ZUM ISOMORPHIEPROBLEM FÜR GRUPPEN MIT EINER DEFINIERENDEN RELATION

BY

GERHARD ROSENBERGER

Herrn Professor W. Magnus in Dankbarkeit gewidmet

1. Einleitung

A. In dieser Note beschäftigen wir uns mit den Gruppen

$$G = \left\langle a_1, \ldots, a_g, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q \;\middle|\; \left(a_1^{n_1} \cdots a_g^{n_g} \prod_{i=1}^{q} [t_i, u_i]\right)^{\alpha} = 1 \right\rangle,$$

$\alpha \geq 1$, $n_j \geq 2$ $(j = 1, \ldots, g)$ sowie $g \geq 2$ falls $q = 0$. Diese Gruppen sind von großem Interesse sowohl für die Gruppentheorie (als Gruppen mit einer definierenden Relation) als auch für die Topologie (vgl. [9]).

Hier zeigen wir: Ist $\alpha \geq 2$ und $\{x_1, \ldots, x_{2q+g}\}$ ein Erzeugendensystem von G, so gibt es einen freien Übergang (Nielsen-Transformation) von $\{x_1, \ldots, x_{2q+g}\}$ zu dem System $\{a_1, \ldots, a_g, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q\}$ (Satz 2). Dadurch lösen wir das Isomorphieproblem für die Gruppen G mit $\alpha \geq 2$ in dem Sinn, daß wir in endlich vielen Schritten entscheiden können, ob eine beliebige Gruppe mit einer definierenden Relation zu einer Gruppe G mit $\alpha \geq 2$ isomorph ist oder nicht. Weiter ist eine Gruppe G mit $\alpha \geq 2$ nach Satz 2 und [4] eine Hopfsche Gruppe, d.h. jeder Endomorphismus von G auf G ist ein Automorphismus.

Für eine Gruppe G mit $\alpha = 1$ gilt eine Aussage wie in Satz 2 im allgemeinen nicht. Eine Kennzeichnung aller Erzeugendensysteme $\{x_1, \ldots, x_{2q+g}\}$ einer Gruppe G mit $\alpha = 1$ wird durch Satz 3 gegeben.

Durch Satz 1 erhalten wir einen Überblick über Lösungen einer Gleichung in einem freien Produkt zyklischer Gruppen.

B. Diese Note verwendet die Terminologie und Bezeichnungsweise von [8] und [6], wobei $\langle \cdots | \cdots \rangle$ die Gruppenbeschreibung durch Erzeugende und definierende Relationen bedeutet. Unter $H = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ verstehen wir die von den $a_1, \ldots, a_n$ erzeugte Gruppe. Sind $\{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\{y_1, \ldots, y_n\}$ minimale Erzeugendensysteme von $H = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, so sagen wir: $\{x_1, \ldots x_n\}$ und $\{y_1, \ldots, y_n\}$ liegen in einer Nielsen-Äquivalenzklasse, wenn es einen freien Übergang von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ zu $\{y_1, \ldots, y_n\}$ gibt.

Ist in einer Gruppe H eine Länge L definiert, so sagen wir wie in [6], daß ein System $\{g_j\}_{j \in J} \subset H$ die Nielsensche Eigenschaft hat, wenn gilt:

(1) $L(g_i^{\varepsilon} g_j^{\eta}) \geq \max\{L(g_i), L(g_j)\}$ für $\varepsilon, \eta = \pm 1$ und $i \neq j$ oder $i = j$, $\varepsilon = \eta$,

(2) $L(g_k^{\varepsilon} g_i g_j^{\eta}) > L(g_k) - L(g_i) + L(g_j)$ für $\varepsilon, \eta = \pm 1$ und $k \neq i \neq j$, $g_i \neq 1$ oder $k = i \neq j$, $g_i \neq 1$, $\varepsilon = 1$ oder $k \neq i = j$, $g_i \neq 1$, $\eta = 1$.

Received November 14, 1974.

