ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 21, Number 4, December 1977

SUR LA COHERENCE DE CERTAINS ANNEAUX DE FONCTIONS

PAR

JEAN-PIERRE ROSAY

W. Mc Voy et L. Rubel ont montré, dans [4], que l'anneau de toutes les fonctions analytiques bornées sur le disque unité du plan complexe est un anneau cohérent. Nous étendons ce résultat aux domaines de connectivité finie du plan complexe.

Dans tout ce qui suit D désigne le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$ et, pour tout ouvert G de $\mathbf{C}$, $H^\infty(G)$ l'anneau des fonctions analytiques bornées sur G. Rappelons qu'un anneau commutatif A est dit cohérent si et seulement si pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout n-uple $a_1, \ldots, a_n$ d'éléments de A le module des relations entre les a_i est un sous A-module de A^n de type fini.

PROPOSITION. *Si G est un domaine de connectivité finie du plan complexe, $H^\infty(G)$ est un anneau cohérent.*

Remarque. On peut préciser: si G est de connectivité p et $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty(G)$ il existe pour le module des relations entre les f_i un système générateur à $(n-1)p$ éléments (sauf cas triviaux: tous les f_i nuls et n ou $p = 1$).

La démonstration que nous donnons est très proche de la démonstration du Théorème 1 de [4]. Le résultat découle pareillement des propriétés des sous-espaces invariants de l'espace de Hilbert $(H^2(G))^n$ dont l'étude est abordée, comme dans [2] pour le cas du disque, à l'aide de la décomposition de Wold (mais la formulation, peu satisfaisante, du résultat obtenu en cours de démonstration serait en terme d'isomorphisme et non d'égalité car nous n'arrivons pas à une description des sous-espaces invariants par exemple à l'aide de fonctions mesurables à valeurs dans l'ensemble des isométries).

Démonstration. Soit G un domaine du plan complexe de connectivité finie p sans point frontière isolé; sans perte de généralité nous supposons que G est un domaine obtenu en considérant D privé de $(p-1)$ disques fermés disjoints deux à deux, tous inclus dans D. On note ∂G la frontière de G.

On sait (cf. [1, p. 277]) qu'il existe une fonction U analytique sur un voisinage de la fermeture de G, ayant exactement p zéros dans G et de module constant et égal à 1 sur ∂G. Quitte à composer U avec une transformation conforme du disque sur lui-même, on peut supposer pour plus de simplicité que les zéros de U sont tous distincts. On voit facilement qu'il existe une constante $C > 0$ telle

Received June 11, 1976.

que sur ∂G, $1/C < |U'| < C$, et en utilisant le principe de variation de l'argument que U définit un difféomorphisme de chaque composante connexe de ∂G sur le cercle unité. Soit m la mesure longueur sur ∂G. On note $H^2(G)$ le sous-espace de $L^2(m)$ constitué par les fonctions dont le prolongement harmonique sur G est analytique, $H^2(G)$ est évidemment identifiable à un espace de fonctions analytiques sur G. De même on identifie, comme il est classique, $H^\infty(G)$ à un sous-espace de $L^\infty(m)$. On note respectivement $H_u^\infty(G)$ et $H_u^2(G)$ les sous-espaces respectifs de $H^\infty(G)$ et $H^2(G)$ constitués par ceux de leurs éléments f pour lesquels $f(Z) = f(Z')$ pour tout Z et $Z' \in G$ tels que $U(Z) = U(Z')$; $H_u^2(G)$ (resp. $H_u^\infty(G)$) est la fermeture de l'algèbre unitaire engendrée par U dans $L^2(m)$ (resp. $L^\infty(m)$ muni de la topologie faible*).

Enfin si K est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ normé de dimension finie nous prendrons les notations évidentes $H^2(G, K)$, $H_u^2(G, K)$, etc. pour les espaces de fonctions à valeurs dans K dont (pour toute base de K) les fonctions coordonnées sont dans $H^2(G)$, $H_u^2(G)$ etc.

La norme dans $H^2(G, K)$ est naturellement: $\| F \| = (\int_{\partial G} \| F(t) \|^2 \, dm(t))^{1/2}$.

Soient $n \in \mathbf{N}$ et $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty(G)$, soit R l'ensemble des

$$(g_1, \ldots, g_n) \in (H^\infty(G))^n$$

tels que $\sum_{i=1}^n f_i g_i = 0$.

Il faut montrer que R est un module de type fini sur $H^\infty(G)$. On note $\bar{R}$ l'ensemble des $(g_1, \ldots, g_n) \in (H^2(G))^n$ tels que $\sum_{i=1}^n f_i g_i = 0$, $\bar{R}$ est un espace de Hilbert pour la norme induite de $(L^2(m))^n$. Sur $\bar{R}$ la multiplication par U,

$$(g_1, \ldots, g_n) \to (Ug_1, \ldots, Ug_n),$$

est une transformation isométrique complètement non unitaire. Soit R_0 l'orthogonal de $U\bar{R}$ dans $\bar{R}$, la décomposition de Wold (cf. [3]), est la décomposition de $\bar{R}$ en la somme hilbertienne:

$$\bar{R} = R_0 \oplus UR_0 \oplus U^2 R_0 \oplus \cdots \oplus U^n R_0 \oplus \cdots.$$

Si $X_1, \ldots, X_p$ sont les zéros de U et si Π est l'application de $\bar{R}$ dans $\mathbf{C}^{np}$,

$$(g_1, \ldots, g_n) \to (g_i(X_j)), \quad 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le p,$$

on a $U\bar{R} = \operatorname{Ker} \Pi$. On a donc une injection linéaire de $\bar{R}/U\bar{R}$, qui est isomorphe à R_0, dans $\mathbf{C}^{np}$; R_0 est donc un espace de Hilbert de dimension finie (on trouve la majoration $(n-1)p$ sauf cas triviaux).

