J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
20-3 (1980) 417-433

Sur les systèmes de fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes (II) Points critiques des applications

Par

Osamu FUJITA

(Communiqué par Prof. Y. Kusunoki, le 29, Mars, 1979)

Introduction

Soit

$$f_1(p),\ f_2(p), \dots,\ f_n(p)$$

un système de n fonctions holomorphes sur une variété de Stein $\boldsymbol{V}$ de dimension $n+1$, et soit f l'application de $\boldsymbol{V}$ dans l'espace $\boldsymbol{C}^n$ de n variables complexes définie par les équations

$$(*) \qquad y_1=f_1(p),\ y_2=f_2(p), \dots,\ y_n=f_n(p).$$

Supposons que le système satisfasse aux conditions suivantes que l'on dira conditions (A_0).

1) Soit p_0 un point quelconque de $\boldsymbol{V}$ et soit $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ un système de coordonnées locales en p_0. Alors le rang de la matrice

$$(\partial f_i(p(z))/\partial z_j) \quad (i=1, 2, \dots, n;\ j=1, 2, \dots, n+1)$$

est toujours n.

2) Soit $\mathfrak{D}$ l'image de $\boldsymbol{V}$ par f. Pour tout $y \in \mathfrak{D}$, la fibre $f^{-1}(y)$ est irréductible et analytiquement homéomorphe à tout le plan d'une variable complexe en tant qu'ensemble analytique dans $\boldsymbol{V}$.

Alors, nous avons vu au mémoire précédent que $(\boldsymbol{V}, f, \mathfrak{D})$ est un espace fibré holomorphe sur $\mathfrak{D}$, dont la fibre est le plan $\boldsymbol{C}$ d'une variable complexe et dont le groupe est le groupe des transformations linéaires holomorphes du plan $\boldsymbol{C}$, et que le domaine $\mathfrak{D}$ est toujours pseudoconvexe d'ordre n-2[(1)].

Dans le présent mémoire, en éliminant la condition 1) ci-dessus, nous traiterons des systèmes moins restrictifs. (Voir les conditions (A_1) au $n°$ 1.) Dans le cas où $\boldsymbol{V}$ est l'espace de deux variables complexes, d'après Nishino[(2)], ces nouvelles conditions sont équivalentes aux conditions (A_0). En général, il n'en est pas ainsi même pour $n=1$. (Voir Exemple 2 au $n°$ 1.) Mais, dans ces conditions (A_1), l'application associée f ne peut avoir pour fibres critiques que fibres multiples. De plus, si le deuxième problème de Cousin pour $\boldsymbol{V}$ est toujours résoluble, ces conditions sont équivalentes aux conditions (A_0) (Théorème 2 au $n°$ 5).

Soit f une application quelconque définie par les équations $(*)$ ci-dessus, et soit Σ l'ensemble des points critiques de f. Alors toute composante irréductible de l'ensemble analytique Σ est, s'il existe, au moins de dimension n-1. C'est un cas particulier du théorème 1 au $n°$ 3.

1. Systèmes de fonctions holomorphes satisfaisant aux conditions $(\mathbf{A}_1)$

Soit $\boldsymbol{V}$ une variété de Stein (connexe) de dimension $n+1$ $(n \geqq 1)$ et soit

$$(1.1) \qquad f_1(p),\ f_2(p),\ \ldots,\ f_n(p)$$

un système de n fonctions holomorphes sur $\boldsymbol{V}$. Considérons l'application f de $\boldsymbol{V}$ dans l'espace $\boldsymbol{C}^n$ de n variables complexes définie par

$$y_1=f_1(p),\ y_2=f_2(p),\ \ldots,\ y_n=f_n(p).$$

Soit p_0 un point quelconque de $\boldsymbol{V}$ et soit

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n+1}$$

un système de coordonnées locales en p_0 ayant p_0 pour origine. Nous dirons que *le rang de l'application* f est ν au point p_0 si le rang de la matrice

$$(\partial f_i(p(z))/\partial z_j) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\ ;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1)$$

est ν á l'origine. Le point p_0 sera appelé *point critique de l'application* f si le rang de f est plus petit que n en p_0. Soit $g(p)$ une fonction holomorphe dans un voisinage de p_0. Le point p_0 sera appelé *point critique de la fonction*

1) Fujita [2], Théorème 2 au n° 5.
2) Voir Nishino [4] p. 269 Théorème 2 et p. 272-273.

$g(p)$ si toutes les dérivées $\partial g(p(z))/\partial z_j (j=1, 2, \ldots, n+1)$ s'annulent à l'origine.

Soit $\mathfrak{D}$ l'image de $\boldsymbol{V}$ par l'application f et soit $b=(b_1, \ldots, b_n)$ un point de $\mathfrak{D}$. La fibre $f^{-1}(b)$ est l'ensemble analytique dans $\boldsymbol{V}$ défini par les équations

$$f_1(p)=b_1, \ldots, f_n(p)=b_n.$$

Supposons que l'application f satisfasse à la condition suivante.

1) Pour tout point $y \in \mathfrak{D}$, la fibre $f^{-1}(y)$ est irréductible et de dimension un en tant qu'ensemble analytique dans $\boldsymbol{V}$.

Alors on dira une fibre $f^{-1}(y)$ *fibre critique* si au moins un point de la fibre est un point critique de f. Une fibre critique $f^{-1}(y)$ sera dite *fibre multiple* si tout point de la fibre est un point critique de f.