2. Erzeugende von G

SATZ 1. *Sei*

$$K = \langle s, a_1, \ldots, a_g \mid s^\beta = 1\rangle, \quad \beta \geq 2.$$

Sei $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ $(n \leq g + 1)$ *und* X *die von den* $x_1, \ldots, x_n$ *erzeugte Untergruppe von* K. *Sei*

(2.1) $y^{-1}(sa_1^{n_1} \cdots a_g^{n_g})^\alpha y \in X$ *für* $n_i \geq 1$ $(i = 1, \ldots, g)$, *ein* $\alpha \neq 0$ *und* $y \in K$.

Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

(a) *Es gibt einen freien Übergang von* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *zu einem System, in dem ein Element zu einer Potenz von* s *konjugiert ist.*

(b) *Es gibt einen freien Übergang von* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *zu einem System* $\{y_1, \ldots, y_n\}$ *mit* $y_1 = za_i^\gamma z^{-1}$ *für ein* $i(1 \leq i \leq g)$, $\gamma \geq 2$ *und* $z \in K$.

(c) *Es gibt einen freien Übergang von* $\{x_1. \ldots, x_n\}$ *zu einem System* $\{y_1, \ldots, y_n\}$ *mit* $y_1 = z_1 a_i^\gamma z_1^{-1}$, $y_2 = z_2 a_i^\delta z_2^{-1}$ *für ein* $i(1 \leq i \leq g)$ *und* $z_1, z_2 \in K$.

(d) *Es gibt einen freien Übergang von* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *zu einem System, in dem ein Element zu einer Potenz von* $sa_1^{n_1} \cdots a_g^{n_g}$ *konjugiert ist.*

(e) *Es ist* $n = g + 1$.

Beweis. Es trete nicht der Fall (e) ein; es sei also $n \leq g$. In K sei eine Länge L und eine geeignete Ordnung relativ zu der Faktorisierung $\langle s\rangle * \langle a_1\rangle * \cdots * \langle a_g\rangle$ wie in [8] (und [6]) eingeführt. Im folgenden sei α die kleinste positive Zahl, für die eine Beziehung (2.1) gilt. Wir dürfen—eventuell nach Ersetzen von x_i durch yx_iy^{-1}—annehmen, daß für das minimale α und $\{x_1, \ldots, x_n\}$ gilt:

(2.2) $\prod_{j=1}^{p} x_{\nu_j}^{\varepsilon_j} = (sa_1^{n_1} \cdots a_g^{n_g})^\alpha$, $\varepsilon_j = \pm 1$, $\varepsilon_j = \varepsilon_{j+1}$ falls $\nu_j = \nu_{j+1}$.

Indem wir analog wie beim Beweis von Satz 6 und Satz 8 aus [6] vorgehen, erhalten wir mit [8; Korollar 1 und Hilfssatz 1] einen freien Übergang von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ zu einem System, welches die Nielsensche Eigenschaft bzgl. L besitzt oder in dem ein Element zu einer Potenz von s oder zu einem a_i^γ, $\gamma \geq 2$, konjugiert ist.

Wir brauchen nur den ersten Fall zu betrachten. Da die Aussage des Satzes für $g = 0$ oder $p = 1$ natürlich richtig ist, dürfen wir im folgenden vorraussetzen:

(2.3) (1) $g > 0, p > 1$.

(2) $\{x_1, \ldots, x_n\}$ hat die Nielsensche Eigenschaft bzgl. L und genügt einer Gleichung (2.2), wobei wir ohne Einschränkung $i = \nu_j$ für ein j $(i = 1, \ldots, n)$ annehmen können.

(3) p ist minimal unter den Zahlen gewählt, für die eine Gleichung (2.2) mit dem minimalen α gilt.

Indem wir analog wie beim Beweis von Satz 5 und Satz 6 aus [6] vorgehen, erhalten wir:

Tritt in der Gleichung (2.2) ein x_j mindestens zweimal mit dem gleichen Exponenten auf, so ist dieses x_j zu einer Potenz von s oder von einem a_i konjugiert.

Es trete nun nicht der Fall (a) ein, d.h. es sei kein x_j zu einer Potenz von s konjugiert.

