J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
16-1 (1976) 123-136

Sur l'existence des intégrales d'un système d'équations différentielles aux fonctions inconnues de nombre infini

Par

Jôyô KANITANI

(Communiqué par Prof. Toda, le 11 décembre, 1974)

Résumé

Dans un article précédent ([4], p. 10) on a démontré que le chemin horizontal au dessus d'un chemin contenu dans une variété différentiable admtettant les homéomorphismes locaux à l'espace projectif à dimension infinie peut se déterminer au moyen d'un système d'équations différentielles de la même forme qu'à la variété différentiable à dimension finie. Ce système s'agit cependant des fonctions inconnues de nombre infini. Cet article a pour but de prouver l'existence de ses intégrales.

1. Soient S l'espace projectif à dimension infinie, et (A_i) $(i \in I)$ une base de S. Nous supposons que l'ensemble I d'indices est équipotent à l'ensemble (A_i) $(i \in I)$, et qu'il possède, conformément le théorème de Zermelo, un bon ordre. Soit ι l'élément le plus petit de I. En associant une famille des points d'unité $(U_{i_0 \cdots i_r})$ $((i_0, \cdots, i_r)$: sous-famille finie de $I)$ à la base (A_i) $(i \in I)$, on peut former un repère $\mathfrak{A}$ par rapport auquel un point P de S possède les coordonnées homogènes (x^i) $(i \in I)$ ([1], p. 3; [2], p. 1). Les points (A_i) $(i \in I)$ se nomment les sommets de ce repère qui se note $\mathfrak{A}(A_i)$. D'après la définition de base, on a $x^i = 0$ sauf pour un nombre fini des indices i. On appelle $x^i / \sum_s |x^s|$ $(i \in I)$ les coordonnées normales du point $P(x)$.

Nous désignerons désormais et sauf mention expresse du contraire par (x^i) $(i\in I)$ les coordonnées normales du point x. De plus, lorsque $x^{j_0}, \cdots, x^{j_m} (j_0<\cdots<j_m)$ sont les coordonnées normales $\neq 0$ du point x, nous conviendrons de faire $x^{j_0}>0$ de sorte qu'on ait $0<x^{j_0}=1-|x^{j_1}|-\cdots-|x^{j_m}|$, les coordonnées normales de x étant ainsi uniquement déterminées.

Prenons un point a. Soit λ un nombre qui ne dépasse pas mini. $(|a^i|\neq 0)$. L'ensemble des points x satisfaisant à l'inégalité $|x^i-a^i|<\lambda$ se note $\mathfrak{C}(a, \lambda)$ et se nomme cube projective de centre a et de largeur λ. On a $x^i\neq 0$ pourvu que $a^i\neq 0$, et alors x^i est de même signe que a^i. On doue l'espace S de la topologie où l'ensemble des cubes projectifs est une base.

2. Envisageons une transformation projective T dans S (une application bijective $S\to S$ qui entraîne une correspondance bijective entre les droites en conservant la relation d'inclusion). Soit

$$A_i'=T(A_i),\ U'_{i_0\cdots i_r}=T(U_{i_0\cdots i_r}).$$

Nous obtenons alors un repère $\mathfrak{A}'$ de sommets $A_i'(i\in I)$, et de points d'unité $U'_{i_0\cdots i_r}((i_0, \cdots, i_r)\subset I)$. Cette transformation T est dite attachée au changement de repère $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}'$. Inversement, pour tout couple de deux repères dans S, il existe une et unique transformation projective attachée au changement de l'un à l'autre ([2], p. 3).

Soient $(p_j{}^i)$ $(i, j\in I;\ p_j{}^i=0$ pour chaque j sauf pour un nombre fini des indices $i)$ les coordonnées homogènes du sommet A_j' par rapport au repère $\mathfrak{A}(A_i)$. La transformation T projective attachée au changement de repère $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}'$ s'exprime par

$$\rho x'^i=\sum_j p_j{}^i x^j \qquad (\rho\neq 0).$$

Lorsque les $p_j{}^i$ sont les coordonnées normales de A_j' cette transformation est dite normale $(\sum_i|p_j{}^i|=1(j\in 1))$. Si l'on désigne par $q_j{}^i$ les coordonnées homogènes du sommet A_j par rapport au repére $\mathfrak{A}'$, l'inverse T^{-1} de T est donnée par

$$\sigma x^j=\sum_i q_i{}^j x'^i.$$

Lorsque la transformation T est normale, il en est de même pour

T^{-1} et on a

$$\sum_l p_l^i q_j^l = \sum_l q_l^i p_j^l = \delta_j^i.$$

De plus, si les transformations T et T' sont normales, il en est ainsi pour la transformation composée

$$T' \circ T: \qquad \tau x'^i = \sum_{l,m} p_l'^i p_m^l x^m$$

de sorte qu'on a ([4], p. 11)

$$\sum_i \left| \sum_l p_l'^i p_j^l \right| = 1 \qquad (j \in I). \tag{2. 1}$$

Nous pouvons induire sur l'ensemble des transformations projectives normales dans S la topologie de l'ensemble produit S^I de sorte qu'il forme un groupe topologique $\mathfrak{G}$ ([2], p. 10).

