Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XVII, Number 1, January 1976
NDJFAM

LES ALGÈBRES DE HEYTING-BROUWER ET DE ŁUKASIEWICZ TRIVALENTES

LUISA ITURRIOZ

1 *Introduction* Moisil [6], [7], et [8] a introduit et développé la théorie des algèbres de Łukasiewicz trivalentes. Ces algèbres sont les modèles du calcul propositionnel considéré par Łukasiewicz [3], ayant pour matrice une chaîne à trois éléments, et qui a été axiomatisé par Wasjberg [3], p. 291. Dans [9], Moisil a montré que les algèbres de Łukasiewicz trivalentes sont, en particulier, des algèbres de Heyting. Plus précisément, cet auteur a donné une formule qui exprime l'implication intuitioniste au moyen des opérations primitives de l'algèbre.* Par dualité, les algèbres de Łukasiewicz trivalentes sont aussi des algèbres de Brouwer.

Etant donné un système $\langle A, \wedge, \vee, \Rightarrow, \dot{-}, 0, 1\rangle$, où $\langle A, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ est une algèbre de Heyting et $\langle A, \wedge, \vee, \dot{-}, 0, 1\rangle$ une algèbre de Brouwer, on se pose naturellement la question de savoir s'il est possible de caractériser les algèbres de Łukasiewicz trivalentes parmi les algèbres de Heyting-Brouwer.

Nous attirons l'attention sur le fait que l'implication intuitioniste qu'on peut définir sur la chaîne à trois éléments a des propriétés spéciales. Łukasiewicz [3], p. 286, a établi, par exemple, qu'elle vérifie l'égalité

$$(\urcorner x \Rightarrow y) \Rightarrow (((y \Rightarrow x) \Rightarrow y) \Rightarrow y) = 1$$

où $\urcorner x = x \Rightarrow 0$; en tenant compte des opérations $\Rightarrow$ et $\dot{-}$, on remarque que l'égalité

$$(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow \urcorner \ulcorner x) = 1$$

où $\urcorner x = x \Rightarrow 0$ et $\ulcorner x = 1 \dot{-} x$, est aussi satisfaite.

2 *Définitions et Propriétés* Nous allons préciser les notions que nous utiliserons par la suite. D'après Monteiro [10], p. 151, on peut définir la

*This research was supported by the "Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina."

Received May 28, 1975

notion d'algèbre de Heyting généralisée ou algèbre de Hilbert-Bernays de la manière suivante:

Définition 1 Une *algèbre de Hilbert-Bernays* est un système $\langle A, \wedge, \vee, \Rightarrow, 1\rangle$ où 1 est un élément distingué de A; $\wedge$, $\vee$ et $\Rightarrow$ sont trois opérations binaires définies sur A, satisfaisant aux conditions suivantes, pour tout $x, y, z \in A$:

A1 $x \Rightarrow x = 1$
A2 $(x \Rightarrow y) \wedge y = y$
A3 $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$
A4 $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow z) \wedge (x \Rightarrow y)$
A5 $(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)$

Cette notion a été introduite par Birkhoff [1], p. 45, sous le nom de "Brouwerian lattice" et elle joue un rôle fondamental dans l'étude de la logique positive de Hilbert et Bernays (voir à ce propos [13] et [14]). Il est bien connu qu'une telle algèbre est un treillis distributif ayant 1 comme plus grand élément.

Définition 2 Une *algèbre de Heyting* est un système $\langle A, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ où $\langle A, \wedge, \vee, \Rightarrow, 1\rangle$ est une algèbre de Hilbert-Bernays et 0 est un élément distingué de A satisfaisant à l'axiome

A0 $0 \wedge x = 0$ *pour tout* $x \in A$.