Nous dirons que le système (1. 1) satisfait aux *conditions* (A_1) si l'application associée f satisfait à la condition 1) ci-dessus et la condition 2) suivante :

2) Pour tout $y \in \mathfrak{D}$, la fibre $f^{-1}(y)$ est analytiquement homéomorphe à tout plan d'une variable complexe en tant que surface de Riemann.

Exemple 1. Dans l'espace de 3 variables complexes x_1, x_2, x_3, considérons la surface analytique S définie par l'équation

$$x_3^2=x_1x_2+1.$$

L'intersection de S et la surface analytique $x_2=0$ est la réunion de deux droites analytiques

$$L_1: x_2=0, \ x_3=1 \ \text{ et } \ L_2: x_2=0, \ x_3=-1.$$

Or, $S'=S-L_2$ est une variété de Stein de dimension 2 et la fonction $y_1=x_2$ sur S' satisfait aux conditions (A_0). Sur S' la fonction $f_2(p)$ définie par

$$f_2(x)=\begin{cases}(x_3-1)/x_2 & \text{pour } x_2 \neq 0\\ x_1/(x_3+1) & \text{pour } x_3 \neq -1\end{cases}$$

est holomorphe et l'application

$$y_1=x_2, \ y_2=f_2(x)$$

est une application biholomorphe de S' sur l'espace $\boldsymbol{C}^2$.

Exemple 2. Si (x_1, x_2, x_3) est un point de la surface S de l'exemple ci-dessus, le point $(-x_1, -x_2, -x_3)$ est aussi un point de S. En identifiant ces deux points (x_1, x_2, x_3) et $(-x_1, -x_2, -x_3)$ de S pour tout

$(x_1, x_2, x_3) \in S$, on aura une variété complexe S^* de dimension 2. On voit facilement que S^* est une variété de Stein[3] et que la fonction holomorphe $y_1 = x_2^2$ sur S^* satisfait aux conditions (A_1). La fibre sur $y_1 = 0$ est une seule fibre critique et elle est une fibre multiple.

2. Lemmes

Le lemme suivant est une généralisation du Lemme 7 de Nishino [4], dont la démonstration est toute pareille à celle de Nishino[4].

Lemme 1. *Soit D un domaine dans l'espace de $m(\geqq 2)$ variables compexes. Considerons un ensemble analytique irréductible Σ de dimension un dans D. Supposons que Σ soit simplement connexe en tant que surface de Riemann et qu'il n'ait aucun point singulier dans un polycylindre Δ contenu dans D. Alors $\Sigma \cap \Delta$ est, s'il n'est pas vide, toujours simplement connexe.*

Le lemme suivant est aussi dû à Nishino[5].

Lemme 2. *Soit D un domaine contenant l'origine dans l'espace de deux variables complexes x et y, et soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe dans D telle que $f(0, 0) = 0$. Supposons que deux fonctions $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ ne s'annulent simultanement en aucun point dans D autre que l'origine et que la surface analytique dans D definie par*

$$f(x, y) = b$$

soit, si elle existe effectivement, toujours simplement connexe pour $b \neq 0$. Alors $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ ne s'annulent pas simultanement aussi à l'origine.

Soit D domaine dans l'espace de m variables complexes $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Dans D considérons une suite de systèmes de 1 fonctions holomorphes

$$\{f_1^{(\nu)}(x), f_2^{(\nu)}(x), \ldots, f_l^{(\nu)}(x)\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Pour chaque i $(i = 1, 2, \ldots, 1)$, supposons que la suite des fonctions holomorphes

$$f_i^{(\nu)}(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

3) Soit φ l'application de S^* dans l'espace de 6 variables complexes $z_1, \ldots, z_6$ définie par
$$z_1 = x_1^2,\ z_2 = x_2^2,\ z_3 = x_3^2,\ z_4 = x_2 x_3,\ z_5 = x_3 x_1,\ z_6 = x_1 x_2.$$
Alors l'image $\varphi(S^*)$ est une variété affine non singulière dans l'espace (z) et φ est une application biholomorphe de S^* sur $\varphi(S^*)$.

4) Voir Nishino [4] p. 265.

5) Voir Nishino [4] p. 265, Lemme 8 et p. 267-269.

converge uniformément vers $f_i^{(0)}(x)$ dans D. Alors toutes les $f_i^{(0)}(x)$ sont des fonctions holomorphes dans D. Pour chaque $\nu(\nu=0, 1, \ldots)$ soit Σ_ν l'ensemble analytique dans D défini par

$$f_1^{(\nu)}(x)=0,\ f_2^{(\nu)}(x)=0, \ldots, f_l^{(\nu)}(x)=0.$$

Lemme 3. *Dans ces circonstances, soit p_0 un point de Σ_0 et supposons que toute composante irréductible de Σ_0 contenant p_0 soit au plus de dimension λ. Alors on peut trouver un voisinage U de p_0 et un nombre positif N tels que toute composante irréductible de $\Sigma_\nu \frown U$ soit au plus de dimension λ pour tout $\nu > N$.*