Pour la transformation pojective normale T qui laisse invariant le cube projectif $\mathfrak{C}_\iota = \mathfrak{C}(A_\iota, 1)$, on a

$$p_\iota^\iota q_\iota^\iota = 1, \ p_l^\iota = q_l^\iota = 0 \qquad (l \in I' = I - \{\iota\}).$$

Elle opère sur $\mathfrak{C}_\iota$ comme un automorphisme. Si elle conserve de plus le sommet A_ι, on a

$$p_\iota^\iota = q_\iota^\iota = 1, \ p_\iota^l = q_\iota^l = 0 \qquad (l \in I' = I - \{\iota\})$$

de sorte que son équation s'écrit

$$\xi'^i = \sum_j p_j^i \xi^j \qquad \left(i, j \in I'; \ \xi^i = \frac{x^i}{x^\iota}\right).$$

L'ensemble G_ι de telles transformations forme un sous-groupe de $\mathfrak{G}$; nous pouvons induire sur G_ι la topologie de $\mathfrak{G}$. Cela revint à dire qu'on induit sur G_ι la topologie du produit $\mathfrak{B}^{I'}$ où l'ensemble d'aririvée $\mathfrak{B}$ est la frontiére de $\mathfrak{C}_\iota$.

Cela étant fait, à chaque transformation projective normale $p = (p_j^i) \in G_\iota$, il correspond une application de l'indice $j \in I'$ au point $p_j = (p_j^i) \in \mathfrak{B}$. Or, la topologie de $\mathfrak{B}^{I'}$ admet pour base l'ensemble des produits

$$\prod_{j \in I'} U_j$$

où U_j coïncide avec $\mathfrak{B}$, si l'on laisse à coté certains indices $j_1, \cdots, j_l$

de nombre fini pour lesquels on a

$$U_{j_s} = \mathfrak{C}(p_{j_s}, \varepsilon) \cap \mathfrak{B} \qquad (p_{j_s} \in \mathfrak{B}) \qquad (s = 1, \cdots, l).$$

Ce produit est donc l'image d'un voisinage $\mathfrak{U}_p$ de la transformation $p \in G_\iota$ sous l'application Θ définie par la crrespondance dont nous venons de mentionner.

3. Soit $p = (p_j{}^i)$ un élément (une transformation projective normale) de G_ι. Pour chaque indice $j \in I'$, il existe un ensemble fini nonvide des indices $i \in I'$ tels que $p_j{}^i \neq 0$. Soit $i_0(p, j)$ l'élément le plus petit de cet ensemble. On peut prendre $(p_j{}^i)$ $(i \neq i_0(p, j);\ i, j \in I')$ comme coordonnées de la transformation p. Envisageons ensuite une transformation $\zeta \in \mathfrak{U}_p$. L'image $(\Theta\zeta)I'$ est l'ensemble des sommets $(A_i{}')$ $(i \in I')$ du repère $\mathfrak{A}'$ tel que la transformation ζ est attachée au changement de repère $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$. Cela revient à dire qu'on peut prendre comme les coordonnées de l'application $\Theta\zeta$, celles de la transformatoin ζ. Or, si

$$\zeta_{j_s} \in \mathfrak{C}(p_{j_s}, \varepsilon) \cap \mathfrak{B},$$

il vient

$$|\zeta^i_{j_s} - p^i_{j_s}| < \varepsilon \qquad (\zeta^i_{j_s} = p^i_{j_s} = 0),$$

en particulier,

$$0 < p^{i_0(p, j_s)}_{j_s} - \varepsilon < \zeta^{i_0(p, j_s)}_{j_s}.$$

Nous pouvons donc prendre les $\zeta^i_{j_s} (i \neq i_0(p, j_s);\ i, j \in I')$ comme coordonnées de ζ_{j_s}. En effet, cela revient à la convention mentoinnées plus haut, si l'indice i_0 est le plus petit d'indices i tels que $\zeta^i_{j_s} \neq 0$. Au cas contraire, en prenant $\zeta^{i_0'}_{j_s}$, où i_0' est l'indice le plus petit comme une des coordonnées locales, on peut écrire

$$\zeta^{i_0}_{j_s} = 1 - \zeta^{i_0'}_{j_s} - \sum_{i \neq i_0, i_0'} |\zeta^i_{j_s}|.$$

Lorsque $p = (p_j{}^i)$ est l'élément neutre (une identité) de G_ι on a

$$p_j{}^i = \delta_j{}^i;\ i_0(p, j) = j;\ 0 \leq 1 - \zeta^{j_s}_{j_s} = \sum_{i \neq j_s} |\zeta^i_{j_s}| < \varepsilon < 1.$$

