((\log T)/\varepsilon) \cdot$$

$$(1 + T^{1+2\varepsilon}(2\log T)^{-1}[-e^{-2\sigma \log T}]_{\varepsilon}^{(1/2)+\varepsilon} + T \log T)$$

$$= O((x^{(3/2)-\varepsilon}/T^2)((\log T)/\varepsilon)(1 + T(2 \log T)^{-1} + T \log T) .$$

Hieraus folgt (138). Hilfssatz 24 ist bewiesen.

HILFSSATZ 25. *Es seien $x > 0$, $T > 1000$, T zulässig, $A = c_0 + (g/2)$. Dann ist*

$$(141)\qquad I_2(q, g, x, T, \varepsilon) = O((x^{(3/2)+\varepsilon}/T)\log T) .$$

Die in O steckenden Konstanten hängen nicht von T, ε ab.

BEWEIS. Aus Hilfssatz 15 und (127) folgt

$$(142)\qquad I_2(q, g, x, T, \varepsilon) = S(q, g, x, T, \varepsilon) + O((x^{(3/2)+\varepsilon}/T) \log T)$$

mit

$$(143)\qquad S(q, g, x, T, \varepsilon) = \sum_{T-1 \le b(q,g,\nu) \le T+1} K(q, g, x, T, \varepsilon, \nu) ,$$

$$(144)\quad K(q, g, x, T, \varepsilon, \nu) = h(q, g, \nu)(2\pi i)^{-1} \cdot$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{x^{(3/2)+\sigma+iT}}{(\sigma+(1/2)+iT)(\sigma+(3/2)+iT)(\sigma+d(q, g, \nu)+i(T-b(q, g, \nu)))} ,$$

(145) $$|K(q,g,x,T,\varepsilon,v)| \le h(q,g,v)(x^{(3/2)+\varepsilon}/(2\pi T^2))\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma+d(q,g,v))^2+(T-b(q,g,v))^2}}\,.$$

Man substituiere $u=\dfrac{\sigma+d(q,g,v)}{|T-b(q,g,v)|}$. Es folgt

(146) $$|K(q,g,x,T,\varepsilon,v)|\le h(q,g,v)(x^{(3/2)+\varepsilon}/(2\pi T^2))\int_{\frac{d(q,g,v)-\varepsilon}{|T-b(q,g,v)|}}^{\frac{d(q,g,v)+\varepsilon}{|T-b(q,g,v)|}}\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\le h(q,g,v)(x^{(3/2)+\varepsilon}/(\pi T^2))\int_0^{\frac{d(q,g,v)+\varepsilon}{|T-b(q,g,v)|}}\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\le h(q,g,v)(x^{(3/2)+\varepsilon}/(\pi T^2))\log\left(\frac{d(q,g,v)+\varepsilon}{|T-b(q,g,v)|}+\sqrt{\left(\frac{d(q,g,v)+\varepsilon}{|T-b(q,g,v)|}\right)^2+1}\right)$$

$$=O(h(q,g,v)(x^{(3/2)+\varepsilon}/T^2)|\log|T-b(q,g,v)||)\,.$$

Wegen (58) somit für $m=[T]$:

(147) $$K(q,g,x,T,\varepsilon,v)=O(h(q,g,v)(x^{(3/2)+\varepsilon}/T^2)\log(1+A(m)))\,.$$

Aus (143), (147) folgt

(148) $$S(q,g,x,T,\varepsilon) =O((x^{(3/2)+\varepsilon}/T^2)\log(1+A(m))(\mathfrak{M}(q,g,T+1)-\mathfrak{M}(q,g,T-1-\delta_1)))$$

für kleines δ_1. Wegen $[T-1-\delta_1,T+1]\subset\langle m-2,m+2]$ somit vermöge (57) $\mathfrak{M}(q,g,T+1)-\mathfrak{M}(q,g,T-1-\delta_1)\le A(m)$.

Also

(149) $$S(q,g,x,T,\varepsilon)=O((x^{(3/2)+\varepsilon}/T^2)(\log(1+A(m)))A(m))\,.$$

Vermöge Definition 3 und $m=[T]$ also

(150) $$S(q,g,x,T,\varepsilon)=O((x^{(3/2)+\varepsilon}/T)\log T)\,.$$

Aus (142), (150) folgt (141). Hilfssatz 25 ist bewiesen.

HILFSSATZ 26. *Es seien $x>0$, $T>1000$, T zulässig, $A=c_0+(g/2)$. Dann ist*

(151) $$I_3(q,g,x,T,\varepsilon)=O(x^{2+\varepsilon}/(\varepsilon T))\,.$$

Die in O steckenden Konstanten hängen nicht von T und ε ab.