En effet, on peut supposer que $0 \leqq \lambda < m$ et que p_0 soit l'origine de l'espace (x). D'après Weierstrass, en choisissant des coordonnées convenables de l'espace (x), on peut supposer que l'intersection de Σ_0 et la variété linéaire dans D définie par

$$x_1=0,\ x_2=0, \ldots, x_\lambda=0$$

est un ensemble discret dans un voisinage de l'origine. Alors on peut décrire des domaines cylindriques Δ, $\Delta_k (k=1, 2, \ldots, m-\lambda)$ dans D des fo mes

$$\begin{aligned}\Delta\ &: |x_i|<r\ (i=1, 2, \ldots, \lambda),\ |x_j|<\rho\ (j=\lambda+1, \ldots, m),\\ \Delta_k &: |x_i|<r\ (i=1, 2, \ldots, \lambda),\ |x_j|<\rho\ (j=\lambda+1, \ldots, m;\ j\neq\lambda+k),\\ &\quad \rho'<|x_{\lambda+k}|<\rho,\end{aligned}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1) r, ρ, ρ' sont des nombres positifs tels que $\rho' < \rho$.
2) $\bar{\Delta} \subset D$, où $\bar{\Delta}$ est l'adhérence de Δ dans l'espace (x).
3) L'intersection de Σ_0 et $\bigcup_{k=1}^{m-\lambda} \bar{\Delta}_k$ est vide, $\bar{\Delta}_k$ étant l'adhérence de Δ_k.

Pour chaque i $(i=1, 2, \ldots, l)$, la suite $f_i^{(\nu)}(x)$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ converge uniformément vers $f_i^{(0)}(x)$ dans D. Donc, on peut trouver un nombre positif N tel que l'intersection de Σ_ν et $\bigcup_{k=1}^{m-\lambda} \bar{\Delta}_k$ soit vide pour tout $\nu > N$. On voit facilement que toute composante irréductible de $\Sigma_\nu \frown \Delta$ est au plus de dimension λ pour tout $\nu > N$. C. Q. F. D.

3. L'ensemble des points critiques d'une application holomorphe

Soit D un domaine dans l'espace de m variables complexes $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et soit

$$f_1(x),\ f_2(x), \dots, f_n(x)$$

un système de n fonctions holomorphes dans D. Considérons l'application holomorphe f de D dans l'espace $\boldsymbol{C}^n$ de n variables complexes définie par

$$y_1=f_1(x),\ y_2=f_2(x), \dots, y_n=f_n(x).$$

Un point a de D sera dit *point critique de l'application* f si le rang de la matrice

$$(\partial f_i/\partial x_j) \quad (i=1,\ 2, \dots, n\,;\ j=1,\ 2, \dots, m)$$

est plus petit que le minimum de m et n en a. L'ensemble Σ des point critiques de f est un ensemble analytique dans D. Or, on a le

Théorème 1. *Dans ces circonstances, supposons que Σ existe effectivement. Alors toute composante irréductible de Σ est au moins de dimension $n-1$ si $1<n\leqq m$, et elle est au moins de dimension $2m-n-1$ si $m<n<2m-1$.*

En effet, soit Σ_0 une composante irréductible quelconque de Σ. Supposons, pour fixer les idées, que l'origine soit contenu dans D et que Σ_0 soit une seule composante irréductible de Σ contenant l'origine.

Cas 1° *où* $1<n\leqq m$. Puisque le rang de la matrice

$$(\partial f_i(O)/\partial x_j) \quad (i=1,\ 2, \dots, n\,;\ j=1,\ 2, \dots, m) \tag{3.1}$$

est plus petit que n, s'il est nécessaire, en appliquant une transformation linéaire non singulière convenable de l'espace (y), on peut supposer que

$$\partial f_n(O)/\partial x_j=0 \qquad (j=1,\ 2, \dots, m).$$

Si le rang de la matrice (3.1) est n-1, on peut supposer, pour fixer les idées, que

$$\frac{D(f_1, \dots, f_{n-1})}{D(x_1, \dots, x_{n-1})} \neq 0 \text{ á l'origine.}$$

En regardant $f_1(x), \dots, f_{n-1}(x),\ x_n, \dots, x_m$ comme coordonnées locales à l'origine, on peut supposer que

$$f_i(x)=x_i \quad (i=1,\ 2, \dots, n\text{-}1)$$

identiquement dans un voisinage de l'origine. Alors, dans ce voisinage, Σ est l'ensemble des zéros communs de $m-n+1$ fonctions

$$\partial f_n/\partial x_j \quad (j=n,\ n+1, \dots, m).$$

Donc Σ_0 est au moins de dimension $m-(m-n+1)=n-1$.

Dans le cas où le rang de la matrice (3. 1) est plus petit que $n-1$, considérons un autre système de fonctions holomorphes dans D de la forme

$$f_i^*(x)=f_i(x)+\alpha x_i \quad (i=1, 2, \ldots, n-1), \quad f_n^*(x)=f_n(x),$$

ou α est un nombre complexe non nul. Soit f^* l'application de D dans $\boldsymbol{C}^n$ définie par

$$y_i=f_i^*(x) \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

et soit Σ^* l'ensemble des points critiques de f^* dans D. On a

$$\partial f_i^*/\partial x_j=\partial f_i/\partial x_j+\alpha\delta_{ij} \quad (i, j=1, 2, \ldots, n-1),$$

où $\delta_{ii}=1$ et $\delta_{ij}=0$ pour $i\neq j$. Si $\alpha(\neq 0)$ est suffisamment petit en module,

$$\frac{\mathrm{D}(f_1^*, \ldots, f_{n-1}^*)}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})}\neq 0 \text{ à l'origine.}$$

Toutes les $\partial f_n^*/\partial x_j (j=1, 2, \ldots, m)$ étant nulles à l'origine, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, toute composante irréductible de Σ^* contenant l'origine est au moins de dimension $n-1$. Si l'on varie α vers 0, chaque déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*)}{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})} \qquad (1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_n\leqq m)$$

converge uniformément vers

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})}$$

á l'intérieur complet de D. Donc, d'après le lemme 3 au n° 2, Σ_0 est au moins de dimension $n-1$.