Le vecteur tangent λ à G_ι en élément neutre e s'exprime sous la forme

$$\lambda = \sum_{i,j} \lambda_j{}^i \frac{\partial}{\partial e_j{}^i} \qquad (i \neq j),$$

où on a $\lambda_j{}^i = 0$ sauf pour un nombre fini des couples d'indices $(i, j) \in I' \times I' - \varDelta$ (I, p. 11). Les coordonnées normales $\rho_j{}^i$ de ce vecteur λ sont définies par

$$\rho_j{}^j = \frac{1}{1 + \sum\limits_{i \neq j} |\lambda_j{}^i|}, \quad \rho_j{}^i = \frac{\lambda_j{}^i}{1 + \sum\limits_{i \neq j} |\lambda_j{}^i|} \qquad (i \neq j),$$

d'où

$$0 < \rho_j{}^j \leq 1, \quad \sum_i |\rho_j{}^i| = 1 .$$

Ainsi, l'espace $T(e)$ de vecteurs tangents à G_ι en e peut se représenter par un sous-espace de G_ι. Si $\rho_j{}^j = 1$ pour tout $j \in I'$ (i.e. $\rho_j{}^i = 0$ $(i \neq j)$), ρ est l'élément neutre de l'espace $T(e)$. Il est représenté par l'élément neutre e. Supposons ensuite qu'il existe un ensemble nonvide des indices j tels que $\rho_j{}^i \neq 0$ $(i \neq j)$. Comme nous l'avons remarqué plus haut, il est fini: il s'écrit (j_s) $(1 \leq s \leq l)$. A chaque j_s il correspond un ensemble fini nonvide des indices i satisfaisant à l'inégalité $\rho^i_{j_s} \neq 0$. Le nomble le plus grand de tels indices pour $s = 1, \cdots, l$ se note $\nu(\rho)$. L'élément représentatif $\rho \in G_\iota$ du vecteur $\rho = (\rho_j{}^i)$ admet ainsi un voisinage ouvert $\tilde{\mathfrak{U}}_\rho$ ([4], p. 5, ligne 2 de bas) tel que $\Theta\zeta$ $(\zeta \in \tilde{\mathfrak{U}}_\rho)$ fait correspondre à $j_s (1 \leq s \leq l)$ un point de

$$U_{j_s} = \mathfrak{S}(\rho_{j_s}, \varepsilon_\rho) \cap \mathfrak{P} \qquad \left(0 < \varepsilon_\rho < \frac{1}{2\nu(\rho)} \text{ mini. } (|p^i_{j_s}| \neq 0)\right),$$

et à $j (\neq j_s)$ le sommet A_j.

4. Etant donné un élément $(g_j{}^i)_a$ de G_ι, envisageons, sur $T(e)$, un chemin $\rho = \psi(t)$ homémorphe à l'intervalle $[t_a, t_{a+1}]$ $(0 \leq t_a < t_{a+1} \leq 1$; [4], p. 7), tel que

$$\rho_j(t) \in \mathfrak{S}(\delta_j, \varepsilon) \qquad (0 < \varepsilon < \tfrac{1}{4}\kappa_j;\ \kappa_j = \text{mini. } (|(g_j{}^i)_a| \neq 0))$$

ou bien, pour tout $(g_j{}^i)_a \neq 0$,

$$(4.1) \qquad 1 - \rho_j{}^j(t) = \sum_{k \neq j} |\rho_j{}^k(t)| < \tfrac{1}{4}\kappa_j \leq \tfrac{1}{4} |(g_j{}^i)_a| .$$

Nous allons démontrer, en utilisant la méthode d'approximation successive, que le système d'équations différentielles

$$\frac{dg_j{}^i}{dt} = \sum_{k \neq j} (\rho_j{}^k(t) g_k{}^i - |\rho_j{}^k| g_j{}^i)$$

aux fonctions inconnues $g_j{}^i(t)$ $(t \in [t_a, t_{a+1}])$ de nombre infini admet un système unique des intégrales qui prennent les valeurs initiales $(g_j{}^i)_a$ $(i, j \in I')$ au point t_a ([4], p. 10; on prend les $\rho_j{}^k$ et leurs signes à la place des coordonnées locales $\lambda_j{}^k$ et des signes σ_k, car ceux-ci proviennent des signes des coordonnées locales d'un élément a_{j_s} assez viosin de l'élément neutre).

Considérons d'abord l'intégrale

$$\int_{t_a}^{t} (\sum_{k \neq j} (\rho_j{}^k(u) (g_k{}^i)_a - |\rho_j{}^k(u)| (g_j{}^i)_a) du$$

$$= \int_{t_a}^{t} (\sum_{l} \rho_j{}^l(u) (g_l{}^i)_a - (g_j{}^i)_a) du .$$

L'ensemble des voisinages $\mathfrak{U}_{p(u)}$ $(t_a \leq u \leq t \leq t_{a+1})$ où

$$U_{j_s} = \mathfrak{C}(p_{j_s}, \varepsilon_p) \qquad \left(\varepsilon_p < \frac{1}{2\nu(p)} \text{ mini. } (|p^i_{j_s}| \neq 0)\right),$$

forme un recouvrement ouvert du chemin $L = \psi(u)$ $(t_a \leq u \leq t)$ qui est homéomorphe par l'hypothèse à l'intervalle $[t_a, t]$ et donc compact. Nous pouvons en extraire un recouvrement fini et donc partager le chemin L, au moyen des nombres $t_a = \bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \cdots < t$, en parties de nombre fini dont chacune $\psi_c(u)$ $(\bar{t}_c \leq u \leq \bar{t}_{c+1})$ est contenue dans un voisinage $\mathfrak{U}_{p(u)}$ appartenant à ce recouvrement fini. La superposition des subdivisions $(\bar{t}_0 (= t_a), \bar{t}_1, \cdots, t)$ et $(t_a, (t_a + t)/2, t)$ de l'intervalle $[t_a, t]$ se note $(\tau_0 (= t_a), \tau_1, \cdots, t)$. Soit m_0 le minimum des longuers $\tau_{c+1} - \tau_c$ $(c = 0, 1, \cdots)$ de ces sous-intervalles. Posons

$$M^i_{j,0} = \sum_{c} (\sum_{l} \rho_j{}^l(\bar{\tau}_c) (g_l{}^i)_a - (g_j{}^i)_a) (\tau_{c+1} - \tau_c) \qquad (\tau_c \leq \bar{\tau}_c \leq \tau_{c+1}).$$

On a $M^i_{j,0} = 0$, si $j \neq j_s$.