BEWEIS. Aus Hilfssatz 17 und (128) folgt

$$(152)\qquad I_3(q, g, x, T, \varepsilon) = O\left((x^{2+\varepsilon}/(\varepsilon T^2))T^{1+2\varepsilon}\log T\int_{\varepsilon}^{(1/2)+\varepsilon} T^{-2\sigma}d\sigma\right).$$

Wie in (140) folgt (151). Hilfssatz 26 ist bewiesen.

HILFSSATZ 27. *Es seien* $x>0$, $T>1000$, T *zulässig*, $A=c_0+(g/2)$. *Dann ist*

$$(153)\qquad \Psi_1(q, g, x) = r(q, g, x) + O((x^{2+\varepsilon}/T)((1/\varepsilon)+\log T)) + O(x^{(3/2)}\log T).$$

BEWEIS. Hilfssätze 21–27.

SATZ 3. *Es gilt*

$$(154)\qquad \Psi_1(q, g, x) = r(q, g, x) + O(x^{3/2}\log x) \qquad (x\to\infty),$$

$$(155)\qquad \Psi_1^{\pm}(q, x) = (1/2)r(q, 0, x) + O(x^{3/2}\log x) \qquad (x\to\infty).$$

BEWEIS. In Hilfssatz 27 sei $\varepsilon = 1/\log x$. T habe die Größenordnung von x und sei zulässig. Dann folgt (154). Aus (9), (125) folgt (155). Satz 3 ist bewiesen.

SATZ 4. *Es gilt*

$$(156)\qquad \Psi_0(q, 0, x) = x + O(x^{3/4}(\log x)^{1/2}) \qquad (x\to\infty),$$

$$(157)\qquad \Psi(q, 1, x) = O(x^{3/4}(\log x)^{1/2}) \qquad (x\to\infty),$$

$$(158)\qquad \Psi_0^{\pm}(q, x) = (x/2) + O(x^{3/4}(\log x)^{1/2}) \qquad (x\to\infty).$$

BEWEIS. Man gehe aus von Satz 3 und wende die Beweismethode von Hejhal [14], Seite 63, Beweis von theorem 3.13 oder Seiten 92, 93 auf die monoton wachsenden Funktionen $\Psi_0^{\pm}(q, x)$ an. Für das bei Hejhal auftretende h wähle man $h = x^{3/4}(\log x)^{1/2}$.

Dann folgt

$$(159)\qquad \Psi_0^{\pm}(q, x) = (1/2)(d/dx)r(q, 0, x) + O(x^{3/4}(\log x)^{1/2}).$$

Vermöge (124) ist

$$(160)\qquad (d/dx)r(q, 0, x) = x + \sum_{\nu=-\rho(q,0)}^{-1} \mu_\nu(q, 0)\frac{x^{(1/2)+a_\nu(q,0)}}{((1/2)+a_\nu(q, 0))}.$$

Wegen Christian [5], (80)

$$(161)\qquad (d/dx)r(q, 0, x) = x + O(x^{3/4}).$$

Aus (159), (161), folgt (158). Aus (8), (158) folgen (251), (252). Satz 4 ist bewiesen.

SATZ 5 ("Primzahlsatz"). *Es gilt*

$$(162)\qquad \pi_0^{\pm}(q, x) = (1/2)\,\mathrm{li}\, x + O(x^{3/4}(\log x)^{-1/2)}),$$

$$(163)\qquad \pi_{00}^{\pm}(q, x) = (1/2)\,\mathrm{li}\, x + O(x^{3/4}(\log x)^{-1/2}).$$

Dabei ist

$$\text{li}\, x = \int_2^x (\log t)^{-1} dt \,. \tag{164}$$

BEWEIS. Folgt aus Satz 4 wie bei Hejhal [14], Seite 64.

Für die volle Modulgruppe $SL(2, \boldsymbol{Z})$ fand Iwaniec [26] eine Verschärfung.

4. Konvergenzabszissen Selbergscher Zetafunktionen. Die Dirichletreihen (72) haben die Abszisse absoluter Konvergenz 1/2. Für $g=0$ ist dieses auch die Konvergenzabszisse. Für $g=1$ besitzt $(\Xi'_{\text{hyp}}/\Xi_{\text{hyp}})(q, g, s)$ in $\text{Re}\, s>0$ keine Pole, wohl aber auf der Geraden $\text{Re}\, s=0$. Die Konvergenzabszisse muß also zwischen 0 und 1/2 liegen.