Cas 2° *où* $m<n<2m-1$. Maintenant, en choisissant des coordonnées convenables de l'espace (x), on peut supposer que

$$\partial f_i(O)/\partial x_m=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Si le rang de la matrice (3. 1) est $m-1$, on peut supposer, pour fixer les idées que

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_{m-1})}{D(x_1, \ldots, x_{m-1})}\neq 0 \text{ à l'origine.}$$

En regardant $f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)$, x_m comme coordonées locales à l'origine, on peut supposer que

$$f_i(x)=x_i \quad (i=1, 2, \ldots, m-1)$$

identiquement dans un voisinage de l'origine. Alors, dans le voisinage, Σ est l'ensmeble des zéros communs de $n-m+1$ fonctions

$$\partial f_i/\partial x_m \quad (i=m,\ m+1, \ldots, n).$$

Donc Σ_0 est au moins de dimension $m-(n-m+1)=2m-n-1$.

Dans le cas où le rang de la matrice (3. 1) est plus petit que $m-1$, considérons un système de fonctions holomorphes dans D de la forme

$$f_i^*(x)=f_i(x)+\alpha x_i (i=1,\ 2, \ldots, m-1),\quad f_j^*(x)=f_j(x) \quad (j=m,\ m+1, \ldots, n),$$

où α est un nombre complexe non nul. En raisonnant pareillement au cas 1°, on voit que Σ_0 est au moins de dimension $2m-n-1$.

C. Q. F. D.

4. Propositions

Soit $\boldsymbol{V}$ une variété de Stein (connexe) de dimension $n+1$ $(n\geqq 1)$, et soit

$$f_1(p),\ f_2(p), \ldots, f_n(p)$$

un système de n fonctions holomorphes sur $\boldsymbol{V}$. Considérons l'application f de $\boldsymbol{V}$ dans $\boldsymbol{C}^n$ définie par les équations

$$y_i=f_i(p) \quad (i=1,\ 2, \ldots, n).$$

Supposons que f satisfasse à la condition suivante :

1) *Soit $\mathfrak{D}$ l'image de $\boldsymbol{V}$ par f. Pour tout $y\in\mathfrak{D}$, la fibre $f^{-1}(y)$ est irréductible et de dimension un en tant qu'ensemble analytique dans $\boldsymbol{V}$.*

Soit $b=(b_1, \ldots, b_n)$ un point quelconque de $\mathfrak{D}$, et soit p_0 un point régulier de l'ensemble analytique $f^{-1}(b)$. On peut trouver un système de coordonnées locales $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ de $\boldsymbol{V}$ en p_0 ayant p_0 pour origine tel que dans un voisinge U de p_0 l'ensemble $f^{-1}(b)\cap U$ soit donné par les équations

$$z_1=0,\ z_2=0, \ldots, z_n=0.$$

Soit L la surface analytique dans U définie par l'équation

$$z_{n+1}=0.$$

L'intersection de $f^{-1}(b)$ et L est le seul point p_0. Or, si l'on choisit un nombre positif ρ suffisamment petit, l'intersection de $f^{-1}(y)$ et L est un ensemble discret dans U pour tout $y \in (\gamma)$, où (γ) est un polycylindre dans l'espace (y) défini par

$$|y_1 - b_1| < \rho, \ldots, \quad |y_n - b_n| < \rho.$$

Soit Γ la composante connexe de $f^{-1}(\gamma)) \cap L$ contenant p_0 et soit φ la restriction de f à Γ. En diminuant le nombre positif ρ, s'il est nécessaire on peut supposer que Γ soit à l'intérieur complet de U. Si l'on prend φ comme projection, d'après Weierstrass, Γ est un domaine multivalent étalé au-dessus de (γ)[6]. Or, Γ n'a aucun point frontière situé au-dessus de l'intérieur de (γ). En particulier, on a $\varphi(\Gamma) = (\gamma)$; donc (γ) est contenu dans $\mathfrak{D}$. D'après ce que nous avons vu jusqu'ici, on a la

Proposition 1[7]. *Dans les circonstances ci-dessus, l'image* $\mathfrak{D}$ *de* $\boldsymbol{V}$ *par* f *est un domaine dans l'espace* $\boldsymbol{C}^n$. *Soit* b° *un point quelconque de* $\mathfrak{D}$ *et soit* $\{b^\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *une suite de points de* $\mathfrak{D}$ *convergeant vers* b°. *Alors pour tout voisinage* W *d'un point quelconque* p *de la fibre* $f^{-1}(b^\circ)$, *on peut trouver un nombre positif* N *tel que toute fibre* $f^{-1}(b^\nu)$ *ait au moins un point dans* W *pour* $\nu > N$[8].

Proposition 2. *Dans les circonstances de la proposition* 1, *supposons de plus que toute fibre* $f^{-1}(y)$ $(y \in \mathfrak{D})$ *soit simplement connexe en tant que surface de Riemann*[9]. *Alors toute fibre critique de l'application* f *est une fibre multiple.*

En effet, considérons l'ensemble Σ des points critiques de l'application f. Σ est un ensemble analytique dans $\boldsymbol{V}$ et, d'aprés la condition 1) ci-dessus, Σ est au plus de dimension n. On peut regarder, d'aprés Remmert[10], la variété de Stein $\boldsymbol{V}$ comme un ensemble analytique non singulier dans l'espace de m variables complexes, m étant un nombre entier suffisamment grand. Donc, d'aprés les lemme 1 et lemme 2 au n° 2, on voit facilement que Σ n'a aucun point isolé dans le cas ou $n=1$. Si $n>1$, d'aprés le théoréme 1 au n° 3, toute composante irréductible de Σ est au moins de dimension $n-1 (\geqq 1)$. Nous allons démontrer la proposition 2 par récurrence sur n.