D'une manière analogue on peut donner la définition d'algèbre de Brouwer. Ainsi:

Définition 3 Une *algèbre de Brouwer* est un système $\langle A, \wedge, \vee, \dot{-}, 0, 1\rangle$ où 0 et 1 sont deux éléments distingués de A; $\wedge$, $\vee$ et $\dot{-}$ sont trois opérations binaires définies sur A et satisfaisant aux conditions suivantes, pour tout $x, y, z \in A$:

B0 $x \vee 1 = 1$
B1 $x \dot{-} x = 0$
B2 $x \vee (x \dot{-} y) = x$
B3 $(x \dot{-} y) \vee y = x \vee y$
B4 $(x \vee y) \dot{-} z = (y \dot{-} z) \vee (x \dot{-} z)$
B5 $x \dot{-} (y \wedge z) = (x \dot{-} y) \vee (x \dot{-} z)$

Définition 4 Une *algèbre de Heyting-Brouwer* est un système $\langle A, \wedge, \vee, \Rightarrow, \dot{-}, 0, 1\rangle$ où:

1. le système $\langle A, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ est une algèbre de Heyting,
2. le système $\langle A, \wedge, \vee, \dot{-}, 0, 1\rangle$ est une algèbre de Brouwer.

Rauszer [15] a étudié ces structures sous le nom de "Semi-Boolean algebras" et a montré qu'elles jouent par rapport à la "Heyting-Brouwer logic" le même rôle que les algèbres de Heyting en ce qui concerne la logique intuitioniste.

Posons par définition:

$$\neg x = x \Rightarrow 0$$
$$\ulcorner x = 1 \dot{-} x$$

L'élément $\neg x$ est le plus grand y de l'algèbre tel que $x \wedge y = 0$. Dualement pour Γx.

Remarque 1 Dans [15], p. 222, on trouve une liste de propriétés qui sont valables dans une algèbre de Heyting-Brouwer. On voit par exemple que:

si $x \leqslant y$, alors $\neg y \leqslant \neg x$ et $\Gamma y \leqslant \Gamma x$

$$\begin{aligned}
&\neg 1 = 0\\
&\neg 0 = 1\\
&\Gamma 1 = 0\\
&\Gamma 0 = 1\\
&x \wedge \neg x = 0\\
&x \vee \Gamma x = 1\\
&\neg\neg\neg x = \neg x\\
&\Gamma\Gamma\Gamma x = \Gamma x\\
&\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y\\
&\Gamma(x \wedge y) = \Gamma x \vee \Gamma y\\
&\neg x \leqslant \Gamma x\\
&\neg\Gamma x \leqslant x \leqslant \Gamma\neg x\\
&\Gamma\Gamma x \leqslant x \leqslant \neg\neg x
\end{aligned}$$

Parmi les algèbres de Heyting-Brouwer nous allons considérer une classe particulière, constituée par celles qui vérifient l'égalité que voici:

T $\quad (x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow \neg\Gamma x) = 1$

Signalons que l'égalité T peut s'écrire en outre sous la forme

T' $\quad (x \Rightarrow y) \vee (\Gamma x \Rightarrow \neg y) = 1$

car dans une algèbre de Heyting on a l'égalité $a \Rightarrow \neg b = b \Rightarrow \neg a$.

Une classe importante d'algèbres de Hilbert-Bernays est constituée par les algèbres dites *linéaires*. Celles-ci ont été considérées par Moisil [5] et jouent un rôle primordial dans l'étude du calcul propositionnel **LC** étudié par Dummet [2]. Elles sont des algèbres de Hilbert-Bernays qui satisfont à la condition

D $\quad (x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$

Lemme 1 *Toute algèbre de Heyting-Brouwer vérifiant la condition* T *satisfait à l'égalité* D.

Démonstration: De $\neg\Gamma x \leqslant x$ on déduit $y \Rightarrow \neg\Gamma x \leqslant y \Rightarrow x$ et $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow \neg\Gamma x) \leqslant (x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x)$, d'où le lemme.