SATZ 6. *Für* $\sigma>1/4$ konvergiert $(\Xi'_{\text{hyp}}/\Xi_{\text{hyp}})(q, 1, s)$ bedingt. *Dabei ist so über die Klassen* $\{P\}_{\mathbf{M}(q)}$ *zu summieren, daß die Normen* $N(P)$ *monoton wachsen. Die Konvergenzabszisse der Dirichletreihe* (72) *für* $g=1$ *liegt also zwischen* 0 *und* 1/4.

BEWEIS. Wegen

$$\begin{aligned}(\Xi'_{\text{hyp}}/\Xi_{\text{hyp}})(q, 1, s) &= \int_1^\infty x^{-(1/2)-s} d\Psi_0(q, 1, x) \\ &= [x^{-(1/2)-s}\Psi_0(q, 1, x)]_1^\infty + ((1/2)+s)\int_1^\infty x^{-(3/2)-s}\Psi_0(q, 1, x)dx \\ &= [O(x^{(1/4)-\sigma}(\log x)^{1/2})]_1^\infty + O\left(\int_1^\infty x^{-(3/4)-\sigma}(\log x)^{1/2}dx\right).\end{aligned} \tag{165}$$

Dieses ist für $\sigma>1/4$ konvergent. Satz 6 ist bewiesen.

In Akiyama [1], [22], Christian [5], Hiramatsu [16] bis [23] wurde die Reihe

$$\zeta(q, g, s) = \sum_{\substack{\{P\}_{\mathbf{M}(q)} \\ |\text{Tr}\, P|>2}} (\text{sign Tr}\, P)^g \frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2} - N(P)^{-1/2}} (2\cosh(1/2)\log N(P))^{-2s} \tag{166}$$

betrachtet.

HILFSSATZ 28. *Die Differenzreihe*

$$\begin{aligned}&(\Xi'_{\text{hyp}}/\Xi_{\text{hyp}})(q, g, s) - \zeta(q, g, s) \\ &= \sum_{\substack{\{P\}_{\mathbf{M}(q)} \\ |\text{Tr}\, P|>2}} (\text{sign Tr}\, P)^g \frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2} - N(P)^{-1/2}} (N(P)^{-s} - (2\cosh(1/2)\log N(P))^{-2s})\end{aligned} \tag{167}$$

konvergiert für $\sigma>-1/2$, *und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.*

BEWEIS. Klar.

STAZ 7. *Für $\sigma > 1/4$ konvergiert die Dirichletreihe $\zeta(q, q, s)$ bedingt. Dabei ist über die Klassen $\{P\}_{\mathbf{M}(q)}$ so zu summieren, daß die Normen $N(P)$ monoton wachsen. Die Konvergenzabszisse von $\zeta(q, 1, s)$ liegt also zwischen* 0 *und* 1/4.

BEWEIS. Satz 6, Hilfssatz 28.

LITERATUR

[1] AKIYAMA, S : Selberg trace formula for odd weight. Proc. Japan Acad

[2] ANDRIANOV, A N AND O. M. FOMENKO: Distribution of the norms of the hyperbolic elements of the modular group and the class number of indefinite binary quadratic forms. Soviet Math Dokl 12. (1971), 217–219

[3] AYOUB, R : An introduction to the analytic theory of numbers, Amer. Math. Soc , 1963.

[4] CHRISTIAN, U.: Über die analytische Fortsetzung gewisser Poincarescher Reihen zu elliptischen Modulgruppen, Tôhoku Math J. 40 (1988), 549–590

[5] CHRISTIAN, U : Untersuchung Selbergscher Zetafunktionen, J Math Soc. Japan 41 (1989), 503–537

[6] CHRISTIAN, U : Zur Theorie Selbergscher Zetafunktionen, Arch Math 54 (1990), 474–486

[7] CHRISTIAN, U : Über die Scatteringmatrix elliptischer Modulgruppen, Duke Math J 62 (1991), 479–509

[8] EFRAT, I.: Eisenstein series and Cartan groups, I11. J Math. 31 (1987), 428–437

[9] ELSTRODT, J : Die Selbergsche Spurformel für kompakte Riemannsche Flächen, Jber d. Dt. Math -Verein 83 (1981), 45–77.

[10] ELSTRODT, J , F GRUNEWALD AND J MENNICKE: Discontinuous groups on threedimensional hyperbolic space: analytical theory and artithmetic applications, Russian Math Surveys 38 (1983), 137–168.

[11] ERDÉLYI, A , W MAGNUS, F. OBERHETTINGER AND F. G TRICOMI: Higher transcental functions I, II, III, Mc Graw-Hill Book Company, New York, Toronto, London.