Angenommen es treten in der Gleichung (2.2) einige, aber nicht alle der x_j mindestens zweimal mit dem gleichen Exponenten auf, und es kommen die anderen x_i einmal mit dem Exponenten $+1$ und einmal mit dem Exponenten -1 vor. Es ist jedes der x_j, das in (2.2) mindestens zweimal mit dem gleichen Exponenten auftritt, zu einer Potenz von einem a_k konjugiert. Wegen $n \leq g$ gibt es dann ein a_λ, für das kein x_j zu einer Potenz von diesem a_λ konjugiert ist, etwa a_1. Dann liegt nach Einssetzen von s und Abelschmachen ein a_1^η, $\eta \neq 0$, in der von den $a_2, \ldots, a_g$ erzeugten abelschen Gruppe. Das ist aber ein Widerspruch dazu, daß nach Einssetzen von s und Abelschmachen die Gruppe $\langle a_1, \ldots, a_g \rangle$ freie abelsche Gruppe vom Rang g ist.

Es liegt also einer der folgenden Fälle vor:

(2.4) Ein x_k tritt in (2.2) nicht zweimal mit dem gleichen Exponenten auf, und es kommt dieses x_k nicht einmal mit dem Exponenten $+1$ und einmal mit dem Exponenten -1 vor.

(2.5) Es tritt in (2.2) jedes x_j mindestens zweimal mit dem gleichen Exponenten auf.

zu (2.4). Dann gibt es einen freien Übergang von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ zu einem System, in dem ein Element zu einer Potenz von $sa_1^{n_1} \cdots a_g^{n_g}$ konjugiert ist.

zu (2.5). Dann ist jedes x_j zu einer Potenz von einem a_i konjugiert.

Angenommen es sind nicht zwei verschiedene x_j zu einer Potenz desselben a_ν konjugiert. Dann ist $n = g$, denn für $n < g$ erhalten wir einen Widerspruch dazu, daß nach Einssetzen von s und Abelschmachen die Gruppe $\langle a_1, \ldots, a_g \rangle$ freie abelsche Gruppe vom Rang g ist. Sei ohne Einschränkung

$$x_i = z_i a_i^{\gamma_i} z_i^{-1} \quad \text{für } i = 1, \ldots, g \text{ und } z_i \in K.$$

Nach Einssetzen von $a_2, \ldots, a_g$ erhalten wir: $(sa_1^{n_1})^\alpha$ liegt in einer zu $\langle a_1 \rangle$ konjugierten Untergruppe von $K = \langle s, a_1 \rangle$. Nach Einssetzen von $a_2, \ldots, a_g$ und $a_1^{n_1+1}$ hat daher $sa_1^{n_1}$ endliche Ordnung in $\langle s, a_1 \mid s^\beta = a_1^{n_1+1} = 1 \rangle$, und das kann nicht sein.

Es sind also zwei verschiedene x_j zu einer Potenz desselben a_ν konjugiert, d.h. es tritt Fall (c) ein. Q.E.D.

LEMMA 1. *G hat den Rang $2q + g$, d.h. G läßt sich nicht von weniger als $2q + g$ Elementen erzeugen.*

Beweis. Das freie Produkt $P_1 * P_2$ mit

$$P_1 = \langle a_1, \ldots, a_g \mid a_1^{n_1} = \cdots = a_g^{n_g} = 1 \rangle$$

und

$$P_2 = \left\langle t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q \,\middle|\, \prod_{i=1}^{q} [t_i, u_i] = 1 \right\rangle$$

ist eine Faktorgruppe von G; sie hat nach dem Satz von Grushko (vgl. [8]) den Rang $2q + g$ und damit auch G (P_2 hat den Rang $2q$). Q.E.D.

LEMMA 2. *Sei $\alpha \geq 2$ und $q \geq 1$. Sei $\{x_1, \ldots, x_{2q+g}\}$ ein Erzeugendensystem von G mit $x_1 = ha_i^\gamma h^{-1}$ für ein i $(1 \leq i \leq g)$, $\gamma \geq 0$ und $h \in G$. Dann ist $\gamma = 1$.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung $i = 1$ und $h = 1$, d.h. $x_1 = a_1^\gamma$, annehmen. Nach Lemma 1 ist $\gamma \geq 1$. Nach Einssetzen von $a_1^{n_1}$ ergibt sich $(\gamma, n_1) = 1$. Wir wollen $\gamma = 1$ zeigen.