Considérons ensuite le recouvrement formé par les voisinages $\mathfrak{U}'_{p(u)}$ $(t_a \leq u \leq t)$ où

$$U'_{j_s} = \mathfrak{C}(p_{j_s}, \varepsilon_p{}') \qquad \left(\varepsilon_p{}' < \frac{1}{4\nu(p)} \text{ mini. } (|p^i_{j_s}| \neq 0)\right),$$

tels que les longuers des sous-intervalles $\psi^{-1}(\mathfrak{U}'_{p(u)}\cap L)$ soient moindre que $m_0/2$, et extrayons en un recoruvrement fini. Partageons le chemin L au moyen des nombres $t_a=\bar{t}_0'<\bar{t}_1'<\cdots<t$ de telle sorte que cela divise chaque sous-chemin $(\tau_c\leq u\leq\tau_{c+1};\ c=0, 1, \cdots)$, en parties de nombre fini dont chacune est contenue dans un viosinage $\mathfrak{U}'_{p(u)}$ appartenant à ce recouvrement fini. La superposition de la subdivision $(\bar{t}_0'(=t_a), \bar{t}_1', \cdots, t)$ et de $(t_a, (t_a+t)/4, (t_a+t)/2, 3(t_a+t)/4, t)$ se note $(\tau_0'(=t_a), \tau_1', \cdots, t)$ et ainsi de suite.

Posons

$$M^i_{j,1}=\sum_c\Big(\sum_l\rho_j{}^l(\bar{\tau}_c')\,(g_l{}^i)_a-(g_j{}^i)_a\Big)(\tau'_{c+1}-\tau_c')\quad(\tau_c'\leq\bar{\tau}_c'\leq\tau'_{c+1}),$$

$$M^i_{j,n}=\sum_c\Big(\sum_l\rho_j{}^l(\bar{\tau}_c{}^{(n)})\,(g_l{}^i)_a-(g_j{}^i)_a\Big)(\tau^{(n)}_{c+1}-\tau_c{}^{(n)})\quad(\tau_c{}^{(n)}\leq\bar{\tau}_c{}^{(n)}\leq\tau^{(n)}_{c+1}),$$

les $\tau_0{}^{(n)}, \tau_1{}^{(n)}, \cdots$ étant les points de la $(n+1)$-ième subdivision de l'intervalle $[t_a, t]$, dont chaque couple de deux points adjacents détermine un sous-chemin L_c contenu dans un voisinage $\mathfrak{U}^{(n)}_{p(u)}$ $(t_0\leq u\leq t)$ où

$$U^{(n)}_{j_s}=\mathfrak{C}(p_{j_s}, \varepsilon_p{}^{(n)})\qquad\left(0<\varepsilon_p{}^{(n)}<\frac{1}{2^{(n+1)}\nu(p)}\ \text{mini.}\ (|p^i_{j_s}|\neq 0)\right)$$

de sorte que pour toute valeur v du sous-intervalle limité par ces deux points adjacents on a

$$(4.2)\qquad \sum_i|\rho^i_{j_s}(v)-p^i_{j_s}|<\nu(p)\,\varepsilon_p{}^{(n)}<\frac{1}{2^{n+1}}\,.$$

On a de plus

$$(4.3)\qquad \tau^{(n)}_{c+1}-\tau_c{}^{(n)}\leq\frac{1}{2^{n+1}}\qquad(c=0, 1, \cdots).$$

Nous obtenons ainsi une suite $(M^i_{j,0}, M^i_{j,1}, \cdots, M^i_{j,n}, \cdots$, chaque membre étant nul si $j\neq j_s$. Celle-ci est convergente. En effect, comme chaque sous-intervalle $[\tau_c{}^{(n)}, \tau^{(n)}_{c+1}]$ dans la $(n+1)$-ième subdivision se décompose d'après définition, en parties $[\tau^{(n+r)}_{d_0(c)}, \tau^{(n+r)}_{d_1(c)}], \cdots, [\tau^{(n+r)}_{d_{k-1}(c)}, \tau^{(n+r)}_{d_k(c)}]$ par la $(n+r+1)$-ième subdivision, on a grâce à (4.2), (4.3)

$$|M^i_{j,n+r}-M^i_{j,n}|=\Big|\sum_c\Big\{\sum_{t=0}^{k-1}\Big(\sum_l\rho_j{}^l(\bar{\tau}^{(n+r)}_{d_t(c)})\,(g_l{}^i)_a$$

$$-(g_j{}^i)_a\Big)(\tau^{(n+r)}_{d_{t+1}(c)}-\tau^{(n+r)}_{d_t(c)})$$

$$-\big(\sum_l \rho_j{}^l(\bar{\tau}_c{}^{(n)})\,(g_l{}^i)_a-(g_j{}^i)_a\big)\,(\tau_{c+1}^{(n)}-\tau_c{}^{(n)})\}\,|$$