Remarque 2 Rappelons que dans une algèbre de Hilbert-Bernays les conditions

a $\quad (x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$
b $\quad x \vee y = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \wedge ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$
c $\quad x \Rightarrow (y \vee z) = (x \Rightarrow y) \vee (x \Rightarrow z)$
d $\quad (x \wedge y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z)$

sont équivalentes deux à deux, *cf.* [11] et [12]. Une partie de ces résultats a été établi par Ward [18].

Définition 5 Une algèbre de Heyting-Brouwer est dite *doublement de Stone* si les égalités

$$\neg x \vee \neg\neg x = 1$$
$$\Gamma x \wedge \Gamma\Gamma x = 0$$

sont satisfaites.

Lemme 2 *Toute algèbre* $\mathfrak{A}$ *de Heyting-Brouwer vérifiant la condition* T *est une algèbre doublement de Stone.*

Démonstration: D'après les hypothèses et le Lemme 1, on déduit que $\mathfrak{A}$ vérifie la condition D et il en résulte que $\neg x \vee \neg\neg x = 1$ car, d'après la Remarque 2, point d,

$$\neg x \vee \neg\neg x = (x \Rightarrow 0) \vee (\neg x \Rightarrow 0) = (x \wedge \neg x) \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 0 = 1$$

Il nous reste à montrer que, pour tout x, l'égalité $\Gamma x \wedge \Gamma\Gamma x = 0$ est valable. En remplaçant y par Γx dans la condition T, on obtient

(1) $(x \Rightarrow \Gamma x) \vee (\Gamma x \Rightarrow \neg\Gamma x) = 1$

Observons que dans toute algèbre de Hilbert-Bernays on a $x \vee y \leqslant (x \Rightarrow y) \Rightarrow y$ et du fait que $x \vee \Gamma x = 1$, on a $1 = x \vee \Gamma x \leqslant (x \Rightarrow \Gamma x) \Rightarrow \Gamma x$. On déduit de là que $x \Rightarrow \Gamma x \leqslant \Gamma x$. L'inégalité opposée étant toujours valable, on a bien l'égalité

(2) $x \Rightarrow \Gamma x = \Gamma x$

D'autre part dans toute algèbre de Heyting $x \Rightarrow \neg x = \neg x$, d'où

(3) $\Gamma x \Rightarrow \neg\Gamma x = \neg\Gamma x$

De (1), en tenant compte de (2) et (3) on déduit

(4) $\Gamma x \vee \neg\Gamma x = 1$

Il en résulte $\Gamma\Gamma x \leqslant \neg\Gamma x$ et $\Gamma x \wedge \Gamma\Gamma x \leqslant \neg\Gamma x \wedge \Gamma x = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 3 Dans une algèbre de Heyting-Brouwer vérifiant la condition T on a les égalités qui suivent:

$$\neg x \vee \neg\neg x = 1$$
$$\Gamma x \wedge \Gamma\Gamma x = 0$$
$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$
$$\Gamma(x \vee y) = \Gamma x \wedge \Gamma y$$
$$\Gamma\neg x = \neg\neg x$$
$$\neg\Gamma x = \Gamma\Gamma x$$

Dans une algèbre de Heyting-Brouwer la condition T équivaut à l'égalité

T″ $(x \Rightarrow y) \vee \neg\Gamma x \vee \neg y = 1$

car en général $\neg\Gamma x \vee \neg y \leqslant y \Rightarrow \neg\Gamma x = \Gamma x \Rightarrow \neg y$ et si T est valable

$$y \Rightarrow \neg\Gamma x = \neg(y \wedge \Gamma x) = \neg y \vee \neg\Gamma x$$

Plusieurs présentations des algèbres de Łukasiewicz trivalentes ont été données. En tenant compte du premier système d'axiomes fourni par Moisil [8], p. 84, nous pouvons définir, d'après Varlet [16], p. 404, la notion d'algèbre de Łukasiewicz trivalente de la manière suivante:

Définition 6 Une *algèbre de Łukasiewicz trivalente* est un système $\langle A, \wedge, \vee, \neg, \Gamma, 0, 1\rangle$ où $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ est un treillis distributif ayant 0 et 1 comme plus petit et plus grand élément; $\neg$ et Γ sont deux opérations unaires définies sur A satisfaisant aux conditions suivantes:

V1 $x \wedge \neg x = 0$; $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$; $\neg 0 = 1$
V2 $x \vee \Gamma x = 1$; $\Gamma(x \vee y) = \Gamma x \wedge \Gamma y$; $\Gamma 1 = 0$
V3 $\neg x = \neg y$ *et* $\Gamma x = \Gamma y$ *entraînent* $x = y$

Nous supposerons connues les règles de calcul valables dans les algèbres de Łukasiewicz trivalentes.

3 *Relation entre les Algèbres de Heyting-Brouwer et de Łukasiewicz Trivalentes* Le théorème qui suit donne une réponse à la question posée au début.

Théorème 1 *Pour qu'une algèbre de Heyting-Brouwer soit une algèbre de Łukasiewicz trivalente il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition* T.

Démonstration: Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre de Heyting-Brouwer vérifiant la condition T. D'après les Remarques 1 et 3 les conditions V1 et V2 sont satisfaites. Supposons alors que $\neg x = \neg y$ et $\Gamma x = \Gamma y$. D'après la condition T′ on a:

$$1 = (x \Rightarrow y) \vee (\Gamma x \Rightarrow \neg y) = (x \Rightarrow y) \vee (\Gamma y \Rightarrow \neg x) = (x \Rightarrow y) \vee (x \Rightarrow \neg\Gamma y)$$

Mais de $\neg\Gamma y \leqslant y$ on tire $x \Rightarrow \neg\Gamma y \leqslant x \Rightarrow y$ donc

$$1 = (x \Rightarrow y) \vee (x \Rightarrow \neg\Gamma y) = x \Rightarrow y$$

et (1) $x \leqslant y$. En échangeant les rôles de x et y on déduit (2) $y \leqslant x$. De (1) et (2) on a $x = y$.

Montrons que la condition est aussi suffisante. Moisil [9] a montré que toute algèbre de Łukasiewicz trivalente est une algèbre de Heyting. En vertu de la dualité on peut aussi affirmer que toute algèbre de Łukasiewicz trivalente est une algèbre de Brouwer, et par conséquent elle est une algèbre de Heyting-Brouwer. Il nous reste donc à montrer que l'égalité T est satisfaite. Varlet [17], p. 464, a montré que dans une algèbre de Łukasiewicz trivalente l'implication intuitioniste peut s'exprimer au moyen de l'égalité

$$x \Rightarrow y = (\neg x \vee \neg\neg y) \wedge (\Gamma x \vee y)$$

Donc, en tenant compte du fait que dans une algèbre de Łukasiewicz $\neg\Gamma x = \Gamma\Gamma x$ on a:

$$\begin{aligned}(x \Rightarrow y) \vee \neg y \vee \neg\Gamma x &= ((\neg x \vee \neg\neg y) \wedge (\Gamma x \vee y)) \vee \neg y \vee \Gamma\Gamma x\\ &= (\neg x \vee \neg\neg y \vee \neg y \vee \Gamma\Gamma x) \wedge (\Gamma x \vee y \vee \neg y \vee \Gamma\Gamma x)\\ &= (\neg x \vee 1 \vee \Gamma\Gamma x) \wedge (1 \vee y \vee \neg y) = 1\end{aligned}$$

4 *Axiomes Indépendants pour les Algèbres de Łukasiewicz Trivalentes* Nous allons donner dans la suite, un ensemble d'axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes.