Ist $g \geq 2$, so führen wir die Relation $a_2^{n_2} \cdots a_g^{n_g} = 1$ hinzu und betrachten das freie Produkt $P_1 * P_2$ mit

$$P_1 = \left\langle a_1, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q \;\middle|\; \left(a_1^{n_1} \prod_{i=1}^{q} [t_i, u_i]\right)^\alpha = 1 \right\rangle$$

und

$$P_2 = \langle a_2, \ldots, a_g \mid a_2^{n_2} \cdots a_g^{n_g} = 1 \rangle.$$

Die Bilder der x_i seien wieder mit x_i bezeichnet. Nach dem Satz von Grushko gibt es einen freien Übergang von $\{x_1, \ldots, x_{2q+g}\}$ zu einem System $\{y_1, \ldots, y_{2q+g}\}$ mit $y_1 = x_1 = a_1^\gamma$, $y_i \in P_1$ für $i = 2, \ldots, 2q + 1$ und $y_j \in P_2$ für $j = 2q + 2, \ldots, 2q + g$; und es ist $P_1 = \langle y_1, \ldots, y_{2q+1} \rangle$.

Es genügt also, den Beweis für $g = 1$ zu führen. Sei nun $g = 1$. Wir schreiben G als freies Produkt mit Amalgam $H_1 *_A H_2$ mit

$$H_1 = \langle s, a_1 \mid s^\alpha = 1 \rangle, \quad H_2 = \langle t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q; \rangle$$

und

$$A = \langle a \rangle = \langle s a_1^{n_1} \rangle = \left\langle \left(\prod_{i=1}^{q} [t_i, u_i] \right)^{-1} \right\rangle.$$

In G sei eine Länge L und eine geeignete Ordnung relativ zu dieser Faktorisierung wie in [8] (und [6]) eingeführt.

Darauf bezogen verkürzen wir $\{x_1, \ldots, x_{2q+1}\}$. Da x_1 bzgl. dieser Faktorisierung die Länge 1 hat, bleibt es unverändert erhalten.

Nach Lemma 1 ist kein x_i zu einer Potenz von a konjugiert. Damit können wir nach [8; Satz 1 und Korollar 1] annehmen, daß einer der folgenden Fälle vorliegt:

(2.6) Es ist $L(x_j) \leq 1$ für $j = 1, \ldots, 2q + 1$.

(2.7) Es liegen Elemente $x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_p}$, $p \geq 1$, in einer zu H_1 oder H_2 konjugierten Untergruppe von G und ein Produkt in ihnen ist zu einem von 1 verschiedenen Element aus A konjugiert.

Liegt (2.6) vor, so ist nach Lemma 1 sogar $L(x_j) = 1$ für $j = 1, \ldots, 2q + 1$. Weiter liegen notwendig $2q$ der x_j in H_2. Wegen $x_1 \in H_1$ sind $x_2, \ldots, x_{2q+1} \in H_2$. Sei $H = \langle x_2, \ldots, x_{2q+1} \rangle$. Da H_1 den Rang zwei hat, müssen bei der Darstellung von s die $x_2, \ldots, x_{2q+1}$ helfen, d.h. in H liegt ein Element aus G, das zu einem von 1 verschiedenen Element aus A konjugiert ist. Es liegt also notwendig (2.7) vor.

Wir können uns daher auf die Untersuchung von (2.7) beschränken. Es liege nun (2.7) vor: Die $x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_p}$ liegen wegen $x_1 = a_1^\gamma$ in einer zu H_2 konjugierten Untergruppe von G (diese p Elemente können nicht aus einer zu H_1 konjugierten Untergruppe von G sein, da sonst nach Einssetzen von H_1 die abelsch-gemachte Gruppe einen Rang $\leq 2q - 1$ hätte). Nach Einssetzen von H_1 und Abelschmachen bleiben die $x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_p}$ natürlich unabhängig. Nach [8; Satz 5] gibt es damit einen freien Übergang von $\{x_1, \ldots, x_{2q+1}\}$ zu einem System

$$\{za_1^\gamma z^{-1}, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q\}, \quad z \in G.$$

Nun stellen wir s und a_1 durch $za_1^\gamma z^{-1}, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q$ dar. Es gibt natürlich keinen Fall (2.7), an dem $za_1^\gamma z^{-1}$ beteiligt ist. Wir dürfen annehmen, daß $za_1^\gamma z^{-1}$ mit einem Faktor aus H_2 weder beginnt noch endet. Dann muß aber $L(za_1^\gamma z^{-1}) \leq 1$ sein. Also ist notwendig $H_1 = \langle za_1^\gamma z^{-1}, a \rangle$. Angenommen $\gamma \geq 2$. Fügen wir in H_1 die Relation $a_1^\gamma = 1$ hinzu, so ist die Gruppe $\langle s, a_1 \mid s^\alpha = a_1^\gamma = 1 \rangle$ zyklisch; und das ist ein Widerspruch. Also ist $\gamma = 1$. Q.E.D.