Dans le cas où $n=1$, toute composante irréductible de Σ est de

6) Dans ce mémoire, un domaine multivalent peut général avoir des points de ramification.
7) C'est un cas particulier d'un théorème dû à Remmert. Voir Remmert [5] p. 358, Satz 28.
8) La suite des fibres $\{f^{-1}(b^\nu)\}$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ converge analytiquement au sens de Fujita [1] et la fibre $f^{-1}(b^\circ)$ est la limite de la suite. Voir Fujita [1] p. 389-390.
9) Cette condition est moins restrictive que la condition 2) de (A_1).
10) Voir Remmert [6].

dimension un. Soit Σ° une telle comosante de Σ. Tout point de Σ° étant un point critique de la fonction f_1, la restriction de f_1 à Σ° est une constante. Donc Σ° est une fibre multiple de f, car toute fibre de f est irréductible par hypothèse, ce qui montre que la proposition 2 est vraie pour $n=1$.

Soit $n>1$, et supposons que la proposition 2 subsiste si le nombre des fonctions $f_i<n$. Pour chaque i $(i=1, 2, \ldots, n)$ soit Σ_i l'ensemble des points critiques de la fonction f_i. Σ_i est un ensemble analytique dans $\boldsymbol{V}$; il n'y a qu'une infinité dénombrable au plus de composantes irréductibles de Σ_i. Soient

$$\Sigma_i^1,\ \Sigma_i^2, \ldots, \Sigma_i^\nu, \ldots$$

toutes ces composantes. Pour chaque ν $(\nu=1, 2, \ldots)$, la restriction de f à Σ_i^ν est une constante. Désignons-la par b_i^ν. Soit b_i un nombre complexe en dehors de l'ensemble

$$B_i=\{b_i^\nu \mid \nu=1, 2, \ldots\}.$$

La surface analytique S dans $\boldsymbol{V}$ définie par

$$f_i(p)=b_i$$

est une variété de Stein (connexe ou non) de dimension n. Soit S° une composante connexe quelconque de S et soit φ_j la restriction de f_j à S° pour chaque $j\neq i$. Alors le système de $n-1$ fonctions φ_j $(j=1, 2, \ldots, \hat{\imath}, \ldots n)$ satisfait aux conditions de la proposition 2. De plus, un point q de S° est un point critique de l'application

$$\varphi=(\varphi_1, \ldots, \hat{\varphi}_i, \ldots, \varphi_n),$$

si et seulement si q est un point critique de l'application f comme point de $\boldsymbol{V}$. Donc, d'aprés l'hypothèse, toute fibre critique de f située sur S est multiple.

Il s'agit seulement de la fibre critique sur un point $b=(b_1, \ldots, b_n)$ $(\in\mathfrak{D})$ tel que toutes les $b_i\in B_i$. Or, il existe au moins une composante irréductible Σ° de Σ telle que $\Sigma^\circ\cap f^{-1}(b)$ soit non vide. Si $f^{-1}(b)\subset\Sigma^\circ$, elle est une fibre multiple. Si $f^{-1}(b)\not\subset\Sigma^\circ$, Σ° étant au moins de dimension un, au moins une fonction f_i n'est pas constante sur Σ°. Supposons, pour fixer les idèes, que f_1 ne soit pas constante sur Σ°. Alors on peut trouver une suite

$$b^{(\mu)}=(b_1^{(\mu)}, \ldots, b_n^{(\mu)}) \quad (\mu=1, 2, \ldots)$$

de points de $\mathfrak{D}$, tendant vers b, telle que $b_1^{(\mu)}\notin B_1 (\mu=1, 2, \ldots)$ et que

$f^{-1}(b^{(\mu)}) \cap \Sigma^\circ$ soit non vide pour tout μ. Alors chaque fibre $f^{-1}(b^{(\mu)})$ est critique. De plus, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, elle est multiple. Donc, d'après la proposition 1, la fibre $f^{-1}(b)$ est aussi multiple, ce qui démontre la proposition 2.

Proposition 3. *Dans les circonstances de la proposition* 2, *soit Σ l'ensemble des points critiques de l'application f. Alors, si Σ n'est pas vide, l'image $f(\Sigma)$ de Σ est un ensemble analytique dans le domaine $\mathfrak{D}$ dont toute composante irréductible est de dimension $n-1$, ou $n-2$.*

En effet, d'après les proposition 1 et proposition 2 ci-dessus, on voit facilement que $f(\Sigma)$ est un ensemble fermé dans le domaine $\mathfrak{D}$. Soit $b=(b_1, \ldots, b_n)$ un point quelconque de $f(\Sigma)$ et soit p_0 un point régulier de la fibre $f^{-1}(b)$. Dans un voisinage U de p_0 considérons la surface analytique L qui intersecte transversalement $f^{-1}(b)$ en p_0. Soit (γ) un polycylindre dans $\mathfrak{D}$ de la forme

$$|y_1-b_1|<\rho, \ldots, |y_n-b_n|<\rho \qquad (\rho>0),$$

et soit Γ la composante connexe de $f^{-1}((\gamma)) \cap L$ contenant p_0. Alors, d'après ce que nous avons vu au début de ce n°, pour un nombre positif ρ suffisamment petit, Γ satisfait aux conditions suivantes que l'on dira *conditions* (N')[11].

