J. Math. Kyoto Univ. (YMKYAZ)
30-1 (1990) 123-131

Unicité de Cauchy pour les opérateurs de type principal réel d'ordre trois

Par

Xavier SAINT RAYMOND

Le prolongement unique des solutions des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients C^∞a fait récemment l'objet d'un grand nomber de travaux. Le résultat principal, dû à Hörmander [5, th. 28.3.4], est le suivant: il y a prologement unique des solutions des équations principalement normales (cf. [5, def. 28.2.4]; en particulier, les opérateurs à symbole principal réel sont principalement normaux) à travers les surfaces fortement pseudo-convexes (cf. [5, def. 28.3.1]). Dans les cas les plus génériques, il a été montré que la faible pseudo-convexité (c'est-à-dire avec un signe large) était nécessaire à l'unicité: Alinhac [1], Saint Raymond [11], Robbiano [9]. Des résultats d'unicité et de non-unicité à travers des surfaces faiblement pseudo-convexes ont été obtenus dans Bahouri [3], Alinhac [2], Nirenberg [8], Lerner [6], Lerner-Robbiano [7], Hörmander [5, th. 28.4.3], Saint Raymond [12] et [13].

En particulier, pour les opérateurs du deuxième ordre à symbole principal réel p vérifiant pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n \backslash 0$

$$(1) \qquad \begin{gathered} p(x_0, \xi) = H_p \varphi(x_0, \xi) = H_p{}^2 \varphi(x_0, \xi) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} d_\xi p(x_0, \xi) \neq 0 \text{ (type principal)} \\ \text{et } H_\varphi{}^2 p(x_0, \xi) \neq 0 \text{ (surface non-caractéristique)} \end{cases} \end{gathered}$$

où $\varphi(x) = 0$ est une équation de la surface initiale, Lerner-Robbiano [7] et Hörmander [5, th. 28.3.4] établissent un résultat d'unicité compacte si la surface est faiblement pseudo-convexe au voisinage de x_0, et Saint Raymond [12] donne un résultat d'unicité de Cauchy si la surface est fortement pseudo-convexe dans un demi-voisinage de x_0. Le but du travail que nous présentons ici est de démontrer que ces résultats de Lerner-Robbiano [7] et Saint Raymond [12] sont encore vrais pour les opérateurs du troisième ordre à symbole principal réel p vérifiant (1), exactement comme à l'ordre deux.

Enfin, pour terminer cette introduction, signalons que nous avons aussi démontré, dans [13], des résultats semblables pour des opérateurs principalement normaux d'ordre quelconque; mais dans le cadre général de [13], les conditions de

Communicated by Prof. Ikebe, April 4, 1988

transversalité sont plus restrictives que (1), réclamant en particulier que $\overline{d_\xi p(x_0, \zeta)} \wedge d_\xi p(x_0, \zeta) \neq 0$ pour les solutions *complexes* $\zeta = \xi - i\tau d\varphi(x_0)$ de l'équation $p = \{p, \varphi\} = \mathscr{F}_\varphi = 0$ (type biprincipal), et surtout la condition de pseudo-convexité porte elle aussi sur les solutions *complexes* ζ de l'équation $p = \{p, \varphi\} = 0$, cf. Saint Raymond [13]. La particularité des opérateurs du troisième ordre à symbole principal réel qui apparait ici, et cela n'était connu jusqu'à présent que pour les opérateurs du deuxième ordre à symbole principal réel, est donc qu'il suffit de faire ces hypothèses aux zéros *réels* du symbole principal.