$$=\Big|\sum_c\sum_l\Big\{\sum_{t=0}^{k-1}(\rho_j{}^l(\bar{\tau}_{d_t(c)}^{(n+r)})-p_j{}^l)\,(g_j{}^i)_a\,(\tau_{d_{t+1}(c)}^{(n+r)}-\tau_{d_t(c)}^{(n+r)})$$

$$-(\rho_j{}^l(\bar{\tau}_c{}^{(n)})-p_j{}^l)\,(g_l{}^i)_a)\,(\tau_{c+1}^{(n)}-\tau_c{}^{(n)})\Big\}\Big|$$

$$\leq\sum_c\sum_l\Big\{\sum_{t=0}^{k-1}|\rho_j{}^l(\bar{\tau}_{d_t(c)}^{(n+r)})-p_j{}^l|\,(\tau_{d_{t+1}(c)}^{(n+r)}-\tau_{d_t(c)}^{(n+r)})+|\;{}^{,,}\;|\Big\}$$

$$\leq\sum_c\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{t=0}^{k-1}(\tau_{d+1(c)}^{(n+r)}-\tau_{d_t(c)}^{(n+r)})+\frac{1}{2^{n+1}}\,(\tau_{c+1}^{(n)}-\tau_c{}^{(n)})\Big)$$

$$=\frac{1}{2^n}\,(t-t_a)$$

$$(\tau_{d_t(c)}^{(n+r)}\leq\bar{\tau}_{d_t(c)}^{(n+r)}\leq\tau_{d_{t+1}(c)}^{(n+r)},\quad \tau_c{}^{(n)}\leq\bar{\tau}_c{}^{(n)}\leq\tau_{c+1}^{(n)})$$

ce qui nous montre que la suite considérée est uniformément convergent dans $[t_a, t]$.

Nous définissons ainsi

$$\lim_{n\to\infty}M_{j,n}^i=\int_{t_a}^t\big(\sum_l\rho_j{}^l(u)\,(g_l{}^i)_a-(g_j{}^i)_a\big)\,du\qquad(i,j\in I').$$

Posons

$$(4.4)\qquad g_{j,1}^i=(g_j{}^i)_a+\int_{t_a}^t\big(\sum_l\rho_j{}^l(u)\,(g_l{}^i)_a-(g_j{}^i)_a\big)\,du\qquad(i\neq i_0((g)_a,j)).$$

5. Puisque, en vertu de (4. 1),

$$\sum_i\Big|\sum_l\rho_j{}^l(u)\,(g_l{}^i)_a-(g_j{}^i)_a\Big|$$

$$\leq\sum_i|(g_j{}^i)_a|\cdot|\rho_j{}^j(u)-1|+\sum_i\sum_{k\neq j}|(g_k{}^i)_a||\rho_j{}^k|<\tfrac{1}{2}\,\kappa_j\,,$$

il suit de (4. 4)

$$\sum_{i\neq i_0}|g_{j,1}^i|\leq1-(g_j{}^{i_0})_a+\int_{t_0}^t\sum_i\Big|\sum_l\rho_j{}^l(u)\,(g_l{}^i)_a-(g_j{}^i)_a\Big|du$$

$$\leq1-(g_j{}^{i_0})_a+\tfrac{1}{2}(t-t_a)\,\kappa_j\leq1-\tfrac{1}{2}(g_j{}^{i_0})_a\,.$$

Donc, en posant

$$g_{j,1}^{i_0}=1-\sum_{i\neq i_0}|g_{j,1}^i|\,,$$

on obtient

$$(5.1)\qquad g^{i_0}_{j,1} \geq \tfrac{1}{2}(g_j{}^{i_0})_a > 0 .$$

En somme on a, pour tout j,

$$(5.2)\qquad \sum_i |g^i_{j,1}| = 1 .$$

On a aussi

$$(5.3)_1\qquad |g^i_{j,1} - (g_j{}^i)_a| \leq \tfrac{1}{2}(t-t_a)\kappa_j < \tfrac{1}{2} \qquad (i \neq i_0;\ j \in I').$$

$$(5.3)_2\qquad |g^{i_0}_{j,1} - (g_j{}^{i_0})_a| = |\sum_{i\neq i_0} |(g_j{}^i)_a| - \sum_{i \neq i_0} |(g^i_{j,1})||$$

$$= |\sum_{i\neq i_0} (|(g_j{}^i)_a| - |g^i_{j,1}|)| \leq \sum_{i\neq i_0} |g^i_{j,1} - (g_j{}^i)_a|$$

$$\leq \sum_{i\neq i_0} \tfrac{1}{2}\int_{t_a}^t \kappa_j du \leq \tfrac{1}{2}\int_{t_a}^t \sum_i |(g_j{}^i)_a| du$$

$$= \tfrac{1}{2}(t-t_a) \leq \tfrac{1}{2} .$$

De même, on a

$$(5.4)_1\qquad |g^i_{j,1}(v) - g^i_{j,1}(u)| \leq \left| \int_u^v (\sum_l \rho_j{}^l(u)\,(g_l{}^i)_a - (g_j{}^i)_a)du \right|$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\,\kappa_j |v-u| \leq \tfrac{1}{2}|v-u|$$

$$(i\neq i_0;\ t_a \leq u,\ v \leq t_{a+1}),$$

$$(5.4)_2\qquad |g^{i_0}_{j,1}(v) - g^{i_0}_{j,1}(u)| \leq \sum_i \tfrac{1}{2}\,|(g_j{}^i)_a||v-u| \leq \tfrac{1}{2}\,|v-u| .$$

