J. Math. Kyoto Univ.
2-3 (1963) 365-372.

Sur les valeurs exceptionnelles au sens de Picard d'une fonction entière de deux variables

Par

Toshio NISHINO

(Communiqué par Prof. A. Kobori, le 5 juillet, 1963)

Introduction

1. Étant donnée une fonction entière $f(x)$, il existe au plus une valeur finie α telle que l'équation $f(x)-\alpha=0$, n'a pas de racine. Cet énoncé a été donné en 1879 par *E. Picard*[1], et il joue depuis cette époque un rôle central dans la théorie des fonctions entières d'une variable complexe. On appelle *valeur exceptionnelle au sens de Picard* toute les valeurs que la fonction ne prend pas.

Étant donnée une fonction entière $F(x, y)$ de deux variables complexes x et y. On désigne par $\pi(y)$ la valeur exceptionnelle au sens de Picard de la fonction entière $F(x, y)$ de x pour y donné. La fonction $\pi(y)$ de y est, si elle existe, nécessairement uniforme. Quelle sorte de fonction est-t-elle?

Dans la théorie des fonctions entières de plusieurs variables complexes, c'est *P. Thullen*[2] qui a fait, pour la première fois, des recherches sur le problème de la distribution de points où la valeur d'une fonction entière est égale à une constante donnée. En 1934, il a montré: Soit $G(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ une fonction transcendante entière de variables complexes $z_1, z_2, \cdots, z_n$. Alors, pour toutes les valeurs finies α sauf une au plus, tous les points à l'infini sont des points singuliers essentiels de la surface analytique définie

1) E. Picard, Sur une propriété des fonctions entières (C. R. Paris, 1879).

2) P. Thullen, Über die wesentlichen Singularitäten analytischen Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen (Math. Ann. Bd. 111, 1934).

par l'équation $G(z_1, z_2, \cdots, z_n) - \alpha = 0$.

L'étude de la fonction $\pi(y)$ est, je pense, une des recherches profondes de ce problème.

2. Dans le présent mémoire, j'étudie, d'abord, des propriétés préliminaires de la fonction $\pi(y)$ sous la condition générale. On verra ici que, si $\pi(y)$ existe dans un domaine D du plan y, elle est continue en presque tous les points de D, mais elle peut avoir un point de discontinuité. Ce fait n'est pas nécessairement indispensable pour l'étude suivante. Dans la seconde partie, nous nous bornons à une fonction entière $F(x, y)$ d'ordre fini en x. Alors la fonction $\pi(y)$ est, si elle existe, une fonction méromorphe de y, et de plus, $F(x, y)$ se reduit à un polynôme de x quand y est un pôle pour $\pi(y)$. C'est à montrer ces faits que je destine le mémoire. Nous nous bornons dans ce mémoire à l'espace de deux variable complexes x et y pour la simplicité, mais la conclusion s'applique aux espaces d'un nombre quelconque de variables complexes.

Propriétés préliminaires de la fonction $\pi(y)$

3. Soit $F(x, y)$ une fonction entière de deux variables complexes x et y, c'est-à-dire, une fonction uniforme et holomorphe n'admettant aucune singularité à distance finie. On désigne par $\pi(y)$ une valeur exceptionnelle au sens de Picard de la fonction entière $F(x, y)$ d'une variable complexe x pour y donné[3]. Il n'existe pas nécessairement la fonction $\pi(y)$ pour tout y donné, et de plus, elle peut-être existe seulment pour un ensemble dénombrable de y qui n'a aucun point d'accumulation fini[4].

Soit $y_1, y_2, y_3, \cdots$ une suite de points dans le plan y qui tendent vers un point fini y_0. Supposons que $\pi(y)$ existe pour tout ces y_i $(i = 1, 2, \cdots)$ et que la suite $\pi(y_i)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ aie une limite finie α. Alors, *il existe $\pi(y)$ pour y_0 et $\pi(y_0) = \alpha$, pourvu que $F(x, y)$ ne soit pas une constante en y_0.*

---

3) Si $F(x, y)$ n'a pas la valeur exceptionnelle au sens de Picard pour y_0 ou bien elle se reduit à une constante en y_0 on dit tout court, "$\pi(y)$ n'existe pas pour y_0".