1. Enoncé des résultats

Soient x_0 un point de $\mathbf{R}^n$, S une hypersurface orientée régulière de $\mathbf{R}^n$ passant par $x_0$et d'équation $\varphi(x) = 0$(φ est C^∞et réelle, et telle que $\varphi(x_0) \neq 0$), et p un opérateur différentiel linéaire à coefficients C^∞et à symbole principal réel p. La propriété de prolongement unique à travers S que nous cherchons à caractériser peut s'énoncer de la façon suivante:

$$\forall u,\ Pu = 0 \text{ et } u_{|\varphi<0} = 0 \text{ près de } x_0 \Rightarrow u = 0 \text{ près de } x_0.$$

Cette propriété est liée à la géométrie des bicaractéristiques de p, c'est-à-dire à la géométrie des courbes intégrales du champ $H_p = p_\xi(x, \xi)\cdot\partial_x - p_x(x, \xi)\cdot\partial_\xi$ issues des points (x_0, ξ_0), $\xi_0 \in \mathbf{R}^n\backslash 0$, où p s'annule. En effet, si le symbole principal p vérifie (1) et s'il existe une bicaractéristique tangente à S en x_0à l'ordre deux ou quatre, et contenue dans le demi-espace d'équation $\varphi(x) \geqslant 0$, la propriété de prolongement unique n'est plus vraie à condition de modifier éventuellement les termes d'ordres inférieurs (Saint Raymond [12, th. 2.9 & coroll. 2.12]; comme précisé au paragraphe 1.1 de [12], ces résultat subsiste encore si la bicaractéristique est tangente à un ordre plus grand, pourvu qu'on fasse quelques hypothèses supplémentaires (ibid.).

Les énoncés ci-dessous traitent, pour les opérateurs du troisième ordre, des cas où aucune des bicaractéristiques passant par $x_0$ne reste localement dans le demi-espace d'équation $\varphi(x) > 0$. Nous renvoyons à Saint Raymond [12] pour une discussion des hypothèses du théorème et des corollaires suivants ainsi que de la géométrie des bicaractéristiques qui en résulte. Le théorème donne une propriété d'unicité compacte; les corollaires, des propriétés d'unicité de Cauchy plus classiques.

Théorème. *Soit S une surface non-caractéristique en x_0 pour l'opérateur différentiel linéaire P du troisième ordre à symbole principal réel p vérifiant* (1). *Supposons qu'il existe un voisinage Ω de $x_0$et une équation $\varphi(x) = 0$ de S tels que*

$$\forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbf{R}^n,\ p(x, \xi) = H_p\varphi(x, \xi) = 0 \Rightarrow H_p{}^2\varphi(x, \xi) \leqslant 0. \tag{2}$$

Alors tout solution locale $u \in H^2_{loc}(\mathbf{R}^n)$ de $Pu = 0$ vérifie

$$\operatorname{supp} u \subset \{x \in \mathbf{R}^n;\ \varphi(x) > 0\} \cup \{x_0\} \Rightarrow u = 0 \textit{ près de } x_0.$$

Remarque. Nous ne savons pas si ce théorème reste vrai en toute généralité lorsque la surface S est supposée caractéristique en x_0. Nous savons cependant le prouver si l'on introduit l'hypothèse supplémentaire: pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$,

$$p(x_0, \xi) = H_\varphi p(x_0, \xi) = H_\varphi{}^2 p(x_0, \xi) = 0 \Rightarrow (\mathrm{d}\varphi \wedge \xi \cdot \mathrm{dx})(x_0, \xi) = 0.$$

Les modifications à apporter à la démonstration du théorème sont indiquées en fin d'article.

Corollaire 1. *Soit P un opérateur différentiel linéaire du troisième ordre à symbole principal réel p. Supposons que*

(3) $$\forall \xi \in \mathbf{R}^n \backslash 0,\ p(x_0, \xi) = H_p\varphi(x_0, \xi) = 0 \Rightarrow H_p{}^2\varphi(x_0, \xi) < 0.$$

Alors on a la propriété suivante de prolongement unique:

$$\forall u \in H^2_{loc}(\mathbf{R}^n),\ Pu = 0 \text{ et } u_{|\varphi<0} = 0 \text{ près de } x_0$$
$$\Rightarrow u = 0 \text{ près de } x_0.$$