En remplaçant, dans $M^i_{j,n}(n=0, 1, \cdots)$, $(g_l{}^i)_a$ par $g^i_{l,1}(t)$ nous obtenons la suite $(M^i_{j,10}, M^i_{j,11}, \cdots, M^i_{j,1n}, \cdots)$. En fait de la différence $M^i_{j,1n+r} - M^i_{j,1n}$ on a, en vertu de (4.2), (4.3), (5.2), $(5.4)_1$ et $(5.4)_2$,

$$|M^i_{j,1n+r} - M^i_{j,1n}| = |\sum_c \{\sum_{t=0}^{k-1} (\sum_l \rho_j{}^l(\bar\tau^{(n+r)}_{d_t(c)})\, g^i_{l,1}(\bar\tau^{(n+r)}_{d_t(c)})$$

$$- g^i_{j,1}(\bar\tau^{(n+r)}_{d_t(c)}))\,(\tau^{(n+r)}_{d_{t+1}(c)} - \tau^{(n+r)}_{d_t(c)})$$

$$- (\sum_l \rho_j{}^l(\bar\tau_c{}^{(n)})\, g^i_{l,1}(\bar\tau_c{}^{(n)}) - g^i_{j,1}(\bar\tau_c{}^{(n)}))\,(\tau^{(n)}_{c+1} - \tau_c{}^{(n)})\}|$$

$$= |\sum_c \sum_l \{(\sum_{t=0}^{k-1} \rho_j{}^l(\bar\tau^{(n+r)}_{d_t(c)}) - p_j{}^l)\, g^i_{l,1}(\bar\tau^{(n+r)}_{d_t(c)})\,(\tau^{(n+r)}_{d_{t+1}(c)} - \tau^{(n+r)}_{d_t(c)})$$

$$- (\rho_j{}^l(\bar\tau_c{}^{(n)}) - p_j{}^l)\, g^i_{l,1}(\bar\tau_c{}^{(n)})\,(\tau^{(n)}_{c+1} - \tau_c{}^{(n)})$$

$$+p_j{}^l\Big(\sum_{t=0}^{k-1}(g^i_{l,1}(\bar{\tau}^{(n+r)}_{d_t(c)})-g^i_{l,1}(\bar{\tau}_c{}^{(n)})(\tau^{(n+r)}_{d_{t+1}(c)}-\tau^{(n+r)}_{d_t(c)})$$

$$-\sum_{t=0}^{k-1}(g^i_{j,1}(\bar{\tau}^{(n+r)}_{d_t(c)})-g^i_{j,1}(\tau_c{}^{(n)}))(\tau^{(n+r)}_{d_{t+1}(c)}-\tau^{(n+r)}_{d_t(c)})\Big|$$

$$\leq\sum_c\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{t=0}^{k-1}(\tau^{(n+r)}_{d_{t+1}(c)}-\tau^{(n+r)}_{d_t(c)})+\frac{1}{2^{n+1}}(\tau^{(n)}_{c+1}-\tau_c{}^{(n)})$$

$$+\frac{1}{2^{n+1}}\sum_l|p_j{}^l|\sum_{t=0}^{k-1}(\tau^{(n+r)}_{d_{t+1}(c)}-\tau^{(n+r)}_{d_t(c)})$$

$$+\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{t=0}^{k-1}(\tau^{(n+r)}_{d_{t+1}(c)}-\tau^{(n+r)}_{d_t(c)})\Big)$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}(t-t_a).$$

Nous définissons ainsi

$$\lim_{n\to\infty}M^i_{j,1n}=\int_{t_a}^t\big(\sum_l\rho_j{}^l(u)g^i_{l,1}(u)-g^i_{j,1}(u)\big)du\qquad(i,j\in I').$$

Posons

$$g^i_{j,2}(t)=(g_j{}^i)_a+\int_{t_a}^t\big(\sum_l\rho_j{}^l(u)g^i_{l,1}(u)-g^i_{j,1}(u)\big)du \tag{5.5}$$

$$(i\neq i_0((g)_a,j)).$$

6. En vertu de (5.1), on a

$$\sum_i\big|\sum_l\rho_j{}^l(u)g^i_{l,1}(u)-g^i_{j,1}(u)\big|$$

$$\leq\sum_i|g^i_{j,1}(u)|\cdot|\rho_j{}^j(u)-1|+\sum_i\sum_{k\neq j}|g^i_{k,1}(u)|\cdot|\rho_j{}^k|<\tfrac{1}{2}\kappa_j$$

et, par suite,

$$\sum_{i\neq i_0}|g^i_{j,2}|\leq 1-(g_j{}^{i_0})_a+\tfrac{1}{2}\kappa_j(t-t_a)\leq 1-\tfrac{1}{2}(g_j{}^{i_0})_a\,.$$