Soit α l'application de $\bar{R}$ dans $H_u^2(G, R_0)$ définie de la façon suivante: Si $g = (g_1, \ldots, g_n) \in \bar{R}$, g s'écrit dans la décomposition de Wold $g = \sum_{i=0}^n U^i(r_i)$ avec $r_i \in R_0$ et $\sum \| r_i \|^2 < +\infty$, $\alpha(g)$ est la fonction qui à tout $Z \in G$ associe l'élément de R_0 $[\alpha(g)](Z) = \sum_{i=0}^\infty (U(Z))^i r_i$. L'application qui à tout $\phi \in H^2(D, R_0)$ associe $\phi \circ U$ est un isomorphisme bicontinu de $H^2(D, R_0)$ sur $H_u^2(G, R_0)$. L'application α est la composée de cet isomorphisme et de l'isomorphisme isométrique β de $\bar{R}$ sur $H^2(D, R_0)$ défini, avec les notations précédentes, par $[\beta(g)](Z) = \sum_{i=0}^\infty Z^i r_i$. Donc α est un isomorphisme (linéaire) bicontinu de $\bar{R}$ sur $H_u^2(G, R_0)$. Il est facile de vérifier que α est un isomorphisme de $H_u^\infty(G)$

modules; en effet

$$\alpha(Ug) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{\infty} U^i(r_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (U(Z))^i r_{i-1} = U(Z) \sum_{i=0}^{\infty} (U(Z))^i r_i = U(Z)\alpha(g),$$

par itération $\alpha(U^n g) = U^n\alpha(g)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, il suffit alors d'utiliser la linéarité et la continuité de α.

La démonstration de la proposition sera terminée si nous montrons que la restriction de α à R est un isomorphisme de $H_u^\infty(G)$ module de R sur $H_u^\infty(G, R_0)$. Car il est trivial que $H_u^\infty(G, R_0)$ est un module de type fini sur $H_u^\infty(G)$ puisque pour toute base $r_1, \ldots, r_k$ de R_0 les fonctions constantes $r_1, \ldots, r_k$ engendrent $H_u^\infty(G, R_0)$ en tant que $H_u^\infty(G)$ module; on aura donc que R est un module de type fini sur $H_u^\infty(G)$ et donc a fortiori sur $H^\infty(G)$.

Puisque $R = \bar{R} \cap (H^\infty(G))^n$, il s'agit de montrer que

$$\alpha(R) \subset H^\infty(G, R_0) \quad \text{et} \quad \alpha^{-1}(H_u^\infty(G, R_0)) \subset (H^\infty(G))^n.$$

Or ceci découle trivialement, par identification de $(H^\infty(G))^n$ et $H^\infty(G, \mathbf{C}^n)$, du lemme suivant (que par souci d'économie dans les définitions nous nous contentons d'écrire dans le cadre des espaces de dimension finie):

Lemme. *Soient K et L deux espaces vectoriels sur $\mathbf{C}$ normés de dimension finie et M un sous $H_u^\infty(G)$ module de $H^\infty(G, K)$ muni de la norme induite de $H^2(G, K)$. Soit ω un morphisme de $H_u^\infty(G)$ module de M dans $H^2(G, L)$. Si ω est continu, alors $\omega(M) \subset H^\infty(G, L)$.*

Démonstration. Dans la démonstration $\|\;\|$, $\|\;\|_2$, $\|\;\|_\infty$ désignent respectivement les normes dans L, $H^2(G, K)$ ou $H^2(G, L)$ (il n'y aura pas ambiguïté), et $H^\infty(G, K)$. Soit $a \in M$ et $\lambda > 0$ tels que $\|\omega(a)(Z)\| > \lambda$ sur un ensemble E de mesure > 0 de ∂G. Pour tout $j \in \mathbf{N}$ soit $\psi_j \in H^\infty(D)$ tel que sur $U(E)$, $|\psi_j| = j$ et sur $\partial D - U(E)$, $|\psi_j| = 1$ p.p. Alors

$$\|(\psi_j \circ U)a\|_2^2 \leq \text{long}\ \partial G\ \|a\|_\infty^2 + j^2\|a\|_\infty^2\, m(U^{-1}(U(E)))$$

et $\|(\psi_j \circ U)\omega(a)\|_2^2 \geq j^2\lambda^2 m(E)$. Or il existe une constante A ne dépendant que de G et U telle que $m(U^{-1}(U(E))) \leq Am(E)$ $(A = pC^2)$. D'où faisant tendre j vers l'infini dans l'inégalité

$$\|(\psi_j \circ U)\omega(a)\|_2^2 \leq B^2\|(\psi_j \circ U)a\|_2^2$$

où B est la norme de ω, on tire $\lambda^2 \leq AB^2\|a\|_\infty^2$. Donc $\omega(a) \in H^\infty(G, L)$.

References

1. G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969.
2. H. Helson, *Lectures on invariant subspaces*, Academic Press, N.Y., 1964.
3. B. Nagy et C. Foias, *Analyse harmonique des Operateurs de l'espace de Hilbert*, Masson, 1967.
4. Mc. Voy et L. A. Rubel, *Coherence of some rings of functions*, J. Funct. Anal., vol. 21 (1976), pp. 76–87.

Université de Provence et Laboratoire de Mathématiques de Marseille
Marseille, France