Corollaire 2. *Soit P un opérateur différentiel linéaire du troisième ordre à symbole principal réel p vérifiant* (1). *Supposons qu'il existe une fonction C^∞ à valeurs réelles ψ telle que*:

(i) *pour tout $\xi_0 \in \mathbf{R}^n \backslash 0$ vérifiant $p(x_0, \xi_0) = H_p\varphi(x_0, \xi_0) = 0$, il existe $k \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$ et un voisinage de (x_0, ξ_0) sur lequel*

$$\begin{cases} \varphi(x) = p(x, \xi) = H_p\varphi(x, \xi) = 0 \\ \psi(x) \geqslant \psi(x_0) \end{cases} \Rightarrow H_p{}^2\varphi(x, \xi) \leqslant -\varepsilon(\psi(x) - \psi(x_0))^k;$$

(ii) $$\forall \xi \in \mathbf{R}^n \backslash 0,\ p(x_0, \xi) = H_p\varphi(x_0, \xi) = H_p{}^2\varphi(x_0, \xi) = 0$$
$$\Rightarrow H_p\psi(x_0, \xi) \neq 0.$$

Alors, même conclusion qu'au corollaire 1.

Corollaire 3. *Soit P un opérateur différentiel linéaire du troisième ordre à symbole principal réel p vérifiant* (1). *Supposons qu'il existe une fonction C^∞ à valeurs réelles ψ telle que $(d\varphi \wedge d\psi)(x_0) \neq 0$ et*:

(i) *pour tout $\xi_0 \in \mathbf{R}^n \backslash 0$ vérifiant $p(x_0, \xi_0) = H_p\varphi(x_0, \xi_0) = 0$, il existe un voisinage de (x_0, ξ_0) sur lequel*

$$\begin{cases} \varphi(x) = p(x, \xi) = H_p\varphi(x, \xi) = 0 \\ \psi(x) > \psi(x_0) \end{cases} \Rightarrow H_p{}^2\varphi(x, \xi) \leqslant 0;$$

(ii) $$\forall \xi \in \mathbf{R}^n \backslash 0,\ p(x_0, \xi) = H_p\varphi(x_0, \xi) = H_p{}^2\varphi(x_0, \xi) = 0$$
$$\Rightarrow H_p{}^3\varphi(x_0, \xi) \neq 0.$$

Alors, même conclusion qu'aux corollaires 1 *et* 2.

2. Démonstrations

Comme dans Lerner-Robbiano [7] et Saint Raymond [13], le théorème se déduit d'une inégalité de Carleman (la démonstration étant très proche de celle de [13], nous renvoyons à ce travail pour les détails omis ici); à cet effet, nous introduisons les notations suivantes: on pose

$$P_\gamma = [\exp(-\gamma(1 - e^{-A\varphi(x)}))]\,P(x, D)\,[\exp(\gamma(1 - e^{-A\varphi(x)}))] \tag{4}$$

dont le symbole est un polynôme en (ξ, γ) de degré trois, dont la partie homogène de degré trois est

$$p_\gamma(x, \xi) = p(x, \xi - iA\gamma e^{-A\varphi(x)} d\varphi(x))$$

qui appartient à la classe de symboles $\sum^3$ où on a posé

$$\textstyle\sum^k = S((|\xi|^2 + \gamma^2)^{k/2}, |dx|^2 + (|\xi|^2 + \gamma^2)^{-1}|d\xi|^2)$$

(classes $S(m, g)$ de Hörmander [5, def. 18.4.2]). On utilisera les normes

$$\|u\|_k{}^2 = \int (|\xi|^2 + \gamma^2)^k |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi$$

et les voisinages de $x_0$définis par $\Omega_\delta = \{x \in \mathbf{R}^n;\ |x - x_0| < \delta\}$, $\delta > 0$, pour un choix de coordonnées fixé.

Avec ces notations, le théorème se déduit classiquement de l'inégalité de Carleman suivante.