Théorème 2 *Soit* $\mathfrak{A} = \langle A, \wedge, \vee, \Rightarrow, \dot{-}, 0, 1\rangle$ *un système satisfaisant aux axiomes suivantes:*

L1 $x \Rightarrow x = 1$
L2 $(x \Rightarrow y) \wedge y = y$
L3 $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$
L4 $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow z) \wedge (x \Rightarrow y)$
L5 $x \dot{-} x = 0$
L6 $x \vee (x \dot{-} y) = x$
L7 $(x \dot{-} y) \vee y = x \vee y$
L8 $(x \vee y) \dot{-} z = (y \dot{-} z) \vee (x \dot{-} z)$
L9 $(x \Rightarrow y) \vee (((x \Rightarrow x) \dot{-} x) \Rightarrow (y \Rightarrow (y \dot{-} y))) = 1$

Alors $\mathfrak{A}$ *est équivalent à une algèbre de Łukasiewicz trivalente et les axiomes* L1-L9 *sont indépendants.*

Démonstration: Les axiomes L1-L4 caractérisent (voir [10], p. 159) les systèmes $\langle A, \wedge, \Rightarrow, 1\rangle$, où $\langle A, \wedge, 1\rangle$ est un inf-demi-treillis ayant 1 comme plus grand élément et l'opération $\Rightarrow$ vérifie les conditions suivantes:

H1 si $a \wedge x \leqslant b$ alors $x \leqslant a \Rightarrow b$
H2 $a \wedge (a \Rightarrow b) \leqslant b$

Des axiomes L5-L8 on a un résultat dual. Les éléments 0 et 1 étant respectivement le plus petit et le plus grand élément du treillis $\langle A, \wedge, \vee\rangle$ on a bien A0 et B0. Du fait que $\langle A, \wedge, \vee, \Rightarrow, 1\rangle$ est un treillis satisfaisant aux propriétés H1 et H2 on déduit (voir [4]) que la condition

A5 $(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)$

est satisfaite. D'après la dualité l'égalité

B5 $x \dot{-} (y \wedge z) = (x \dot{-} y) \vee (x \dot{-} z)$

est aussi vérifiée. Ainsi les axiomes L1-L8 caractérisent les algèbres de Heyting-Brouwer. D'après le Théorème 1 le système $\mathfrak{A}$ équivaut donc à une algèbre de Łukasiewicz trivalente.

Reste à prouver que les axiomes L1-L9 sont indépendants. Pour ce faire nous allons considérer les exemples suivants:

Indépendance de L1 Soit $A = \{0, a, 1\}$ la chaîne à trois éléments. Définissons les opérations $\wedge$, $\vee$ et $\dot{-}$ comme de coutume, tandis que l'opération $\Rightarrow$ subit la modification qu'indique le tableau suivant:

$\Rightarrow$	0	a	1
0	1	1	1
a	0	a	1
1	0	a	1

Les axiomes L2-L9 sont vérifiés tandis que L1 ne l'est pas car $a \Rightarrow a = a \neq 1$.

Indépendance de L2 Soit $A = \{0, 1\}$ la chaîne à deux éléments avec les opérations $\vee$ et $\dot{-}$ habituelles, et les opérations $\Rightarrow$ et $\wedge$ définies comme suit:

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	1	1

Les axiomes L1 et L3-L9 sont satisfaits tandis que L2 ne l'est pas car $(1 \Rightarrow 0) \wedge 0 = 1 \wedge 0 = 1 \neq 0$.

Indépendance de L3 Soit $A = \{0, 1\}$ la chaîne à deux éléments munie des opérations habituelles de $\wedge$, $\vee$ et $\dot{-}$ et l'opération $\Rightarrow$ définie au moyen du tableau que voici:

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	1	1

Tous les axiomes sont vérifiés à l'exception de L3 puisque $1 \wedge (1 \Rightarrow 0) = 1 \wedge 1 = 1$ et $1 \wedge 0 = 0$.

Indépendance de L4 Soit $A = \{0, a, 1\}$ la chaîne à trois éléments avec les opérations $\vee, \Rightarrow$, et $\dot{-}$ habituelles et l'opération $\wedge$ définie par:

$\wedge$	0	a	1
0	0	0	0
a	a	a	a
1	0	a	1

Les axiomes L1-L3 et L5-L9 sont valables tandis que L4 ne l'est pas car $a \Rightarrow (a \wedge 0) = a \Rightarrow a = 1$ et $(a \Rightarrow 0) \wedge (a \Rightarrow a) = 0 \wedge 1 = 0$.