4) Par exemple, considérons

$$F(x, y) = e^x + f(y) \cdot e^{-x}$$

$f(y)$ étant une fonction entière de y qui a une infinité de racines, Pour l'effet, il suffit de voir que, si $F(x, y)$ prend une valeur finie β en y_0 sans se reduire à une constante, $F(x, y)$ prend actuellement toutes les valeurs β' dans un voisinage δ' de β suffisamment petit, pour tout point y' d'un voisinage suffisamment petit δ de y_0. C'est facile à démontrer.

On remarque ici que, si $F(x, y)$ se reduit à une constante β, il n'y a aucune relation entre la limite α de $\pi(y_i)$ et la valeur β. Par exemple, pour la fonction $y \cdot e^x$, en $y=0$, $\alpha=\beta$, cependant pour $e^{x \cdot y}$ on a $\alpha \neq \beta$.

Supposons maintenant qu'il existe $\pi(y)$ dans un domaine D. De ce que nous avons vu, $\pi(y)$ est discontinue en y_0 de D, si et seulement s'il y a une suite infinie de points $y_1, y_2, y_3, \cdots$ dans D qui tendent vers y_0 telle que

$$\lim \pi(y_i) = \infty .$$

On désigne par E l'ensemble de tous les points de discontinuité de $\pi(y)$ dans D. E est évidemment fermé dans D. De plus :

E ne contient aucun point intérieur.

En effet, supposons que $\pi(y)$ soit discontinue en tout point d'un ouvert γ, et désignons par e_n l'ensemble de tous les points y dans γ tels que $|\pi(y)| \leqq n$. Alors il y a une valeur N pour que e_N soit partout dense dans un ouvert γ' dans γ. D'après l'hypothèse il y a au moins un point y_0 dans γ' tel que $|\pi(y_0)| > 2N$. Cela contredit l'énoncé précédent, car y_0 est une limite de points de e_N.

C.Q.F.D.

Voilà un exemple de $\pi(y)$ qui est discontinue à l'origine. Considérons

$$F(x, y) = \frac{1}{y} \cdot e^{y \cdot e^x} - \frac{1}{y} .$$

Elle est certainement une fonction entière de x et y, et

$$\pi(y) = \frac{1}{y}$$

pour tout y sauf l'origine. On a évidemment $\pi(0)=0$.

4. Soit $F(x, y)$ une fonction entière. Considérons, dans l'espace de trois variables complexes x', y et z, une surface analytique Σ définie par l'équation

$$z-F\left(\frac{1}{x'}, y\right) = 0 .$$

Il est évident que la fermeture $\bar{\Sigma}$ de Σ est un ensemble pseudo-concave dans cet espace[5]. Désignons par $d(y', z')$ le diamètre de la section de $\bar{\Sigma}$ par le plan analytique $y=y'$, $z=z'$, et posons

$$\varphi(y, z) = \log d(y, z) .$$

$\varphi(y, z)$ est une fonction plurisousharmonique de y et z[6] sauf le point où $\varphi(y, z)=\infty$. De plus, on a $\varphi(y_0, z_0)=-\infty$, si et seulement si $F(x, y_0)$ ne prend pas la valeur z_0 à distance finie.

Étant donnée une fonction $f(y)$ holomorphe dans un domaine D du plan y. S'il existe $\pi(y)$ pour tout point y d'un ensemble de capacité non nulle[7] *dans D, et si elle y coïncide à la fonction $f(y)$, $\pi(y)$ existe pour tout y et coïncide à la fonction $f(y)$ identiquement dans D sauf peut-être au point où $F(x, y)$ est une constante.*

En effet, la fonction $\varphi(y, f(y))$ est subharmonique qui prend la valeur $-\infty$ en un ensemble de capacité non nulle, donc il faut qu'elle se reduire à la constante $-\infty$.

D'ou, s'il existe $\pi(y)$ pour tout point y d'un ensemble de capacité non nulle du plan y et elle y coïncide à une valeur α, $\pi(y)$ existe pour tout y fini sauf peut-être au point où $F(x, y)$ est une constante et y coïncide à α identiquement. Cet énoncé a été déjà donné en 1942 par *P. Lelong*[8].