Proposition. *Sous les hypothèses du théorème, il existe deux constantes* $A > 0$ *et* $\delta > 0$ *telles que, avec* P_γ *donné par la formule* (4), *on ait*

$$\forall \gamma \geqslant 1/\delta,\ \forall u \in C_0^\infty(\Omega_\delta),\ \|u\|_2 \leqslant \|P_\gamma u\|_0. \tag{5}$$

A son tour, et toujours comme dans [7] et [13], cette inégalité résulte des deux inégalités (9) et (10) ci-dessous; pour les obtenir, nous avons besoin d'une estimation sur le symbole $\{\overline{p_\gamma}, p_\gamma\}/i$.

Lemme 1. *Sous les hypothèses du théorème, il existe deux constantes* $A > 0$ *et* $\delta_0 > 0$, *et un symbole* $r_\gamma \in \sum^2$ *tels que*: $\forall x \in \Omega_{\delta_0}$, $\forall \xi \in \mathbf{R}^n$, $\forall \gamma \geqslant 1$,

$$\frac{1}{i}\{\overline{p_\gamma}, p_\gamma\}(x, \xi) + 2\mathrm{Re}(\overline{r_\gamma(x, \xi)}\, p_\gamma(x, \xi)) \geqslant 0. \tag{6}$$

Démonstration. Posons $\tau = A\gamma e^{-A\varphi(x)}$; alors

$$\begin{aligned} p_\gamma(x, \xi) &= p(x, \xi - i\tau d\varphi(x)) \\ &= p(x, \xi) + i\tau H_\varphi p(x, \xi) - \frac{\tau^2}{2} H_\varphi{}^2 p(x, \xi) - \frac{i\tau^3}{6} H_\varphi{}^3 p(x) \\ &= q_1(x, \xi, \tau) + i\tau q^2(x, \xi, \tau) \end{aligned}$$

avec $q_1(x, \xi, \tau) = p(x, \xi) - \tau^2 H_\varphi{}^2 p(x, \xi)/2$ et $q_2(x, \xi, \tau) = H_\varphi p(x, \xi) - \tau^2 H_\varphi{}^3 p(x)/6$. On a donc

$$\frac{1}{i}\{\overline{p_\gamma}, p_\gamma\} = 2\{q_1, \tau q_2\}$$

$$= 2\tau\{q_1, H_\varphi p\} - \frac{\tau^3}{3}\{q_1, H_\varphi{}^3 p\} + 2H_\varphi p\{q_1, \tau\} - \frac{H_\varphi{}^3 p}{3}\{q_1, \tau^3\}$$

On explicite ces quatre termes de la façon suivante:

$$\{q_1, H_\varphi p\} = \{p, H_\varphi p\} - \frac{\tau^2}{2}\{H_\varphi{}^2 p, H_\varphi p\} - \frac{H_\varphi{}^2 p}{2}\{\tau^2, H_\varphi p\}$$

$$= - H_p{}^2\varphi - \frac{\tau^2}{2}\{H_\varphi{}^2 p, H_\varphi p\} + A(\tau H_\varphi{}^2 p)^2,$$

$$\{q_1, H_\varphi{}^3 p\} = \{p, H_\varphi{}^3 p\} - \frac{\tau^2}{2}\{H_\varphi{}^2 p, H_\varphi{}^3 p\},$$

et

$$2H_\varphi p\{q_1, \tau\} - \frac{H_\varphi{}^3 p}{3}\{q_1, \tau^3\} = 2A\tau H_\varphi p H_\varphi q_1 - A\tau^3 H_\varphi{}^3 p H_\varphi q_1$$

$$= 2\mathrm{A}\tau(H_\varphi q_1)^2,$$

ce qui donne finalement

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{i}\{\bar{p}_\gamma, p_\gamma\}(x, \xi) = 2\tau F_A(x, \xi, \tau)\\
&\text{avec } F_A(x, \xi, \tau) = F_0(x, \xi, \tau) + A((\tau H_\varphi{}^2 p(x, \xi))^2 + (H_\varphi q_1(x, \xi, \tau))^2)\\
&\text{et } F_0(x, \xi, \tau) = - H_p{}^2\varphi(x, \xi) - \frac{\tau^2}{2}(\{H_\varphi{}^2 p, H_\varphi p\}(x, \xi)\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{3}\{p, H_\varphi{}^3 p\}(x, \xi)) + \frac{\tau^4}{12}\{H_\varphi{}^2 p, H_\varphi{}^3 p\}(x).
\end{aligned}\right.$$