Indépendance de L5-L8 Il suffit de considérer les chaînes des quatre exemples précédents, en laissant invariables les opérations primitives $\Rightarrow$ et $\wedge$ définies à partir du treillis et en changeant les opérations $\dot{-}$ et $\vee$ selon le cas, en tenant compte de la dualité.

Indépendance de L9 Soit $A = \{0, a, b, 1\}$ la chaîne à quatre éléments munie des opérations $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, et $\dot{-}$ habituelles. Tous les axiomes sont vérifiés sauf L9 puisque

$$(b \Rightarrow a) \vee (((b \Rightarrow b) \dot{-} b) \Rightarrow (a \Rightarrow (a \dot{-} a))) = a \vee (1 \Rightarrow 0) = a \vee 0 = a \neq 1.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Birkhoff, G., *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, vol. XXV, 3rd Ed., Providence (1967).

[2] Dummet, M., "A propositional calculus with denumerable matrix," *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 24 (1959), pp. 97-106.

[3] Łukasiewicz, J., *Selected Works*, ed. L. Borkowski, Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam (1970).

[4] McKinsey, J. C. C., and A. Tarski, "On closed elements in closure algebras," *Annals of Mathematics*, vol. 47 (1946), pp. 122-162.

[5] Moisil, Gr. C., "Recherches sur l'algèbre de la logique," *Annales Scientifiques de l'Université de Jassy*, vol. 22 (1935), pp. 1-117.

[6] Moisil, Gr. C., "Recherches sur les logiques non-chrysippiennes," *Annales Scientifiques de l'Université de Jassy*, vol. 26 (1940), pp. 431-466.

[7] Moisil, Gr. C., "Notes sur les logiques non-chrysippiennes," *Annales Scientifiques de l'Université de Jassy*, vol. 27 (1941), pp. 86-98.

[8] Moisil, Gr. C., "Sur les idéaux des algèbres Łukasiewicziennes trivalentes," *Analele Universitatii C. I. Parhon*, Seria Acta Logica, vol. 3 (1960), pp. 83-95.

[9] Moisil, Gr. C., "Les logiques non-chrysippiennes et leurs applications," *Acta Philosophica Fennica*, vol. 16 (1963), pp. 137-152.

[10] Monteiro, A., "Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer," *Revista de la Unión Matemática Argentina*, vol. 17 (1955), pp. 149-160.

[11] Monteiro, A., "Linéarisation de la logique positive de Hilbert-Bernays," *Revista de la Unión Matemática Argentina*, vol. 20 (1962), pp. 308-309.

[12] Monteiro, A., *Linearización de la lógica positiva de Hilbert-Bernays*, Cours donné à l'Université Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina (1964).

[13] Rasiowa, H., and R. Sikorski, *The Mathematics of Methamathematics*, Monografie Matematyczne, Tom 41, Warszawa (1963).

[14] Rasiowa, H., *An Algebraic Approach to Non-classical Logics*, Studies in Logic, vol. 78, North-Holland, Amsterdam (1974).

[15] Rauszer, C., "Semi-Boolean algebras and their applications to intuitionistic logic with dual operations," *Fundamenta Mathematicae*, vol. LXXXIII (1974), pp. 219-249.

[16] Varlet, J. C., "Algèbres de Łukasiewicz trivalentes," *Le Bulletin de la Société Royal des Sciences de Liège*, vol. 36 (1968), pp. 399-408.

[17] Varlet, J. C., "Considérations sur les algèbres de Łukasiewicz trivalentes," *Le Bulletin de la Société Royal des Sciences de Liège*, vol. 38 (1969), pp. 462-469.

[18] Ward, M., "Structure residuation," *Annals of Mathematics*, vol. 39 (1938), pp. 558-568.

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca, Argentina