De plus, si $\pi(y)$ est une fonction analytique par rapport aux deux variables reelles y_1 et y_2, où $y=y_1+i\cdot y_2$ (i étant l'unité imaginaire) dans un domaine D, elle est une fonction holomorphe de y dans D.

---

5), 6) Je doit ces notions à K. Oka. Voir, T. Nishino: Sur les ensembles pseudo-concaves (J. of Math., Kyoto University, Vol. 1, 1962).

7) Pour l'idée de capacité voir, par exemple, De La Vallée Poussin: Note II, Annale de L'Institute Henri Poincaré, 1932.

8) P. Lelong, Sur les valeurs lacunaires d'une relation à deux variables (Bull. des Sci. Math. Vol. 66, 1942). Il a montré, dans ce mémoire, que si une fonction entière $F(x, y)$ est d'ordre finie en x l'ensemble de tous les points y où $\pi(y)=0$ n'a aucun point d'accumulation fini.

Cas d'ordre fini en x.

5. Soit $F(x, y)$ une fonction entière de x et y, et désignons par $M(r, y)$ le maximum de $|F(x, y)|$ dans le cercle $|x| \leqq r$ pour y donné. On définit l'ordre $\rho(y)$ de $F(x, y)$ pour y donné par

$$\rho(y) = \overline{\lim} \frac{\log \log M(r, y)}{\log r}.$$

Comme on sait bien, $\rho(y)$ a une valeur constante ρ_0, nulle, finie ou infinie pour tout point y, sauf peut-être en un ensemble de points de capacité nulle où l'on a $\rho(y) < \rho_0$[9]. On dit que $F(x, y)$ *est d'ordre fini en* x si ρ_0 est fini. Dans ce qui suit, supposons que $F(x, y)$ est toujours d'ordre fini en x. S'il existe $\pi(y')$ pour y', $\rho(y')$ est nécessairement un entièr positif, et on peut écrire

$$F(x, y') = e^{g(x, y')} + \pi(y'),$$

$g(x, y')$ étant un polynôme de x du degré $\rho(y')$[10].

Or, supposons que $\pi(y)$ existe pour tout point y dans un domaine D, alors, je dit qu'elle est holomorphe dans D.

En effet, on peut d'abord supposer, sans restreindre la généralité, que $F(x, y)$ est identiquement nulle en $x=0$. Soit $C_0(y)$ une fonction uniforme et continue de y qui ne prend pas la valeur nulle dans D. $F(x, y)$ peut être exprimé comme ce qui suit :

$$F(x, y) = \frac{1}{C_0(y)} e^{g(x, y)} - \frac{1}{C_0(y)},$$

où $g(x, y)$ est une fonction holomorphe de x pour tout y dans D et peut être exprimée par

$$g(x, y) = \frac{C_1(y)}{1!} x + \frac{C_2(y)}{2!} x^2 + \frac{C_3(y)}{3!} x^3 + \cdots,$$

où $C_i(y)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ sont les fonctions uniformes et continues de y déterminées par $C_0(y)$, de plus, cette égalité s'établit dans $|x| < r(y)$,

9) P. Lelong, Sur les l'ordre d'une fonction entière de deux variables. (C. R. Paris, 1940).

10) Voir, par exemple, G. Valiron, Lectures on the general theory of integral function, 1923.

$r(y)$ étant le plus petit module des racines de l'équation donné $F(x, y)+\frac{1}{C_0(y)}=0$ pour y. En prenant successivement dérivée partielle par rapport à x et en posant $x=0$, on obtient une infinité d'équations suivantes

$$C_1(y)-C_0(y)\cdot f_1(y) = 0\,, \quad C_2(y)+[C_1(y)]^2-C_0(y)\cdot f_2(y) = 0\,, \cdots$$
$$C_n(y)+Q_n[C_1(y), \cdots, C_{n-1}(y)]-C_0(y)\cdot f_n(y)= 0\,, \cdots$$