Nous allons montrer maintenant que près de tout point (x_0, ξ, τ) tel que $|\xi|^2 + \tau^2 = 1$, il existe des fonctions C^∞réelles $r_1(x, \xi, \tau)$ et $r_2(x, \xi, \tau)$ telles que

$$(8)\qquad F_A + r_1 q_1 + r_2 q_2 \geqslant 0$$

pour A suffisamment grand.

En effet, s'il s'agit d'*un point où* $q_1^2 + q_2^2 > 0$, il suffit de prendre $r_1 = Cq_1$et $r_2 = Cq_2$avec C suffisamment grande puisque F_0reste borné localement. S'il s'agit d'*un point où* $q_1 = q_2 = 0$ *mais* $\tau \neq 0$, on a $H_\varphi q_1 = - \tau^2 H_\varphi{}^3 p/3 \neq 0$ car $q_2 = 0$ et $H_\varphi{}^3 p(x_0) \neq 0$ ($\Leftrightarrow S$ est non-caractéristique en x_0), d'où (8) avec $r_1 = r_2 = 0$ pour A suffisamment grand. S'il s'agit d'*un point où* $q_1 = q_2 = \tau = 0$ *mais* $H_p{}^2\varphi \neq 0$, on a $p = H_p\varphi = 0$ donc $H_p{}^2\varphi < 0$ d'après (2) et finalement $F_0 > 0$ en ce point; on obtient donc (8) par continuité dans un petit voisinage avec $r_1 = r_2 = 0$. Enfin, s'il s'agit d'*un point où* $q_1 = q_2 = \tau = H_p{}^2\varphi = 0$, on a $p = H_p\varphi = H_p{}^2\varphi = 0$ et d'après (1), $d_\xi p \neq 0$ et $H_\varphi{}^2 p \neq 0$; cela entraine que $p = H_p\varphi = 0$ est une variété régulière, et en utilisant (2) et une formule de Taylor, que $H_p{}^2\varphi \leqslant C(|p| + |H_p\varphi|)$ au voisinage; de même, $q_1 = q_2 = 0$ est une variété régulière sur laquelle $p = 0(\tau^2)$ et $H_p\varphi = 0(\tau^2)$ et donc sur laquelle $F_0 \geqslant -C\tau^2$; cela donne

$$F_{A|q_1=q_2=0} \geqslant -C\tau^2 + A\tau^2(H_\varphi{}^2 p)^2,$$

et comme $H_{\varphi^2}p \neq 0$, il en résulte que $F_A \geqslant 0$ sur $q_1 = q_2 = 0$ pour A suffisamment grand; on obtient donc (8) par une formule de Taylor.

En recouvrant le compact $x = x_0$, $|\xi|^2 + \tau^2 = 1$ par des ouverts où on a l'estimation (8), et en utilisant des techniques standard de partition de l'unité et d'homogénéisation, on en déduit qu'il existe des constantes $A > 0$ et $\delta_0 > 0$ et des fonctions réelles $r_1(x, \xi, \tau)$ et $r_2(x, \xi, \tau)$ homogènes en (ξ, τ) telles que (8) soit vérifiée pour tout $x \in \Omega_{\delta_0}$, tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ et tout $\tau \in \mathbf{R}$. Cela donne immédiatement le lemme 1 d'après la formule (7) si nous posons

$$r_\gamma(x, \xi) = r(x, \xi, A\gamma e^{-A\varphi(x)}) \text{ où } r(x, \xi, \tau) = \tau r_1(x, \xi, \tau) + i r_2(x, \xi, \tau).$$

L'estimation (6) sur les symboles va maintenant nous permettre d'établir les estimations (9) et (10) ci-dessous sur les opérateurs.