1) L'intersection de Γ et $f^{-1}(b)$ est le seul point p_0.

2) Γ est contenue à l'intérieur complet d'un voisinage de p_0.

3) Soit φ la restriction de f à Γ. En prenant φ comme projection, Γ est un domaine multivalent étalé au-dessus de (γ) sans point frontière situé au-dessus de l'intérieur de (γ).

Alors le nombre des feuilles de Γ est évidemment fini. Or, $\Gamma \cap \Sigma$ étant l'ensemble analytique dans Γ, $\varphi(\Gamma \cap \Sigma)$ est aussi un ensemble analytique dans (γ). D'après la proposition 2 ci-dessus, on voit facilement que $f(\Sigma) \cap (\gamma) = \varphi(\Gamma \cap \Sigma)$. Donc $f(\Sigma)$ est un ensemble analytique dans $\mathfrak{D}$.

Soit T une composante irréductible de $f(\Sigma)$. Alors, d'après la proposition 2, $f^{-1}(T)$ est une composante irréductible de Σ. Si T est de dimension λ, $f^{-1}(T)$ est de dimension $\lambda+1$. Toute composante irréductible de Σ étant de dimension n ou $n-1$, λ est égal à $n-1$ ou $n-2$.

C. Q. F. D.

Je ne sais pas encore si l'ensemble analytique $f(\Sigma)$ de la proposition

---

11) Voir Nishino [3], p. 71, la condition (N).

3 peut avoir effectivement une composante irréductible de dimension $n-2$. Dans l'exemple suivant $f(\Sigma)$ est de dimension $n-2$, mais son application f a des fibres réductibles.

Exemple 3. Soit f l'application holomorphe de l'espace C^3 dans l'espace C^2 définie par les équations

$$y_1=x_3^2-x_1^2-x_2^2,\ y_2=x_3-x_2.$$

Alors l'ensemble Σ des points critiques de f est défini par

$$x_1=0,\ x_3-x_2=0.$$

Donc l'image $f(\Sigma)$ est le seul point $(0, 0)$. Une fibre $f^{-1}(y)$ de f sur un point $y=(y_1, y_2)$ est irréductible et analytiquement homéomorphe au plan C, si $y_2\neq 0$. $f^{-1}(y)$ consiste en deux droites analytiques pour $y=(y_1, 0)$ $(y_1\neq 0)$ $f^{-1}(O)$ est une droite analytique et elle est une seule fibre critique.

5. **Théorème 2.** *Étant donné un système de n fonctions holomorphes*

$$(5.1)\qquad f_1(p),\ f_2(p), \dots, f_n(p)$$

sur une variété de Stein (connexe) V de dimension $n+1$ $(n\geqq 1)$, considérons l'application f de V dans l'espace C^n de n variables complexes définie par

$$y_i=f_i(p)\quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Soit $\mathfrak{D}$ l'image de V par f et soit Σ l'ensemble des points critiques de f. Supposons que le système (5.1) satisfasse aux conditions (A_1) au n° 1. Alors, toute fibre critique de f est une fibre multiple, et, si Σ existe effectivement, l'image $f(\Sigma)$ de Σ est une surface analytique dans le domaine $\mathfrak{D}$; c'est à dire que $f(\Sigma)$ est un ensemble analytique dans $\mathfrak{D}$ dont toute composante irréductible est de dimension $n-1$. De plus, si le deuxième problème de Cousin pour V est toujours résoluble, f n'a aucun point critique.

Pour prouver la première moitié de de ce théorème, d'après proposition 2 et proposition 3 au n° 4, il suffit de voir que $f(\Sigma)$ n'a aucune composante irréductible de dimension $n-2$. Supposons, pour le réduire à l'absurde, que $f(\Sigma)$ ait une composante irréductible T de dimension $n-2$ $(n\geqq 2)$. Prenons un point régulier b° de T tel que T soit la seule composante irréductible de $f(\Sigma)$ contenant b°. Soit (γ) un polycylindre dans $\mathfrak{D}$ autour de b° et soit φ_j la restriction de f_j à $f^{-1}((\gamma))$ pour chaque $j (j=1, 2, \dots, n)$. Alors, $f^{-1}((\gamma))$ est une variété de Stein (connexe) de dimension $n+1$, et le système de fonctions

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

satisfait aux conditions (A_1). Donc, on peut supposer, pour fixer les idées, que b° soit l'origine de l'espace (y) et que $f(\Sigma)$ soit défini par

$$y_1=0, \ y_2=0$$

dans un polycylindre $\varDelta$ de la forme

$$|y_1|<r, \ |y_2|<r, \ldots, \ |y_n|<r,$$

r étant un nombre positif suffisamment petit.