Donc, en posant

$$g^{i_0}_{j,2}=1-\sum_{i\neq i_0}|g^i_{j,2}|\,,$$

on obtient

$$g^{i_0}_{j,2}\geq\tfrac{1}{2}(g_j{}^{i_0})_a>0\,,$$

c'est-à-dire

$$\sum_i |g^i_{j,2}| = 1 .$$

On a aussi

$$|g^i_{j,2}(v) - g^i_{j,2}(u)| \leq \tfrac{1}{2}|v-u| \leq \tfrac{1}{2}$$
$$(i, j \in I' ;\ t_a \leq u,\ v \leq t_{a+1}).$$

Plus généralement, on déduit par la voie de récurrence

$$g^i_{j,m}(t) = (g_j{}^i)_a + \int_{t_a}^t (\sum_l \rho_j{}^l(u) g^i_{l,m-1}(u) - g^i_{j,m-1}(u))\,du \tag{6. 1}$$
$$(i \neq i_0((g)_a, j)),$$

$$\sum_i |g^i_{j,m}| = 1 , \quad g^{i_0}_{j,m} \geq \tfrac{1}{2}(g_j{}^{i_0})_a > 0 , \tag{6. 2}$$

$$|g^i_{j,m} - (g_j{}^i)_a| \leq \tfrac{1}{2}(t-t_a) \leq \tfrac{1}{2} \qquad (i, j \in I' ;\ m = 1, 2, \cdots), \tag{6. 3}$$

$$|g^i_{j,m}(v) - g^i_{j,m}(u)| \leq \tfrac{1}{2}|v-u| \leq \tfrac{1}{2} \tag{6. 4}$$
$$(i, j \in I' ;\ t_a \leq u,\ v \leq t_{a+1} ;\ m = 1, 2, \cdots).$$

De (4. 4), (5. 3), (5. 5), il suit

$$\begin{aligned}
|g^i_{j,2} - g^i_{j,1}| &\leq \left| \int_{t_a}^t (\sum_l \rho_j{}^l(u)(g^i_{l,1}(u) - (g_l{}^i)_a) - g^i_{j,1}(u) + (g_j{}^i)_a)\,du \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{t_a}^t (|\rho_j{}^j - 1|(u-t_a) + \sum_{k \neq j} |\rho_j{}^k|(u-t_a))\,du \\
&\leq \frac{\kappa_j}{2}\left(\frac{t-t_a}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{1.2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad (i \neq i_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|g^{i_0}_{j,2} - g^{i_0}_{j,1}| &= \left| \sum_{i \neq i_0} |g^i_{j,1}| - \sum_{i \neq i_0} |g^i_{j,2}| \right| \\
&= \left| \sum_{i \neq i_0} (|g^i_{j,1}| - |g^i_{j,2}|) \right| \\
&\leq \sum_{i \neq i_0} |g^i_{j,2} - g^i_{j,1}| \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_i |(g_j{}^i)_a| \left(\frac{t-t_a}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{1.2}\left(\frac{t-t_a}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{1.2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 .
\end{aligned}$$

On obtient ainsi par la voie de récurrence

$$|g^i_{j,m}-g^i_{j,m-1}|\leq\frac{1}{m!}\left(\frac{t-t_a}{2}\right)^m\leq\frac{1}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

$$(i, j\in I';\ m=1, 2, \cdots).$$

Donc, si l'on pose

$$z^i_{j,0}=(g_j{}^i)_a,\quad z^i_{j,m}=g^i_{j,m}-g^i_{j,m-1},$$

la série $\sum z^i_{j,m}$ est uniformément convergente dans $[t_a, t_{a+1}]$ de sorte que sa somme partielle

$$\sum_0^n z^i_{j,n}=g^i_{j,n}$$

tend vers une fonction $g_j{}^i(t)$ continue dans $[t_a, t_{a+1}]$. D'une manière précise, étant donné un nombre ε positif quelconque, on peut trouver indépendamment de i, j, t un nombre positif N tel que, pour $n>N$,

$$|g^i_{j,n}(t)-g_j{}^i(t)|<\varepsilon .$$

De plus, une fois que l'indice j ainsi que la valeur t soient fixés, on a

$$g_j{}^i(t)=g^i_{j,n}=0$$

sauf pour un nombre fini des indices i. Donc,

$$\sum_i|g_j{}^i(t)|=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_i|g^i_{j,n}(t)|\right)=1,$$

$$g_j{}^{i_0}(t)=\lim g^{i_0}_{j,n}(t)\geq\tfrac{1}{2}(g_j{}^{i_0})_a>0 .$$

D'ailleurs, lorsque $n>N+1$,

$$\left|\int_{t_a}^t\left(\sum_l\rho_j{}^l(u)g^i_{l,n-1}(u)-g^i_{j,n-1}(u)\right)du-\int_{t_a}^t\left(\sum_l\rho_j{}^l(u)g_l{}^i(u)-g_j{}^i(u)\right)du\right|$$

$$\leq\int_{t_a}^t\left(|\rho_j{}^j(u)-1|\cdot|g^i_{j,n-1}-g_j{}^i|+\sum_{k\neq j}|\rho_j{}^k(u)|\cdot|g^i_{k,n-1}-g_k{}^i|\right)du$$

$$\leq\frac{K_j\varepsilon}{2}(t-t_a)<\varepsilon ,$$

c'est-à-dire,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_a}^t\left(\sum_l\rho_j{}^l(u)g^i_{l,n-1}(u)-g^i_{j,n-1}(u)\right)du$$

$$= \int_{t_a}^{t} \left(\sum_{l} \rho_j^{\,l}(u) g_l^{\,i}(u) - g_j^{\,i}(u) \right) du .$$