Lemme 2. *Sous les hypothèses du théorème et avec les constantes A et $\delta_0$données par le lemme* 1, *il existe une constante $\delta_1 \in]0, \gamma_0[$ telle que pour tout $\delta \in]0, \gamma_1]$,*

$$\text{(9)} \qquad \forall \gamma \geqslant 1/\delta, \forall u \in C_0^\infty(\Omega_\delta), \ \|u\|_2{}^2 \leqslant \frac{\delta}{\delta_1}(\|P_\gamma u\|_0{}^2 + \|P_\gamma^* u\|_0{}^2).$$

Démonstration. Nous conservons les notations de la démonstration précédente, en particulier la correspondance entre τ et γ.

Les points (x_0, ξ, τ) tels que $|\xi|^2 + \tau^2 = 1$ et $d_\xi p_\gamma = 0$ vérifient $p_\gamma = H_\varphi p_\gamma = 0$, ce qui implique que $p(x_0, \xi) = H_\varphi p(x_0, \xi) = \tau H_\varphi{}^2 p(x_0, \xi) = \tau H_\varphi{}^3 p(x_0) = 0$, puis que $\tau = 0$ et $d_\xi p(x_0, \xi) = 0$, et enfin d'après (1) que $H_p{}^2\varphi(x_0, \xi) \neq 0$; avec (2) et (7), cela donne $H_p{}^2\varphi < 0$ puis $F_A > 0$. Il en résulte que le compact $x = x_0$, $|\xi|^2 + \tau^2 = 1$ est réunion de deux compacts K_1et K_2tels que $F_A > 0$ sur K_1et $d_\xi p_\gamma \neq 0$ sur K_2; comme F_A reste borné sur K_2, il existe une constante C_1telle que

$$2F_A(x_0, \xi, \tau) + C_1 \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial p_\gamma}{\partial \xi_j}(x_0, \xi)\right|^2 > 0$$

sur K_2, et cela sera vrai aussi sur K_1. Par homogénéité et multiplication par τ, on obtient que pour $\gamma \geqslant 0$, et pour x dans un petit voisinage Ω_{δ_2} de x_0,

$$\frac{1}{i}\{\overline{p_\gamma}, p_\gamma\}(x, \xi) + C_2\gamma \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial p_\gamma}{\partial \xi_j}(x, \xi)\right|^2 - \varepsilon\gamma(|\xi|^2 + \gamma^2)^2 \geqslant 0.$$

Une inégalité de Gårding précisée (cf. [5, th. 18.1.14]; en réalité, il faudrait aussi introduire des fonctions de troncature, mais ces détails sont laissés au lecteur) donne alors pour toute $u \in C_0^\infty(\Omega_{\delta_2})$

$$\varepsilon\gamma \|u\|_2{}^2 \leqslant ([P_\gamma^*, P_\gamma]u, u) + C_2\gamma \sum_{j=1}^{n} \|Q_j u\|_0{}^2 + C_3\|u\|_2{}^2.$$

Comme dans [13], $Q_j = \dfrac{\partial p_\gamma}{\partial \xi_j}(x, D)$ vérifie

$$\|Q_j u\|_0{}^2 \leqslant C_4\delta \|u\|_2(\|P_\gamma u\|_0 + \|P_\gamma^* u\|_0 + \|u\|_2)$$

pour toute $u \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$, d'où

$$\varepsilon\gamma\|u\|_2{}^2 \leqslant C_5\gamma\delta(\|u\|_2{}^2 + \|P_\gamma u\|_0{}^2 + \|P_\gamma^* u\|_0{}^2)$$

pour $\gamma \geqslant 1/\delta$, ce qui donne (9) si l'on choisit

$$\delta_1 = \min\{\delta_0/2,\ \delta_2,\ \varepsilon/2C_5\}.$$

Lemme 3. *Sous les hypothèses du théorème et avec les choix de constantes des lemmes* 1 *et* 2, *il existe une constante* C_0 *telle que*