SATZ 2. *Ist $\alpha \geq 2$ und $\{x_1, \ldots, x_{2q+g}\}$ ein Erzeugendensystem von G, so gibt es einen freien Übergang von $\{x_1, \ldots, x_{2q+g}\}$ zu $\{a_1, \ldots, a_g, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q\}$.*

Beweis. Für $g = 0$ ist dies Satz 12 von [6]. Für $q = 0$ ist dies Satz 23 von [6]. Sei nun $g \geq 1$ und $q \geq 1$. Wir fassen G als freies Produkt mit Amalgam $H_1 *_A H_2$ auf mit

$$H_1 = \langle s, a_1, \ldots, a_g \mid s^\alpha = 1 \rangle, \quad H_2 = \langle t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q; \rangle$$

und

$$A = \langle a \rangle = \langle sa_1^{n_1} \cdots a_g^{n_g} \rangle = \left\langle \left(\prod_{i=1}^{q} [t_i, u_i] \right)^{-1} \right\rangle.$$

In G sei eine Länge L und eine geeignete Ordnung relativ zu dieser Faktorisierung wie in [8] (und [6]) eingeführt. Darauf bezogen verkürzen wir $\{x_1, \ldots, x_{2q+g}\}$.

Nach Lemma 1 ist kein x_i zu einer Potenz von a konjugiert. Damit können wir nach [8; Satz 1 und Korollar 1] annehmen, daß einer der folgenden Fälle vorliegt:

(2.8) Es ist $L(x_j) \leq 1$ für $j = 1, \ldots, 2q + g$.

(2.9) Es liegen Elemente $x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_p}$, $p \geq 1$, in einer zu H_1 oder H_2 konjugierten Untergruppe von G und ein Produkt in ihnen ist zu einem von 1 verschiedenen Element aus A konjugiert.

Liegt (2.8) vor, so ist nach Lemma 1 sogar $L(x_j) = 1$ für $j = 1, \ldots, 2q + g$. Weiter liegen notwendig $2q$ der x_j in H_2 und g der x_j in H_1. Seien etwa $x_1, \ldots,$

$x_{2q} \in H_2$ und $H = \langle x_1, \ldots, x_{2q} \rangle$. Da H_1 den Rang $g + 1$ hat, müssen bei der Darstellung von s oder von mindestens einem a_k die $x_1, \ldots, x_{2q}$ helfen, d.h. in H liegt ein Element aus G, das zu einem von 1 verschiedenen Element aus A konjugiert ist. Es liegt also notwendig (2.9) vor.

Wir können uns daher auf die Untersuchung von (2.9) beschränken. Es liege nun (2.9) vor: Nach Satz 1, Lemma 1 und Lemma 2 liegen die $x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_p}$ in einer zu H_2 konjugierten Untergruppe von G. Natürlich bleiben die $x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_p}$ nach Einssetzen von H_1 und Abelschmachen unabhängig. Nach [8; Satz 5] gibt es einen freien Übergang von $\{x_1, \ldots, x_{2q+g}\}$ zu einem System $\{y_1, \ldots, y_g, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q\}$. Nun stellen wir $s, a_1, \ldots, a_g$ durch $y_1, \ldots, y_g, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q$ dar. Nach Satz 1, Lemma 1 und Lemma 2 gibt es keinen Fall (2.9), an dem einige der $y_1, \ldots, y_g$ beteiligt sind. Wir dürfen annehmen, daß $y_1, \ldots, y_g$ mit einem Faktor aus H_2 weder beginnen noch enden und Nielsen-reduziert sind. Dann können größere Verkürzungen zwischen den $y_1, \ldots, y_g$ nicht durch Elemente von H_2 bewirkt werden. Daher muß $L(y_j) \leq 1, j = 1, \ldots, g$, sein. Ferner ist $H_1 = \langle y_1, \ldots, y_g, a \rangle$. Wegen $2 \leq n_j$ $(j = 1, \ldots, g)$ erhalten wir als Konsequenz des Satzes von Grushko einen freien Übergang von $\{y_1, \ldots, y_g, a\}$ zu dem System $\{a_1, \ldots, a_g, a\}$, der sich zu einem von $\{y_1, \ldots, y_g, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q\}$ zu $\{a_1, \ldots, a_g, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q\}$ erweitern läßt. Q.E.D.