Supposons qu'il existe une application holomorphe g de $\varDelta$ dans $\boldsymbol{V}$ *satisfaisant à la condition*

$$f(g(y))=y \ \textit{pour tout} \ y\in\varDelta.$$

Soit $z_1, \ldots, z_{n+1}$ un système de coordonnées locales en $g(O)$ et supposons que l'application g soit définie par

$$z_k=g_k(y) \quad (k=1, 2, \ldots, n+1)$$

dans un voisinage de l'origine. Alors on a

$$\sum_{k=1}^{n+1}(\partial f_i(g(O))/\partial z_k)(\partial g_k(O)/\partial y_j)=\delta_{ij} \quad (i, j=1, 2, \ldots, n)$$

où $\delta_{ii}=1$ et $\delta_{ij}=0$ pour $i\neq j$; il suit de là que le rang de la matrice

$$(\partial f_i/\partial z_k) \quad (i=1, 2, \ldots, n; \ k=1, 2, \ldots, n+1)$$

est n en $g(O)$. C'est contradictoire au fait que $f^{-1}(O)$ est une fibre multiple. *Dans la suite, nous allons construire effectivement une telle application g.*

Soient $\varDelta_1$ et $\varDelta_2$ les domaines définis par

$$\varDelta_1: \ 0<|y_1|<r, \ |y_2|<r, \ |y_i|<r \ (i=3, 4, \ldots, n),$$

$$\varDelta_2: \ |y_1|<r, \ 0<|y_2|<r, \ |y_i|<r \ (i=3, 4, \ldots, n).$$

Pour chaque j $(j=1, 2)$ $f^{-1}(\varDelta_j)$ est une variété de Stein de dimension $n+1$ et la restriction du système (5. 1) à $f^{-1}(\varDelta_j)$ satisfait aux conditions (A_0). Donc, d'après le théorème 2 du mémoire précédent, $f^{-1}(\varDelta_j)$ est un espace fibré holomorphe sur $\varDelta_j$ dont la fibre est le plan $\boldsymbol{C}$ et dont le groupe est le groupe des transformations linéaires holomorphes du plan $\boldsymbol{C}$. Les premier et deuxième problèmes de Cousin pour $\varDelta_j$ étant toujours résolubles, on peut trouver, pour chaque j ($j=1, 2$), une fonction holomorphe $\Phi_j(p)$ sur $f^{-1}(\Delta_j)$ telle que l'application

$$(5.2)\qquad y_i=f_i(p)\ \ (i=1, 2, \dots, n),\ w=\Phi_j(p)$$

soit une application biholomorphe de $f^{-1}(\Delta_j)$ sur $(\Delta_j, |w|<\infty)$

Dans $f^{-1}(\Delta_1)\cap f^{-1}(\Delta_2)$ on a

$$(5.3)\qquad \Phi_1(p)=\alpha(f(p))\Phi_2(p)+\beta(f(p)),$$

où $\alpha(y)$ et $\beta(y)$ sont des fonctions holomorphes dans $\Delta_1\cap\Delta_2$ et $\alpha(y)$ ne s'annule jamais. Soit p_0 un point régulier de la fibre $f^{-1}(O)$ et soit

$$z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$$

un système de coordonnées locales de V en p_0, ayant p_0 pour origine. On peut supposer que la fibre $f^{-1}(O)$ soit définie par

$$z_1=0,\ z_2=0, \dots, z_n=0$$

dans un voisinage U de p_0. Soit L la surface analytique dans U défine par

$$z_{n+1}=0.$$

En diminuant r, s'il est nécessaire, on peut supposer que la composante connexe Γ de $f^{-1}(\Delta)\cap L$ contenant p_0 satisfasse aux conditions (N') au $n°$ 4. Alors, en prenant la restriction φ de f à Γ comme projection, Γ est un domaine multivalent étalé au-dessus de Δ, sans point frontière situé au-dessus de l'intérieur de Δ. Soit ν le nombre des feuilles de Γ.

On peut choisir $z_1, \dots, z_n$ comme un système de coordonnées de Γ. Soit σ la surface analytique dans Γ définie par

$$\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(z_1, \dots, z_n)}=0,$$

φ_i étant la restriction de f_i à Γ pour chaque i. Prenons un point b de $\Delta_1\cap\Delta_2$ en dehors de $\varphi(\sigma)$. Alors la fibre $f^{-1}(b)$ intersecte Γ en ν points distinctes $p^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, \nu$). En prenant un voisinage suffisamment petit W de b, on peut trover, pour chaque i ($i=1, 2, \dots, \nu$,), une application holomorphe ψ_i de W dans Γ satisfaisant aux deux conditions

$$\psi_i(b)=p^{(i)},\ \varphi(\psi_i(y))=y \text{ identiquement pour } y\in W.$$

D'après (5. 3), on a

$$\Phi_1(\psi_i(y))=\alpha(y)\Phi_2(\psi_i(y))+\beta(y) \text{ pour } y\in W,$$

i étant quelconque. Donc, on a

$$(1/\nu)\sum_{i=1}^{\nu}\Phi_1(\psi_i(y))=\alpha(y)(1/\nu)\sum_{i=1}^{\nu}\Phi_2(\psi_i(y))+\beta(y) \quad \text{pour } y\in W.$$

Or, pour chaque j ($j=1, 2$), on voit facilement que la fonction $(1/\nu)\sum_{i=1}^{\nu}\Phi_j(\psi_i(y))$ peut se prolonger en une fonction holomorphe $h_j(y)$ dans Δ_j. De plus, on a

$$h_1(y)=\alpha(y)h_2(y)+\beta(y) \quad \text{pour } y\in\Delta_1\cap\Delta_2.$$

Pour chaque j ($j=1, 2$), soit Ψ_j l'application inverse de (5. 2). Alors, l'application holomorphe g de $\Delta_1\cup\Delta_2$ dans $\boldsymbol{V}$ définie par

$$g(y)=\Psi_j(y, h_j(y)) \quad \text{pour } y\in\Delta_j \ (j=1, 2),$$

satisfait à

$$f(g(y))=y \text{ identiquement dans } \Delta_1\cup\Delta_2. \tag{5. 4}$$

Or, on peut regarder la variété de Stein $\boldsymbol{V}$ comme un ensemble analytique dans l'espace de m variables complexes, m étant un nombre entier suffisamment grand. Donc, d'après Hartogs, l'application g peut se prolonger en une application holomorphe $\tilde{g}$ de Δ dans $\boldsymbol{V}$[(12)]. D'aprés (5. 4) on a

$$f(\tilde{g}(y))=y \text{ identiquement dans } \Delta.$$

Donc, d'aprés ce que nous avons vu déjà, $f(\Sigma)$ ne peut avoir aucune composante irréductible de dimension $n-2$.