(10) $$\forall\gamma \geqslant 1,\ \forall u \in C_0^\infty(\Omega_{\delta_1}),\ \|P_\gamma^* u\|_0{}^2 \leqslant C_0(\|P_\gamma u\|_0{}^2 + \|u\|_2{}^2).$$

Démonstration. Ici encore, les détails de fonctions de troncature sont laissés au lecteur. Si R_γ est un opérateur dont le symbole r_γ a été donné par le lemme 1, l'opérateur $S_\gamma = [P_\gamma^*, P_\gamma] + R_\gamma^* P_\gamma + P_\gamma^* R_\gamma$ admet pour symbole $s_\gamma = \{\overline{p_\gamma}, p_\gamma\}/i + 2\,\mathrm{Re}(\overline{r_\gamma}\ p_\gamma)$ modulo $\sum^4$, lequel est positif d'après (6). Une inégalité de Gårding précisée (cf. [5, th. 18.1.14]) donne alors (10) si on majore $2\,\mathrm{Re}(P_\gamma u, R_\gamma u)$ par $\|P_\gamma u\|_0{}^2 + C\|u\|_2{}^2$.

Démonstration de la proposition et du théorème. En combinant les inégalités (9) et (10), on obtient l'inégalité (5) de la proposition pourvu qu'on choisisse δ suffisamment petit. La propriété d'unicité compacte en résulte de façon standard: d'après le lemme de Friedrichs, l'inégalité (5) s'étend à toutes les distributions $u \in H^2_{loc}(\mathbf{R}^n)$ à support compact telles que $Pu \in L^2(\mathbf{R}^n)$, et on peut donc l'appliquer à la solution donnée de $Pu = 0$ multipliée par le poids $\exp(-\gamma(1 - \mathrm{e}^{-A\varphi}))$ et par une fonction de troncature; on obtient la conclusion en faisant tendre le paramètre γ vers l'infini après avoir sorti les poids des intégrales.

Cas où la surface S est caractéristique en x_0: d'après le lemme 0 de Saint Raymond [10], il existe alors des coordonnées locales (x_1, x', x_n) telles que $x_0 = 0$, $\varphi(x) = x_n$ et

(11)
$$p(x, \xi) = x_1\xi_n{}^3 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j(x)\xi_j\xi_n{}^2 + q(x, \xi)$$
avec $a_1(0) = H_p{}^2\varphi(x_0, \mathrm{d}\varphi(x_0)) < 0$ d'après (1) et (2),
et $\dfrac{\partial^2 q}{\partial \xi_n{}^2}(x, \xi) \equiv 0.$

Pour démontrer le théorème dans ce cas, il faudrait modifier les deux points du raisonnement où l'on utilise que $H_\varphi{}^3 p(x_0) \neq 0$ (dans les démonstrations des lemmes

1 et 2), et le lecteur vérifiera aisément qu'il suffirait pour cela de prouver que $F_0(x_0, \xi, \tau) > 0$ pour $|\xi|^2 + \tau^2 = 1$ si $p(x_0, \xi) = H_\varphi p(x_0, \xi) = H_\varphi{}^2 p(x_0, \xi) = 0$. Or, la formule (11) permet de calculer que

$$F_0(x_0, \lambda d\varphi(x_0), \tau) = -(\lambda^2 + \tau^2)^2 H_p{}^2 \varphi(x_0, d\varphi(x_0)) > 0$$

pour $\lambda^2 + \tau^2 = 1$; le théorème est donc démontré si on suppose que $d\varphi(x_0)$ est la seule direction dans laquelle $p = H_\varphi p = H_\varphi{}^2 p = 0$, c'est-à-dire si

$$p(x_0, \xi) = H_\varphi p(x_0, \xi) = H_\varphi{}^2 p(x_0, \xi) = 0 \Rightarrow (d\varphi \wedge \xi \cdot dx)(x_0, \xi) = 0.$$