KOROLLAR 1. *Sei $\alpha \geq 2$. Dann gilt:*

(i) *Jeder Automorphismus von G wird von einem Automorphismus der freien Gruppe vom Rang $2q + g$ induziert.*

(ii) *G ist eine Hopfsche Gruppe, d.h. jeder Endomorphismus von G auf G ist ein Automorphismus von G.*

Beweis. Die Aussage (i) gilt nach Satz 2. Nach Satz 2 hat G genau eine Nielsen-Äquivalenzklasse von minimalen Erzeugendensystemen, und G ist damit nach [4] Hopfsche Gruppe. Q.E.D.

Bemerkungen. (1) Aufgrund von Satz 2 läßt sich mit der Methode von Whitehead (vgl. [5], [7]) entscheiden, ob eine vorgegebene Gruppe mit einer definierenden Relation isomorph zu einer Gruppe G mit $\alpha \geq 2$ ist oder nicht.

(2) Für eine Gruppe G mit $\alpha = 1$ gilt eine Aussage wie in Satz 2 im allgemeinen nicht. Gehen wir bei einer Gruppe G mit $\alpha = 1$ ähnlich wie in [6], insbesondere wie beim Beweis von Satz 22 (der Fall $q = 0$), bzw. wie beim Beweis von Satz 2 vor, so erhalten wir (wir verzichten hier auf den doch recht langen Beweis):

SATZ 3. (a) *Sei $\alpha = 1$ sowie $g \geq 3$ falls $q = 0$. Ist $\{x_1, \ldots, x_{2q+g}\}$ ein Erzeugendensystem von G, so gibt es einen freien Übergang von $\{x_1, \ldots, x_{2q+g}\}$ zu einem System*

$$\{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i^{\gamma_i}, a_{i+1}, \ldots, a_g, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q\}$$

für ein $i (1 \leq i \leq g)$ mit $(\gamma_i, n_i) = 1$ und $1 \leq \gamma_i \leq \frac{1}{2} n_i$.

(b) *Sei* $\alpha = 1, q = 0$ *und* $g = 2$. *Ist* $\{x_1, x_2\}$ *ein Erzeugendenpaar von G, so gibt es einen freien Übergang von* $\{x_1, x_2\}$ *zu einem System* $\{a_1^{\gamma_1}, a_2^{\gamma_2}\}$ *mit* $(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_1, n_1) = (\gamma_2, n_2) = 1$ *und* $1 \leq \gamma_1 \leq \frac{1}{2}\gamma_2 n_1$, $1 \leq \gamma_2 \leq \frac{1}{2}\gamma_1 n_2$. *Für* $n_1 + n_2 \geq 5$ *besitzt G unendlich viele verschiedene Nielsen-Äquivalenzklassen von Erzeugendenpaaren von G.*

Die Gruppen G mit $\alpha = 1$, $g = 0$ wurden schon in [8], die Gruppen G mit $\alpha = 1, q = 0, n_1 = \cdots = n_g = 2$ schon in [3] und die Gruppen G mit $\alpha = 1$, $q = 0, g = 2$ schon in [2] behandelt. In [1] wurde gezeigt, daß eine Gruppe G mit $\alpha = 1, q = 0, g = 2, n_1 = 2, n_2 = 3$ unendlich viele verschiedene Nielsen-Äquivalenzklassen von Erzeugendenpaaren besitzt.