Il s'agit du cas ou le deuxième problème de Cousin pour $\boldsymbol{V}$ est toujours résoluble[(13)]. Supposons, pour le réduire à l'absurde, que Σ existe effectivement. Soit S composante irréductible de la surface analytique $f(\Sigma)$. Alors, $\Sigma_0=f^{-1}(S)$ étant une surface analytique dans $\boldsymbol{V}$, d'après l'hypothèse concernant le problème de Cousin, on peut trouver une fonction holomorphe $F(p)$ sur $\boldsymbol{V}$ qui prend la valeur nulle justement en Σ_0 avec l'ordre un.

On peut supposer, pour fixer les idées que l'origine soit contenu dans S et que $f(\Sigma)$ soit définie par

$$y_1=0$$

dans un polycylindre $\Delta(\subset\mathfrak{D})$ de la forme

---

12) Voir, par exemple, la démonstration du Théorème 2 au n° 5 de Fujita [2].

13) L'idée de la démonstration suivante est due à Nishino. Voir Nishino [4] p. 272-273.

$$|y_1|<r, \quad |y_2|<r, \ldots, \quad |y_n|<r,$$

r étant un nombre positif suffisamment petit. Soit Δ_1 le domaine cylindrique dans $\mathfrak{D}$ de la forme

$$0<|y_1|<r, \quad |y_2|<r, \ldots, \quad |y_n|<r.$$

Puisque la restriction du système (5. 1) sur $f^{-1}(\Delta_1)$ satisfait aux conditions (A_0), on peut trouver une fonction holomorphe $\Phi(p)$ sur $f^{-1}(\Delta_1)$ telle que l'application

$$y_i=f_i(p) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \quad w=\Phi(p) \tag{5. 5}$$

soit une application biholomorphe de $f^{-1}(\Delta_1)$ sur le domaine

$$(\Delta_1, |w|<\infty).$$

Soit p_0 un point régulier de $\Sigma_0 \cap f^{-1}(\Delta)$ et soit

$$z_1, \ z_2, \ldots, \ z_{n+1}$$

un système de coordonnées locales de $\boldsymbol{V}$ en p_0 ayant p_0 pour origine. Pour fixer les idées, on peut supposer que Σ_0 soit définie par

$$z_1=0$$

dans un voisinage U $(\subset f^{-1}(\Delta))$ de p_0. Soit L l'ensemble analytique dans U défini par

$$z_2=0, \ldots, \ z_{n+1}=0,$$

et soit C une courbe fermée sur L définie par

$$|z_1|=\rho, \quad z_2=0, \ldots, \ z_{n+1}=0,$$

ρ étant un nombre positif suffisamment petit, L'ordre de zéros de la fonction $F(p)$ sur Σ_0 étant un, la variation de l'argument de $F(p)$ est 2π, lorsque le point p décrit la courbe C dans un sens convenable. Soit Ψ l'application inverse de (5. 5). Posons

$$G(y, w)=F(\Psi(y, w)) \quad \text{pour} \quad (y, w) \in (\Delta_1, |w|<\infty).$$

$G(y, w)$ est une fonction holomorphe dans $(\Delta_1, |w|<\infty)$ qui ne s'annule jamais. Soit C' l'image de C par l'application (5. 5). Alors la variation de l'argument de $G(y, w)$ le long de C' est aussi 2π.

Or, Σ_0 étant contenue dans Σ, l'ordre de zéros ν de $f_1(p)$ sur Σ_0 est plus grand que 1. L'image C' de C est homotope à νC_0 dans $(\Delta_1, |w|<\infty)$, où C_0 est une courbe fermée de la forme

$$|y_1|=\rho_0,\ y_2=0,\ \ldots,\ y_n=0,\ w=0,$$

ρ_0 étant un nombre positif. Soit $2\mu\pi$ la variation de l'argument de $G(y, w)$ le long de C_0. Alors, celle de $G(y, w)$ le long de C' est $2\nu\mu\pi$, ou $\nu(>1)$ et μ sont des nombres entiers. Puisque $2\nu\mu\pi=2\pi$, c'est une contradiction. Donc le théorème 2 est démontré.

En particulier, le deuxième problème de Cousin pour C^{n+1} étant toujours résoluble, on a le

Corollaire. *Pour un système de n fonctions entières de $n+1$ variables complexes, les conditions (A_1) sont équivalentes aux conditions (A_0).*

UNIVERSITÉ FÉMININE DE NARA

Bibliographie

[1] O. Fujita, Sur les familles d'ensembles analytiques, J. Math. Soc. Japan, **16** (1964), 379-405.

[2] O. Fujita, Sur les systèmes de fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes, J. Math. Kyoto Univ., **19** (1979).

[3] T. Nishino, Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes (I), J. Math. Kyoto Univ. 8 (1968), 49-100.

[4] T. Nishino, Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes (II). Fonctions entières qui se réduisent à celles d'une variable, J. Math. Kyoto Univ., **9** (1969), 221-274.

[5] R. Remmert, Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume, Math. Ann., **133** (1957), 328-370.

[6] R. Remmert, Habilitationsschrift, Münster 1958.