Q_n $(n=1, 2, \cdots)$ étant les polynômes de coefficients entiers de $C_1(y)$, $\cdots$, $C_{n-1}(y)$ et $f_n(y)=\left.\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right|_{x=0}$. On peut donc obtenir tout $C_n(y)$ $(n=1, 2, \cdots)$ par le polynôme de $C_0(y)$ dont les coefficients sont des fonctions entières de y, désignons les par

$$C_n(y) = R_n(y, C_0(y))\,.$$

Or, si $\pi(y)=-\frac{1}{C_0(y)}$, par l'hypothèse $R_n(y, C_0(y))$ sont identiquement nulles pour tout n dès que n surpasse ρ_0, c'est-à-dire $C_0(y)$ est la racine commune des équations de y et Z qui sont des polynômes de Z comme ce qui suit :

$$R_n(y, Z) = 0 \qquad n = \rho_0+1,\ \rho_0+2, \cdots\,.$$

On peut donc affirmer, grâce à *Weierstrass*, qu'elle est une fonction holomorphe de y. C.Q.F.D.

6. Envisageons les équations suivantes

$$R_n(y, Z) = 0\,, \qquad n = \rho_0+1,\ \rho_0+2, \cdots\,.$$

Un point (y', Z'), où $Z'\neq 0$, est dans l'espace de deux variables complexes y et Z une racine commune de toutes les équations ci-dessus, si et seulement si $F(x, y')$ ne prend pas la valeur $-\frac{1}{Z'}$ à distance finie.

Supposons maintenant qu'il existe $\pi(y)$ pour tout point d'un ensemble de y qui a, au moins, un point d'accumulation fini. Considérons, dans l'espace de y et Z, une famille de surfaces analytiques (S_n) définies par les équations $R_n(y, Z)=0$, $(n=\rho_0+1$, $\rho_0+2, \cdots)$. Elles ont, par l'hypothèse, une infinité de points communs tels que leurs projections sur le plan y ont au moins un point d'accumulation fini. Donc tout S_n ($n=\rho_0+1$, $\rho_0+2, \cdots$) contient au moins un composant analytique commun[11]. On le désigne par S_0. Il est évident que S_0 peut être donné, par l'équation

$$Z = f(y),$$

$f(y)$ étant, grâce à *Weierstrass*, une fonction méromorphe. Substituant $C_0(y)$ par $f(y)$ dans $R_n(y, C_0(y))$ ($n=1, 2, \cdots, \rho_0$) on obtient une fonction $g(x, y)$ de x et y. On voit facilement qu'elle est une fonction entière, et que $F(x, y)$ peut être exprimé au moyen de la fonction $g(x, y)$, par la forme suivante,

$$F(x, y) = \frac{1}{f(y)} e^{g(x, y)} - \frac{1}{f(y)}$$

dans tout espace de x et y. Donc $\pi(y) = -\dfrac{1}{f(y)}$ identiqument pourvu qu'elle soit finie, sauf peut-être pour point y où $F(x, y)$ est une constante.

Nous allons étudier $F(x, y)$ pour le pôle de $\pi(y)$. Soit y_0 une racine de l'équation $f(y)=0$. La fonction $g(x, y)$ doit être identiquement nulle en y_0 car la fonction $g(x, y)/f(y)$ est certainement une fonction entière de x et y. Donc $F(x, y)$ se reduit à un polynôme de degré ρ_0 au plus de x à ce pôle.

D'après ce que nous avons vu jusqu'ici, on a le

Théorème. *Soit $F(x, y)$ une fonction entière d'ordre fini en x. S'il existe $\pi(y)$ pour tous les points d'un ensemble dans le plan y qui a, au moins, un point d'accumulation fini, il existe une fonction $\xi(y)$ méromorphe de y, à qui $\pi(y)$ coïncide à tout point y sauf an point où $F(x, y)$ se reduit à une constante, ou bien où $\xi(y)$ prend la valeur infinie. $F(x, y)$ se reduit à un polynôme de x au pôle de $\xi(y)$.*

Il est évident qu'il y a actuellement une telle fonction entière. Par exemple, la fonction entière

$$F(x, y) = \frac{1}{f(y)} e^{x \cdot f(y)} - \frac{1}{f(y)}$$

---

11) Pour les terms voir, par exemple, R. Remmert und K. Stein : Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen (Math, Annalen, Bd. 126, 1953),

$f(y)$ étant une fonction entière de y qui prend la valeur zéro. Elle se reduit à x en tout y où $f(y)=0$.