(3) Satz 1, Korollar 1 und Satz 5 von [8], Lemma 7, Lemma 15 und Satz 6 von [6] sowie Satz 1, Lemma 2 und Satz 2 zusammen ergeben zum Beispiel durch Kombination leicht folgende weitere Aussagen:

KOROLLAR 2. *Sei*

$$H = \left\langle a_1, \ldots, a_g, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q \;\middle|\; \left(a_1^{n_1} \cdots a_g^{n_g}\left(\prod_{i=1}^{q} [t_i, u_i]\right)^{\alpha}\right)^{\gamma} = 1 \right\rangle,$$

$\alpha \geq 1$, $\gamma \geq 2$, $n_j \geq 2$ $(j = 1, \ldots, g)$ *und* $q \geq 1$. *Ist* $\{x_1, \ldots, x_{2q+g}\}$ *ein Erzeugendensystem von H, so gibt es einen freien Übergang von* $\{x_1, \ldots, x_{2q+g}\}$ *zu* $\{a_1, \ldots, a_g, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q\}$.

KOROLLAR 3. *Sei*

$$H = \langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_q \mid (a_1^{n_1} \cdots a_g^{n_g}(b_1^{m_1} \cdots b_q^{m_q})^{\alpha})^{\gamma} = 1 \rangle,$$

$\alpha \geq 1, \gamma \geq 2, n_j \geq 2\,(j = 1, \ldots, g), m_i \geq 2\,(i = 1, \ldots, q), g \geq 1$ *und* $q \geq 1$. *Ist* $\{x_1, \ldots, x_{g+q}\}$ *ein Erzeugendensystem von H, so gibt es einen freien Übergang von* $\{x_1, \ldots, x_{g+q}\}$ *zu* $\{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_q\}$.

KOROLLAR 4. *Sei*

$$H = \left\langle a_1, \ldots, a_g, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q \;\middle|\; \left((a_1^{n_1} \cdots a_g^{n_g})^{\alpha} \prod_{i=1}^{q} [t_i, u_i]\right)^{\gamma} = 1 \right\rangle,$$

$\alpha \geq 1, \gamma \geq 2, n_j \geq 2\,(j = 1, \ldots, g)$ *und* $g \geq 2$. *Ist* $\{x_1, \ldots, x_{2q+g}\}$ *ein Erzeugendensystem von H, so gibt es einen freien Übergang von* $\{x_1, \ldots, x_{2q+g}\}$ *zu* $\{a_1, \ldots, a_g, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q\}$.

KOROLLAR 5. *Sei*

$$H = \left\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q \;\middle|\; \left(\prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i]\left(\prod_{j=1}^{q} [t_j, u_j]\right)^{\alpha}\right)^{\gamma} = 1 \right\rangle,$$

$\alpha \geq 1$ und $\gamma \geq 2$. Ist $\{x_1, \ldots, x_{2g+2q}\}$ ein Erzeugendensystem von H, so gibt es einen freien Übergang von $\{x_1, \ldots, x_{2g+2q}\}$ zu $\{a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, t_1, u_1, \ldots, t_q, u_q\}$.

Literatur

1. M. J. Dunwoody and A. Pietrowski, *Presentations of the trefoil group*, Canad. Math. Bull., vol. 16 (1973), pp. 517–520.
2. J. McCool and A. Pietrowski, *On free products with amalgamation of two infinite cyclic groups*, J. Algebra, vol. 18 (1971), pp. 377–383.
3. N. Peczynski, *Eine Kennzeichnung der Relationen der Fundamentalgruppe einer nicht-orientierbaren Fläche*, Diplomarbeit, Bochum, 1972.
4. S. J. Pride, *On the generation of one-relator groups*, Preprint.
5. E. S. Rapaport, *On free groups and their automorphisms*, Acta Math., vol. 99 (1958), pp. 139–163.
6. G. Rosenberger, *Zum Rang- und Isomorphieproblem für freie Produkte mit Amalgam*, Habilitationsschrift, Hamburg 1974.
7. J. H. C. Whitehead, *On equivalent sets of elements in a free group*, Ann. of Math., vol. 37 (1936), pp. 782–800.
8. H. Zieschang, *Über die Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam*, Invent. Math., vol. 10 (1970), pp. 4–37.
9. H. Zieschang, E. Vogt and H.-D. Coldewey, *Flächen und ebene diskontinuierliche Gruppen*, Lecture notes in Math., no. 122, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

Universität
Hamburg, Bundesrepublik Deutschland