[12] FISCHER, J : An approach to the Selberg trace formula via the Selberg zetafunktion, Springer Lecture Notes Math 1253

[13] HEJHAL, D A : The Selberg trace formula and the Riemann zeta function, Duke Math. J 43 (1976), 441–482

[14] HEJHAL, D A.: The Selberg trace formula for *PSL* (2, $\boldsymbol{R}$), vol 1, Springer Lecture Notes Math. 548 (1976)

[15] HEJHAL, D A : The Selberg trace formula for *PSL* (2, $\boldsymbol{R}$), vol 2, Springer Lecture Notes Math 1001 (1983)

[16] HIRAMATSU, T : Eichler classes attached to automorphic forms of dimension-1, Osaka J. Math 3 (1966), 39–48

[17] HIRAMATSU, T : On automorphic forms of weight one I, Mathematics seminar notes 8 (1980), 173–179

[18] HIRAMATSU, T : On automorphic forms of weight one, III, The Selberg eigenspace for discontinuous groups of finite type, preprint

[19] HIRAMATSU, T : On some dimension formula for automorphic forms of weight one, I, Nagoya Math J. 85 (1982), 213–221; II, Nagoya Math J 105 (1987), 169–186

[20] HIRAMATSU, T : Theory of automorphic forms of weight 1, Adv Stud Pure Math 13 (1988), 503–584

[21] HIRAMATSU, T.: A formula for the dimension of spaces of cusp forms of weight 1, Adv Stud Pure Math 15.

[22] HIRAMATSU, T AND S AKIYAMA: On some dimension formula for automorphic forms of weight one III, Nagoya Math J. 111 (1988), 157–163

[23] HIRAMATSU, T AND Y MIMURA: On automorphic forms of weight one II, Mathematics seminar notes 9 (1981), 259–267

[24] HUBER, H : Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen, I, Math Ann. 138 (1959), 1–26; II, Math Ann 142 (1960/61), 385–398, und Math Ann 143 (1961), 463–464

[25] HUXLEY, M. N : Scattering matrices for congruence subgroups, Modular forms, R. A. Rankin Editor, Ellis Horwood and John Wiley, 141–156 (1984)

[26] IWANIEC, H : Prime geodesic theorem, J reine angew Math 349 (1984), 136–159

[27] KUZNETSOV, N V.: The distribution of norms of primitive hyperbolic classes of the modular group and asymptotic formulas for the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator on a fundamental region of the modular group, Soviet Math 19 (1978), 1053–1056

[28] KUZNETSOV, N V.: Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture, Sums of Kloosterman sums, Math USSR Sbornik 39 (1981), 299–342

[29] KUZNETSOV, N V : Convolution of the Fourier coefficients of the Eisenstein—Maass series, J Soviet Math. 29 (1985), 1131–1159

[30] LANDAU, E : Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Chelsea Publ Comp , New York (1909)

[31] LANDAU, E : Vorlesungen über Zahlentheorie, Chelsea Publ Comp , New York (1927)

[32] NATANSON, I P : Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Akademie Verlag, Berlin (1961)

[33] NIELSEN, N : Die Gammafunktion, Chelsea Puble Comp , New York (1906)

[34] RANDOL, B : On the asymptotic distribution of closed geodesics on compact Riemann surfaces, Trans A M S 233 (1977), 241–247

[35] SARNAK, P : On cusp forms, Contemporary Mathematics 53 (1986), 393–407

[36] SELBERG, A : Harmonic analysis, Göttingen 1954

[37] Selberg, A.: Collected papers, Springer Verlag

[38] VENKOV, A B.: Spectral theory of automorphic functions, the Selberg zetafunction, and some problems of analytic number theory and mathematical physics, Russian Math Surveys 34 (1979), 79–153

[39] VENKOV, A B : Spectral theory of automorphic functions, Proc Steklov Inst Math 153 (1981), 1–163

[40] VENKOV, A B AND A I VINOGRADOV: The asymptotic distribution of the norms of hyperbolic classes and spectral characteristics of cusp forms of weight zero for a Fuchsian group, Soviet Math Dokl 19 (1978), 1545–1548

[41] YAMADA, T : On the distribution of the norms of the hyperbolic transformations, Osaka J Math 3 (1966), 29–37

[42] ZELDITCH, S : Trace formula for cocompact $\Gamma\backslash PSL_2(\boldsymbol{R})$ and the equidistribution theory of closed geodesics, Duke Math J 59 (1989), 27–81

MATHEMATISCHES INSTITUT DER
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN
BUNSENSTR 3–5
D 3400 GÖTTINGEN
BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND