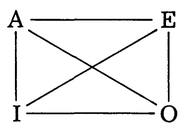
Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XIV, Number 2, April 1973
NDJFAM

UNE GÉNÉRALISATION DU CARRÉ LOGIQUE

TEODOR STIHI

1. Le commentateur latin Boèçe (480-524) dans son oeuvre "*Introductio ad syllogismos categoricos*" s'occupe du rapport des propositions contennant les mêmes termes et dans lesquelles la seule différence consiste dans la quantité et dans la qualité des termes.

On sait que dans la logique aristotélicienne les propositions catégoriques sont classifiées par rapport à leur quantité (en universelles et particulières) et par rapport à leur qualité (en affirmatives et négatives). Donc, il existe quatre types de propositions catégoriques: universelle affirmative (A), particulière affirmative (I), universelle négative (E) et particulière négative (O). Pour mettre en évidence leurs rapports réciproques Boèçe les avait disposées dans les angles d'un carré.



Les propositions du côté supérieur (A et E) sont contraires ou textuellemant d'après Boèçe: "*Hae tum dividunt verum et falsum tum falsae sunt utraquae verae nunquam*" (Celles-ci séparent le vrai du faux, quelquefois sont fausses l'une et l'autre, jamais vraies toutes les deux).

Celles du côté inférieur (I et O) sont subcontraires "*Hae tum dividunt verum et falsum tum verae sunt utraequae, falsae nunquam*" (Celles-ci séparent le vrai du faux, quelquefois sont vraies l'une et l'autre, jamais fausses toutes les deux).

Celles du côté droit et celles du côté gauche (A et I respectivement E et O) sont subalternes: "*Vera universali vera particularis sed non convertitur, falsa particulari falsa est universalis sed non convertitur*" (Si l'universelle est vraie la particulière est aussi mais pas réciproquement, si la particulière est fausse l'universelle est aussi, mais pas réciproquement).

Les propositions situées aux extrémités de la même diagonale du carré (A et O respectivement E et I) sont contradictoires "*Hae semper dividunt verum et falsum*" (Celles-ci séparent toujours le vrai du faux).

Received June 18, 1970

Le symbolisme de la logique mathématique nous permet de condenser tant la forme des quatre espèces de propositions que les quatre types de relations subsistant entre elles. Dans l'écriture quantifiée A, I, E et O deviennent respectivement les formules $\forall x.\ fx$, $\exists x.\ fx$, $\forall x.fx$, $\exists x.fx$.

$\forall x.fx$ *et* $\forall x.\overline{fx}$ sont contraires c'est-à-dire la formule $\forall x\ .fx\ \&\ \forall x, \overline{fx}$ est valide.[1] $\exists x.fx$ *et* $\exists x.\ \overline{fx}$ sont subcontraires, c'est-à-dire la formule $\exists x.fx \vee \exists x.\overline{fx}$ est valide. Les couples $\forall x.fx$, $\exists x,\overline{fx}$ *et* $\forall x.\overline{fx}$, $\exists x.fx$ sont contradictoires l'une des formules étant la négation de l'autre.

Les couples $\forall x.fx$, $\exists x.fx$ et $\forall x.\overline{fx}$, $\exists x.\overline{fx}$ sont subalternes, c'est-à-dire les implications suivantes:

$$\forall x.\ fx \rightarrow \exists x.fx;\ \forall x.fx \rightarrow \exists x.fx$$

sont valides et strictes (c'est-à-dire, les implications converses ne sont pas valides).

2. Si les prédicats d'un seul argument permettent la formalisation compléte de la logique aristotélicienne, le développement ultérieur de la logique a demandé l'utilisation des nouvelles éspeces de raisonnements, surtout dans les mathématiques, pour la formalisation desquelles il est nécessaire d'introduire les prédicats de plusieurs variabiles. Ainsi, le nombre des types de propositions formées avec les mêmes termes s'augmente. Mais nous montrerons que *les relations entre ces types restent les mêmes et peuvent être représentées dans une figure, qui, bien que n'étant pas un carré, a des rassemblences visibles avec le carré logique.*

Pour l'instant considérons les propositions formées avec les mêmes termes en utilisant les prédicats à deux arguments. On distingue les types suivants de propositions affirmatives: $\forall x \forall y.fxy$, $\exists x \forall y.fxy$, $\exists y \forall x.fxy$, $\forall x.fxx$, $\forall y \exists x.fxy$, $\forall x \exists y.\ fxy$, $\exists x.fxx$, $\exists x \exists y.fxy$ et les mêmes types de propositions négatives avec une barre de plus sur f.

Soit une suite de telles formules ayant la propriété telle que chacune d'elles implique strictement la suivante; par exemple:

$$\forall x \forall y.fxy,\ \exists x \forall y.fxy,\ \exists x.fxx,\ \exists x \exists y.fxy \tag{1}$$

et à côté nous construisons la suite de formules obtenues par la négation des formules (1)

$$\exists x \exists y.\overline{fxy},\ \forall x \exists y.\overline{fxy},\ \forall x.\overline{fxx},\ \forall x \forall y.\overline{fxy}$$

En suivant l'exemple de Boèçe nous disposerons ces deux suites dans la figure suivante

1. Dans cet article nous avons designé sous le nom de *validité*, cette propriété d'une formule de la logique du I-er ordre en vertu de laquelle en ramplaçant ces variables de predicat par toute sorte de prédicats concrets définis sur un domaine nevide quelconque (fini ou infini) des individus, la formule prendra la valeur logique vrai dans l'interpretation commune. Dans la litterature logico-mathématique elle porte aussi le nom de *validité universelle*.

$$
\begin{array}{rr}
\forall x \forall y \,.\, fxy & \forall x \forall y \,.\, \overline{fxy} \\
\exists x \forall y \,.\, fxy & \forall x \,.\, \overline{fxx} \\
\exists x \,.\, fxx & \forall x \exists y \,.\, \overline{fxy} \\
\exists x \exists y \,.\, fxy & \exists x \exists y \,.\, \overline{f\,xy}
\end{array}
$$

En vue d'une notation simple et adéquate nous écrirons une formule du type utilisé sous la forme $\mathcal{T} f$ ou $\mathcal{T} \overline{f}$, en représentant par la léttre $\mathcal{T}$ le préfixe et par f ou $\overline{f}$ la variable de prédicat (simple ou niée) ayant un nombre fixe d'arguments (par exemple dans le cas analisé, deux) et accordée dans la notation de ces arguments avec le préfixe respectif. Nous supposons aussi que le préfixe et le prédicat contiennent les mêmes variables, c'est-à-dire qu'il n'y a ni variables libres ni quantificateurs dégénérés. Quand deux telles formules sont distinctes nous ne noterons distinctement que leurs préfixes, sous-entendant que les prédicats les suivent automatiquement. De sorte que, la figure précédente peut s'écrire sous la forme:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{T}_1 f & \mathcal{T}'_1 \overline{f} \\
\mathcal{T}_2 f & \mathcal{T}'_2 \overline{f} \\
\mathcal{T}_3 f & \mathcal{T}'_3 \overline{f} \\
\mathcal{T}_4 f & \mathcal{T}'_4 \overline{f}
\end{array}
$$

Les formules suivantes sont valides (nous en donnons plus loin une démonstration): $\overline{\mathcal{T}_1 f \,\&\, \mathcal{T}'_1 \overline{f}}$, $\overline{\mathcal{T}_1 f \,\&\, \mathcal{T}'_2 \overline{f}}$, $\overline{\mathcal{T}_1 f \,\&\, \mathcal{T}'_3 \overline{f}}$, $\overline{\mathcal{T}_2 f \,\&\, \mathcal{T}'_1 \overline{f}}$, $\overline{\mathcal{T}_2 f \,\&\, \mathcal{T}'_2 \overline{f}}$, $\overline{\mathcal{T}_3 f \,\&\, \mathcal{T}'_1 \overline{f}}$ donc les paires respectives des types de propositions sont contraires d'apres Boèçe; $\mathcal{T}_4 f \vee \mathcal{T}'_4 \overline{f}$, $\mathcal{T}_4 f \vee \mathcal{T}'_3 \overline{f}$, $\mathcal{T}_4 f \vee \mathcal{T}'_3 \overline{f}$, $\mathcal{T}_3 f \vee \mathcal{T}'_4 \overline{f}$, $\mathcal{T}_3 f \vee \mathcal{T}'_3 \overline{f}$, $\mathcal{T}_2 f \vee \mathcal{T}'_4 \overline{f}$ donc les paires respectives des types de propositions sont sub-contraires d'après Boèçe. Pour les paires: $\mathcal{T}_1 f, \mathcal{T}'_4 \overline{f}$; $\mathcal{T}_2 f, \mathcal{T}'_3 \overline{f}$; $\mathcal{T}_3 f, \mathcal{T}'_2 \overline{f}$; $\mathcal{T}_4 f, \mathcal{T}'_1 f$ que nous avons laissées spécialement à part, toutes les deux espèces des formules sont valides et elles sont contradictoires d'après Boèçe. Enfin, les quatre formules de chaque côté de la figure, à cause des implications strictes subsistant entre elles, sont subalternes, d'après Boèçe.

3. Les résultats exposés jusqu'ici peuvent être généralisés comme il suit. Nous considérerons les formules du type $\mathcal{T} f$ où f est une variable de prédicat ayant un nombre arbitraire d'arguments et $\mathcal{T}$ un préfixe contenant toutes les variables de f. On peut effectuer sur le préfixe $\mathcal{T}$ et sur le prédicat f les opérations suivantes:

a. Le passage d'un quantificateur $\exists$ à la droite d'un ou plusieurs quantificateurs $\forall$.

b. Le passage d'un quantificateur $\forall$ à la gauche d'un ou plusieurs quantificateurs $\exists$.

c. La substitution d'un quantificateur $\forall$ à un quantificateur $\exists$ (la variable restant inchangée).

d. L'omission d'un quantificateur $\forall$ lequel est précédé d'un quantificateur de même espèce en substituant en f la variable du premier par celle du dernier.

e. Si une variable quantifiée existantiellement surgit au moins dans deux places du prédicat f, la substitution d'une de ces apparitions, quelle qu'elle soit, par une nouvelle variable (distincte de toutes les autres) et l'introduction d'un quantificateur $\exists$ en préfixe pour cette variable même avant ou après le quantificateur considéré, est permise.

Par l'application d'une ou plusieurs règles a—e, la formule $\mathcal{T}f$ se transforme dans la formule $\mathcal{T}'f$ et alors l'implication $\mathcal{T}f \rightarrow \mathcal{T}'f$ est valide et stricte.

Observation: Dans le cas d'une variable f à deux arguments la conclusion se vérifie parce que les formules suivantes sont thèses de la logique du I-er ordre:

$$\exists x\ \forall y\ .\ fxy \rightarrow \forall y\ \exists x\ .\ fxy$$
$$\forall x\ \mathrm{k}y\ .\ fxy \rightarrow \exists y\ \mathrm{k}y\ .\ fxy$$
$$\mathrm{k}x\ \forall y\ .\ fxy \rightarrow \mathrm{k}x\ \exists y\ .\ fxy$$

où, par k nous avons noté l'un, n'importe quel, des deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$

$$\forall x \forall y\ .\ fxy \rightarrow \forall x\ .\ fxx$$
$$\exists x\ .\ fxx \rightarrow \exists x \exists y\ .\ fxy$$

Nous ne démontrerons pas en général cette conclusion, les résultats exposés plus loin ne dépendant nullement d'elle. Notre seul motif pour énoncer les cinq opérations est de faire plus suggestif au lecteur le mode concret par lequel, d'une formule $\mathcal{T}f$ on obtient une formule $\mathcal{T}'f$, entre les deux subsistant l'implication stricte $\mathcal{T}f \rightarrow \mathcal{T}'f$.

Et maintenant nous passerons à la généralisation annoncée Etant donnée une variable de prédicat f, considérons les suites finies des formules de type $\mathcal{T}f$:

$$\mathcal{T}_1 f,\ \mathcal{T}_2 f,\ \ldots,\ \mathcal{T}_n f \tag{2}$$

avec la proprieté que les implications:

$$\mathcal{T}_i f \rightarrow \mathcal{T}_{i+1} f,\ i = 1, \ldots, n-1 \tag{3}$$

sont valides et strictes.

A chaque suite (2) nous en construisons la suite suivante (que nous appelerons "duale");

$$\mathcal{T}'_1 \bar{f},\ \mathcal{T}'_2 \bar{f},\ \ldots,\ \mathcal{T}'_n \bar{f} \tag{4}$$

d'après la règle: $\mathcal{T}'_i \bar{f} = \overline{\mathcal{T}_{n-i+1} f}$. Alors en utilisant le théorème de contraposition $(p \rightarrow q) \rightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$ il résulte que la suite (4) a aussi la propriété (3).

La duale de (4) est évidemment (2) et les deux suites sont, d'après notre terminologie "duales" (l'une à l'autre).

Maintenant nous démontrerons le théorème (metathéorème) suivant:

Si f est une variable de prédicat et deux suites attachées à f:

$$\mathcal{T}_1 f,\ \mathcal{T}_2 f,\ \dots,\ \mathcal{T}_n f$$
$$\mathcal{T}'_1 \bar f,\ \mathcal{T}'_2 \bar f,\ \dots,\ \mathcal{T}'_n \bar f$$

sont "duales", alors
(1) *pour que la formule* $\mathcal{T}_i f \vee \mathcal{T}'_j \bar f$ *soit valide il faut et il suffit qu'on ait* $i + j \geq n + 1$;
(2) *pour que la formule* $\overline{\mathcal{T}_i f \,\&\, \mathcal{T}'_j \bar f}$ *soit valide il faut et il suffit qu'on ait* $i + j \leq n + 1$.

Nous démontrerons d'abord la suffisance des conditions:

(1) Parce que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ et $i + j \geq n + 1$ il existe k et l ainsi que $i \geq k$, $j \geq l$ et $k + l = n + 1$ d'où $k = n - l + 1$; conformément à la definition de la suite duale $\mathcal{T}'_l \bar f = \overline{\mathcal{T}_k f}$ d'où $(\mathcal{T}_k f \vee \mathcal{T}'_l \bar f) \equiv (p \vee \bar p)$ et ainsi $\mathcal{T}_k f \vee \mathcal{T}'_l \bar f$ est valide. D'autre part, du fait que $i \geq k$, $j \geq l$ il résulte, tenant compte de la propriété (3) des suites et de la transitivité de l'implication que $\mathcal{T}_k f \to \mathcal{T}_i f$ et $\mathcal{T}'_l \bar f \to \mathcal{T}'_j \bar f$. En utilisant un théorème du calcul propositionnel on déduit: $(\mathcal{T}_k f \vee \mathcal{T}'_l \bar f) \to (\mathcal{T}_i f \vee \mathcal{T}'_j \bar f)$. L'antécédent étant vrai le conséquent est aussi.

(2) Si $i + j \leq n + 1$ il existe k et l ainsi que $i \leq k$, $j \leq l$ et $k + l = n + 1$ d'où $k = n - l + 1$ et par la définition de la suite duale $\mathcal{T}'_l \bar f = \overline{\mathcal{T}_k f}$ c'est-à-dire $(\overline{\mathcal{T}_k f} \vee \overline{\mathcal{T}'_l \bar f}) \equiv (\bar p \vee p)$ ainsi que la formule $\overline{\mathcal{T}_k f} \vee \overline{\mathcal{T}'_l \bar f}$ est valide. Du fait que $i \leq k$, $j \leq l$ il résulte $\mathcal{T}_i f \to \mathcal{T}_k f$ et $\mathcal{T}'_j \bar f \to \mathcal{T}'_l \bar f$; alors, en utilisant la contraposition $\overline{\mathcal{T}_k f} \to \overline{\mathcal{T}_i f}$ et $\overline{\mathcal{T}'_l \bar f} \to \overline{\mathcal{T}'_j \bar f}$. Conformément au même théorème de calcul des propositions utilisé au point (1) on obtient: $(\overline{\mathcal{T}_k f} \vee \overline{\mathcal{T}'_l \bar f}) \to (\overline{\mathcal{T}_i f} \vee \overline{\mathcal{T}'_j \bar f})$. Donc la formule $\overline{\mathcal{T}_i f} \vee \overline{\mathcal{T}'_j \bar f}$ (ou son équivalente par la lois De Morgan: $\overline{\mathcal{T}_i f \,\&\, \mathcal{T}'_j \bar f}$) est valide.

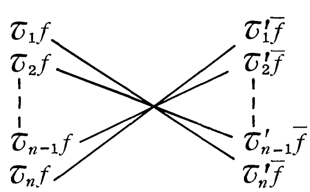
La nécessité des conditions résulte comme il suit:

(1) Supposons qu'il existe i et j ainsi que $i + j < n + 1$ et la formule $\mathcal{T}_i f \vee \mathcal{T}'_j \bar f$ soit valide. Nous avons démontré qu'en ce cas la formule $\overline{\mathcal{T}_i f \,\&\, \mathcal{T}'_j \bar f}$ est valide aussi. En utilisant la théorème

$$((p \vee q) \,\&\, \overline{p \,\&\, q}) \to (\bar p \equiv q)$$

il résulte que $\overline{\mathcal{T}_i f} \equiv \mathcal{T}'_j \bar f$ ce qui est absurde.
(2) On procède d'une façon analogue au point (1).

Conclusion: Etant donné un prédicat variable f à plusieurs arguments et deux suites duales pour f nous considérerons la figure formée avec les éléments de ces deux suites:



Cette figure peut être considérée la généralisation du carré logique parce que:

-les formules situées aux éxtremités de la même diagonale de la figure sont *contradictoires* au sens de Boèçe;

-les formules situées au dessus d'une même diagonale sont *contraires* au sens de Boèçe;

-les formules situées au dessous d'une même diagonale sont *subcontraires* au sens de Boèçe;

-les formules situées sur la même côté de la figure sont *subalternes* au sens de Boèçe.

Nous notons que si dans la suite (2) on ne peut insérer d'autres termes du type $\mathcal{T}f$ sans altérer la propriété (3)—comme il est, par exemple, de la suite (1)—alors à partir une certaine formule $\mathcal{T}f$ ou $\mathcal{T}\overline{f}$ on peut construire toutes les formules ayant la propriété qu'avec la formule donnée se trouvent dans l'une des quatre relations binaires énumerées. Pour cela nous considérerons toutes les suites—maximales dans le sens indiqué—dans lesquelles la formule paraitra comme terme et alors nous allons utiliser le théorême demontrée plus haut.

4. La question qui se pose est si entre deux telles formules d'autres relations ne sont pas possibles en dehors de celles analisées. Plus précisément si, pour deux formules du type $\mathcal{T}f$ ou $\mathcal{T}\overline{f}$ que nous noterons P et Q, il existe une combinaison Booleène (fonction propositionnelle) $F(P, Q)$ valide. En l'amenant à sa forme normale conjonctive $F_1 \,\&\, \ldots \,\&\, F_m$ sa validité équivaut à la validité de chaque F_i c'est-à-dire d'une disjonction qui peut contenir comme termes les formules P, Q, $\overline{P}$ et $\overline{Q}$. On exclut les apparitions simultanées de P et $\overline{P}$ ou de Q et $\overline{Q}$ qui sont banales. Il reste les quatre possibilités suivantes: $P \vee Q$, $\overline{P} \vee Q$, $P \vee \overline{Q}$, $\overline{P} \vee \overline{Q}$, $P \vee P$, $\overline{P} \vee \overline{P}$, $Q \vee Q$, $\overline{Q} \vee \overline{Q}$ sont évidemment impossibles car une formule $\mathcal{T}f$ ou $\mathcal{T}\overline{f}$ peut être falsifiée par le prédicat f = faux ou f = vrai). Dans la premier cas les deux formules sont ou subcontraires ou contradictoires; les deux cas suivantes correspondent aux subalternes, le dernier est le cas de contraires ou de contradictoires. Une de ces relations exclut les autres. Donc la relation plus générale $F(P, Q)$ se reduit à une des quatre relations déjâ connues.

Mais peut-être qu'un nouveau type de relation peut avoir lieu entre trois ou plusieurs telles formules?

Doit F une combinaison Booleène entre trois ou plusieurs formules $\mathcal{T}f$ ou $\mathcal{T}\overline{f}$ et considérons sa forme normale conjunctive $F_1 \,\&\, \ldots . \,\&\, F_m$. La validité de F équivant à la validité de chaque F_i donc à la validité d'une disjonction ayant pour termes des formules de types $\mathcal{T}f$ ou $\mathcal{T}\overline{f}$. Pour le moment nous nous restroindrons au cas de la disjonction:

$$\mathcal{T}f \vee \mathcal{T}'f' \vee \mathcal{T}''f'' \tag{5}$$

où, pour plus de clarté, les prédicats sont notés aussi distinctement.

Pour que (5) *soit valide il faut et il suffit qu'une, au moins, des formules* $\mathcal{T}f \vee \mathcal{T}''\overline{f''}$ *et* $\mathcal{T}'f' \vee \mathcal{T}''\overline{f''}$ *soit valide.*

La suffisance résulte immédiatement en vertu du théorème $p \rightarrow (p \vee q)$.

Notre démonstration de la nécessité utilise la soi-disante *propriété B* des formules valides ([1] pg. 101). J. Herbrand a montré que la déduction d'une formule en un certain système de la logique du I-re ordre sans égalité equivaut à la détermination d'un nombre naturel k tel que la formule ait la *propriété B d'ordre k* ([1] pg. 112-113). On a été démontré la complétitude de ce système ([2] pg. 317). Donc pour qu'une formule de la logique du I-re ordre soit valide il faut et il suffit qu'il existe un k tel qu'elle ait la propriété B d'ordre k.

Nous définirons cette propriété B seulement pour les disjonctions des formules des types $\mathcal{T}f$ ou $\mathcal{T}\overline{f}$. Etant donné une telle disjonction on attache à elle une disjonction du calcul propositionnel—sa *réduite d'ordre k* ([1] pg. 100-101)—notre formule ayant la propriété d'ordre k si sa réduite d'ordre k est une tautologie.

Premièrement nous supposerons que les variables appartenant au quantificateurs distincts sont notées distinctement. On obtient la réduite d'ordre k comme il suit:

(1) Dans chaque terme $\mathcal{T}f$ ou $\mathcal{T}\overline{f}$ de la disjonction, en supprimant le préfixe, nous remplacerons chaque variable quantifiée universellement: y, par une expression fonctionnelle: $y(x_1, \dots, x_m)$ où $x_1, \dots, x_m$ sont les variabiles quantifiées particulièrement et dont les quantificateurs précédent le quantificateur de y. S'il n'existe pas de telles variables y est remplacé par un nombre naturel ≥ 2 et distinct pour toute variable distincte. Les expressions fonctionnelles s'appellent *fonctions d'indice* et les nombres—*constantes d'indice* ([1] pg. 97-99).

Ainsi le terme devient une fonction (par l'intermédiaire des fonctions d'indice) de toutes les variables particulièrement quantifiées de $\mathcal{T}$: $\varphi(x_1, \dots, x_r)$.

(2) A l'aide des fonctions et constantes d'indice on construit une suite ensembles finis des nombres naturels $C_1, \dots, C_p, \dots$ appelé la suite des *champs associés* à la formule considerée ([1] pg. 99-100). $C_1 = \{1\}$. Si on avait construit $C_1, \dots, C_{p-1}$ alors C_p s'obtient atribuant une valeur naturelle distincte à chaque expression fonctionnelle distincte obtenue quand les "arguments" de chaque fonction d'indice parcourent l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{p-1} C_i$, un, au moins, des arguments appartenant à C_{p-1}. Nous supposerons de plus que l'operation est effectuée de sorte que les elements du C_p soient distinctes des elements de $\bigcup_{i=1}^{p-1} C_i$. Nous englobons du début les constantes d'indice au champ C_2.

(3) En tout terme obtenu au point (1)—$\varphi(x_1, \dots, x_r)$—on substitue $x_1, \dots, x_r$ par tous les systèmes possibles de valeurs $a_1, \dots, a_r$ tirées de $\bigcup_{i=1}^{k} C_i$. Dans une telle substitution les fonctions d'indice sont remplacées par les valeurs données à la construction de champs $C_1, \dots, C_{k+1}$. Nous remplacons $\varphi(x_1, \dots, x_r)$ dans la formule obtenue au point (1) par la disjonction des termes $\varphi(a_1, \dots a_r)$.

La formule ainsi obtenue (évidemment une disjonction) contient des nombres naturels au lieu des variabiles individuelles et appartient au calcul propositionnel car les quantificateurs ont été suprimé. On l'appel la réduite d'ordre k de la formule donnée.[2]

Maintenant la necessité du théorème resulte si nous demontrerons que $\mathcal{T}f \vee \mathcal{T}'f' \vee \mathcal{T}''\overline{f}''$ ayant la propriété B d'ordre k, une au moins, des formules $\mathcal{T}f \vee \mathcal{T}''\overline{f}''$ et $\mathcal{T}'f' \vee \mathcal{T}''\overline{f}''$ l'aura du même ordre.

Après (1) et (3) la réduite d'ordre k pour $\mathcal{T}f \vee \mathcal{T}'f' \vee \mathcal{T}''\overline{f}''$ sera du type:

$$f_1 \vee \dots \vee f_n \vee f_1' \vee \dots \vee f_{n'}' \vee f_1'' \vee \dots \vee f_{n''}'' \tag{6}$$

que nous supposons être une tautologie. Alors (6) contient au moins un terme tant simple que nié. Soit cettes deux apparitions f_i et $\overline{f}_j''$. Nous montrerons qu'en ce cas $\mathcal{T}f \vee \mathcal{T}''\overline{f}''$ a la propriété B d'ordre k. Pour cela nous ferons quelques identifications dans les champs $C_1, \dots, C_{k+1}$ associés à $\mathcal{T}f \vee \mathcal{T}'f' \vee \mathcal{T}''\overline{f}''$ en vue d'obtenir les champs $C_1', \dots, C_{k+1}'$ associés à $\mathcal{T}f \vee \mathcal{T}''\overline{f}''$. $C_1 = C_1' = \{1\}$. Dans le champ C_2 nous identifierons à 1 toutes les valeurs prises par les fonctions d'indice attachées à $\mathcal{T}'f'$. En conséquence, à une fonction d'indice correspondrons pour les mêmes valeurs des arguments, plusieurs valeurs; nous les identifierons avec l'une d'elles pour les fonctions d'indice attachées à $\mathcal{T}f$ et $\mathcal{T}''\overline{f}''$ et avec 1 pour les fonction d'indice attachées à $\mathcal{T}'f'$. On obtient C_3'. Ainsi dans C_2' les constantes d'indice de $\mathcal{T}'f'$ ont disparu et à la construction de C_2' et C_3' n'ont participé que les fonctions d'indice de $\mathcal{T}f$ et $\mathcal{T}''\overline{f}''$. Par conséquent ces sont des champs associés à la formule $\mathcal{T}f \vee \mathcal{T}''\overline{f}''$. De proche en proche nous obtiendrons ainsi la suite $C_1', \dots, C_{k+1}'$. Considérons la disjonction:

$$f_1 \vee \dots \vee f_n \vee \overline{f}_1'' \vee \dots \vee \overline{f}_{n''}'' \tag{7}$$

tautologique parce qu'elle contient f_i et $\overline{f}_j''$. Si nous ferons en (7) les mêmes identifications qu'en $C_1, \dots, C_k$ nous obtiendrons évidemment (après avoir supprimé les eventuelles repetitions des termes) la réduite d'ordre k pour $\mathcal{T}f \vee \mathcal{T}''\overline{f}''$. Mais les identifications ne changent pas le caractère tautologique de (7) parce que nous ne faisons que restreindre les possibilités de donner diverses valeurs de vérité à ses termes. D'ou il résulte que $\mathcal{T}f \vee \mathcal{T}''f''$ a la propriété B d'ordre k.

La généralisation du résultat obtenu pour la disjonction (5) à une disjonction quelconque des formules du type $\mathcal{T}f$ ou $\mathcal{T}\overline{f}$ est maintenant évidente. Le lecteur pourra lui même l'effectuer. On observe seulement que pour être valide une telle disjonction doit contenir tant de formules du type $\mathcal{T}f$ que de formules du type $\mathcal{T}\overline{f}$ (au contraire le prédicat f = faux au f = vrai la falsifiera).

2. Notre construction de la réduite, un peu différente de celle de Herbrand ([1] page 100-101), conduit toutefois au même résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Herbrand, Jacques, *Recherches sur la théorie de la démonstration*, Warsaw (1930).

[2] Wang, Hao, *A Survey on Mathematical Logic*, Amsterdam-Peking (1964).

Centre de logique
Académie de la République Populaire Roumanie
Bucarest, Rumania