On a donc

$$(6.5) \qquad g_j^{\,i}(t) = \lim_{n\to\infty} g_{j,n}^{i}(t) = (g_j^{\,i})_a + \lim_{n\to\infty} \int_{t_a}^{t} \left(\sum_{l} \rho_j^{\,l} g_{l,n-1}^{i} - g_{j,n-1}^{i} \right) du$$

$$= (g_j^{\,i})_a + \int_{t_a}^{t} \left(\sum_{l} \rho_j^{\,l}(u) g_l^{\,i}(u) - g_j^{\,i}(u) \right) du$$

$$(i \neq i_0((g)_a, j)).$$

7. Puisque

$$\left| \sum_{l} \rho_j^{\,l}(u) g_l^{\,i}(u) - g_j^{\,i}(u) \right| \leq |\rho_j^{\,j} - 1| \cdot |g_j^{\,i}| + \sum_{k\neq j} |\rho_j^{\,k}| \cdot |g_k^{\,i}| < \frac{\kappa_j}{2} ,$$

il vient

$$|g_j^{\,i}(u) - (g_j^{\,i})_a| \leq \frac{1}{2} (t - t_a) \kappa_j \leq \frac{\kappa_j}{2} ,$$

$$\left| \sum_{l} \rho_j^{\,l}(u) g_l^{\,i}(u) - (g_j^{\,i})_a \right| < \kappa_j$$

ce qui nous montre que la somme $\sum_l \rho_j^{\,l}(u) g_l^{\,i}(u)$ ainsi que $g_j^{\,i}(u)$ sont de la même signe que $(g_j^{\,i})_a$, si $(g_j^{\,i})_a \neq 0$. On a donc dans ce cas

$$(7.1) \qquad |g_j^{\,i}(t)| + \int_{t_a}^{t} |g_j^{\,i}(u)| du = |(g_j^{\,i})_a| + \int_{t_a}^{t} \left| \sum_{l} \rho_j^{\,l}(u) g_l^{\,i}(u) \right| du .$$

Lorsque $(g_j^{\,i})_a = 0$, on a

$$|g_j^{\,i}(t)| \leq \int_{t_a}^{t} \left(\frac{k_j}{4} |g_j^{\,i}| + \sum_{k\neq j} |\rho_j^{\,k}(u)| \cdot |g_k^{\,i}| \right) du \leq \frac{t - t_a}{2} \kappa_j \leq \frac{t - t_a}{2} .$$

En faisant l'usage de cette inégalité on tire

$$|g_j^{\,i}(t)| \leq \int_{t_a}^{t} \frac{k_j}{2} \frac{u - t_a}{2} du \leq \frac{1}{1.2} \left(\frac{t - t_a}{2} \right)^2$$

et ainsi de suite. On obtient ainsi pour tout nombre entier

$$|g_j^{\,i}(t)| \leq \frac{1}{m!} \left(\frac{t - t_a}{2} \right)^m .$$

Il faut donc que

$$g_j^{\bar{i}}(t) = 0\,.$$

D'autre part, les ρ_j^i pouvant être regardés comme les coordonnées normales d'un élément de G_ι on a, en vertu de (2. 1),

$$\sum_s |\sum_l g_l^s(t)\rho_j^l(t)| = 1\,.$$

Donc, en sommant par rapport aux indices $i(\neq i_0)$, on peut déduire de (7. 1)

$$1 - g_j^{i_0}(t) + \int_{t_a}^{t} (1 - g_j^{i_0}(u))\,du$$

$$= 1 - (g_j^{i_0})_a + \int_{t_a}^{t} (1 - \sum_l \rho_j^l(u) g_l^{i_0}(u))\,du\,,$$

c'est-à-dire,

$$g_j^{i_0}(t) = (g_j^{i_0})_a + \int_{t_a}^{t} (\sum_l \rho_j^l(u) g_l^{i_0}(u) - g_j^{i_0}(u))\,du\,.$$

La démonstration d'existence pour les intégrales cherchées est ainsi achevée. Quant à l'unicité, on peut la conclure par le raisonnement de tout à l'heure à la vérification de ce que $g_j^{\bar{i}} = 0$.

SCIENCE AND ENGINEERING
MEISEI UNIVERSITY

Références

[1] J. Kanitani. Sur une variété localement applicable dans l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ. (Hino City, Tokyo, Japan), No. 5 (Science and Engineering), 1970, pp. 1-13.

[2] J. Kanitani. Sur l'ensemble des transformations projectives normales dans l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ., No. 6 (Science and Engineering), 1971, pp. 1-14.

[3] J. Kanitani. Sur l'espace fibré tensoriel à une variété différentiable admettant les homéomorphismes locaux à l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ., No. 9 (Science and Engineering), 1973, pp. 1-16.

[4] J. Kanitani. Sur les champs de vecteurs au dessus d'une variété différentiable admettant les homéomorphismes locaux à l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ., No. 10 (Science and Engineering), 1974, pp. 1-13.