Démonstration des corollaires. Pour le *corollaire* 1, on peut utiliser la partie b) de la démonstration du théorème 8.8.1 de Hörmander [4, p.221] qui permet de supposer que la surface $\varphi(x) = 0$ n'est pas caractéristique en x_0. De plus, l'hypothèse (3) reste inchangée si on remplace $\varphi(x)$ par $\psi(x) = \varphi(x) + |x - x_0|^4$; comme l'hypothèse (3) implique aussi bien (1) que (2), on déduit du théorème une propriété d'unicité compacte à travers la surface d'équation $\psi(x) = 0$, ce qui fournit la propriété de prolongement unique annoncée. Enfin, la démonstration des *corollaires* 2 *et* 3 est toute semblable à celle des théorème 2.1 et corollaire 2.4 de Saint Raymond [12]; les détails en sont laissés au lecteur.

Exemple. Considérons près de $x_0 = (0, 0, 0) \in \mathbf{R}^3$ l'exemple suivant

$$p(x, \xi) = x_1 \xi_3 (3\xi_1{}^2 + 3\xi_2{}^2 + \xi_3{}^2) - \xi_1(\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2), \quad \varphi(x) = x_3.$$

Le problème correspondant possède alors la propriété de prolongement unique à travers S car l'hypothèse (3) du corollaire 1 est vérifiée. On remarquera toutefois que la surface S n'est pas fortement pseudo-convexe en x_0(prendre $\zeta = dx_2 - i\sqrt{2}dx_3$), ce qui implique qu'on ne peut avoir d'inégalité de Carleman dans ce cas (cf. [5, th. 28.2.1]); ainsi, si le théorème du présent article reste vrai en général dans le cas caractéristique, on ne pourra cependant pas le prouver par la méthode des inégalités de Carleman proposée ici.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES (BÂT, 425)
UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
F 91405 ORSAY CEDEX.

Bibliographie

[1] S. Alinhac, Non-unicité du problème de Cauchy, Annals of Math., **117** (1983), 77–108.

[2] S. Alinhac, Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs du second ordre à symboles réels, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **34** (2) (1984), 89–109.

[3] H. Bahouri, Unicité et non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel, Thèse de troisième cycle, Orsay, 1982.

[4] L. Hörmander, Linear partial differential operators, 4ème édition, Springer Verlag, Berlin, 1963/1976.

[5] L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators III & IV, Springer Verlag, Berlin, 1985.

[6] N. Lerner, Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques, Ann. Sc. de l'E.N.S. Paris $4^{\grave{e}me}$ série, **17** (1984), 469–505.

[7] N. Lerner et L. Robbiano, Unicité de Cauchy pour des opérateurs de type principal, J. d'Analyse Math., **44** (1984/85), 32–66.

[8] L. Nirenberg, Uniqueness in the Cauchy problem for a degenerate elliptic second order equation, in Differential geometry and complex analysis Vol. dedic. H.E. Rauch (Chavel I. & Farkas H.M. ed.), 213–218, Springer Verlag, Berlin, 1985.

[9] L. Robbiano, Sur les conditions de pseudo-convexité et l'unicité de Cauchy, à paraître dans Indiana Univ. Math. J.

[10] X. Saint Raymond, L'unicité pour des problèmes de Cauchy caractéristiques, Comm. in P.D.E., **7** (1982), 559–579.

[11] X. Saint Raymond, Non-unicité de Cauchy pour des opérateurs principalement normaux, Indiana Univ. Math. J., **33** (1984), 847–858.

[12] X. Saint Raymond, Résultats d'unicité de Cauchy instable dans des situations où la condition de pseudo-convexité dégénère, Ann. della Sc. Norm. Sup. di Pisa ser. IV, **13** (1986), 661–687.

[13] X. Saint Raymond, Unicité de Cauchy à partir de surfaces faiblement pseudo-convexes, à paraître.