ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 22, Number 3, September 1978

VON UNTERGRUPPEN DER TRIANGEL-GRUPPEN

VON

GERHARD ROSENBERGER

Professor B. Schoeneberg zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

A. In [6] bestimmt Singerman unter anderem alle Paare von Triangel-Gruppen (Γ, Γ_0) mit $\Gamma \subset \Gamma_0$ von endlichem Index (vgl. auch [8]). Dabei verstehen wir unter einer Triangel-Gruppe F eine Gruppe

$$F = \{a, b \mid a^p = b^q = (ab)^r = 1\}, \quad 2 \leq p, q, r \text{ und } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1.$$

In dieser Note bestimmen wir alle Paare (G, F) von Fuchsschen Gruppen mit:

(1) F ist Triangel-Gruppe,
(2) $G \subset F$ von endlichem Index, und
(3) G hat Rang zwei.

Weiter erhaltern wir als Hauptergebnis einen Algorithmus, der beliebige Erzeugende u, v von F in endlich vielen Schritten in a und b überführt.

B. Es bedeute:
$G = \{a_1, \ldots, a_s\}$ die von den $a_1, \ldots, a_s$ erzeugte Gruppe.
$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ den Kommutator von $a, b \in G$.
n mit $n \geq 2$ und $g^n = 1$ die Ordnung von $g \in G, g \neq 1$.
$\{\ldots|\ldots\}$ die Gruppenbeschreibung durch Erzeugende und definierende Relationen.

Wir fassen eine Gruppe $G = \{a_1, \ldots, a_s\}$ als epimorphes Bild der freien Gruppe $F_s = \{A_1, \ldots, A_s\}$ vom Rang s unter dem durch $A_i \mapsto a_i$ definierten Epimorphismus $F_s \twoheadrightarrow G$ auf. Einen Übergang von $(a_1, \ldots, a_s)$ zu einem System $(b_1, \ldots, b_s)$ von G nennen wir frei, wenn es ein freies Erzeugendensystem $(B_1, \ldots, B_s)$ gibt, so daß das Bild von B_i bei dem durch $A_i \mapsto a_i$ definierten Epimorphismus von F_s auf G gleich b_i ist.

Es ist auch $G = \{b_1, \ldots, b_s\}$.
Es bedeute:
Sp a die Spur von $a \in SL(2, \mathbf{R})$.
(m, n) der größte gemeinsame Teiler vom $m, n \in \mathbf{Z}$.

Received February 25, 1976.

Vereinbarung. Alle auftretenden Exponenten von Elementen einer Gruppe sind ganze Zahlen.

$|F:G| = N < \infty$ heißt: G ist Untergruppe von F mit endlichem Index N.

Mein besonderer Dank gilt dem Referenten der Arbeit, der durch seine genaue und kritische Durchsicht des Manuskriptes einen wertvollen Beitrag zu dieser Arbeit geleistet hat.

Weiter danke ich P. Bergau für einige sehr hilfreiche Gespräche.

2. Bereitstellung einiger Hilfssätze

Unter einer Fuchsschen Gruppe F verstehen wir eine endlich erzeugte, diskrete Gruppe von Automorphismen der oberen Halbebene $\mathfrak{H}$, die sich darstellen läßt durch

$$F = \left\{e_1, \ldots, e_t, d_1, \ldots, d_s, a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \,\middle|\, e_1^{n_1} = \cdots = e_t^{n_t} = e_1 \cdots e_t d_1 \cdots d_s \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1\right\}$$

mit $n_j \geq 2$.

Wir nennen F *kompakt*, wenn

(i) $s = 0$ und
(ii) $\mu(F) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^{t} (1 - 1/n_i) > 0$

ist (der Quotientenraum $\mathfrak{H}/F$ ist kompakt mit dem hyperbolischen Flächeninhalt $2\pi \cdot \mu(F)$).

Insbesondere sind Triangel-Gruppen kompakt.

Lemma 1 [2], [6]. *Sei F kompakte Fuchssche Gruppe und $H \subset F$ Untergruppe von endlichem Index N. Dann ist auch H kompakt, und es ist $\mu(H) = N \cdot \mu(F)$.*

Lemma 3 [7]. *Sei F kompakte Fuchssche Gruppe vom Rang zwei. Dann ist für F einer der folgenden Fälle erfüllt:*

(a) $F = \{a, b \mid a^p = b^q = (ab)^r = 1\}$ *für* $1/p + 1/q + 1/r < 1$,
(b) $F = \{a, b \mid [a, b]^n = 1\}$ *für* $n \geq 2$,
(c) $F = \{a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^n = 1\}$ *für* $n = 2k + 1, k \geq 1$.

Bemerkung. In (c) ist $F = \{ab, ca\}$ und $[ab, ca]^n = ((abc)^2)^n = 1$.

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir:

Lemma 4. *Sei F kompakte Fuchssche Gruppe und $x, y \in F$ mit $[x, y]^n = 1$ für $n \geq 2$. Dann ist für $G = \{x, y\}$ einer der Fälle von Lemma 3 erfüllt und $G \subset F$ von endlichem Index. (Es kann auch jeder Fall eintreten.)*

Beweis. Angenommen es ist nicht $G \subset F$ von endlichem Index. Dann ist G freies Produkt zyklischer Gruppen, insbesondere hat $[x, y]$ keine endliche Ordnung. Das ist aber ein Widerspruch zu $[x, y]^n = 1$ für $n \geq 2$.

Also ist $G \subset F$ von endlichem Index. Nach Lemma 2 ist G kompakt. Nun folgt die Aussage aus Lemma 3. ∎

LEMMA 5. *Sei $F = \{a, b \mid a^p = b^q = (ab)^r = 1\}$ Triangel-Gruppe mit $p \leq q$. Seien $x, y \in F$ mit $[x, y] = (ab)^\alpha$, $\alpha \not\equiv 0$ (r). Sei $G = \{x, y\}$ Normalteiler von F. Dann ist $2 \leq p \leq 3$ und $3 \leq q \leq 4$, wobei $q = 3$ für $p = 3$. Weiter gibt es einen freien Übergang von (x, y) zu (u, v) mit*

(1) $u = abab^2$, $v = b^2aba$ *für* $p = 2$, $q = 3$;
(2) $u = ab^2$, $v = b^3ab^3$ *für* $p = 2$, $q = 4$;
(3) $u = ab^2$, $v = b^2a$ *für* $p = 3 = q$.

Beweis. Seien p und q $(p \leq q)$ fest (wie im Lemma gegeben). Sei

$$K = \{a_1, b_1 \mid a_1^p = b_1^q = 1\}$$

das freie Produkt von $\{a_1\}$ und $\{b_1\}$ und $\phi: K \twoheadrightarrow F$ der durch $a_1 \mapsto a$, $b_1 \mapsto b$ definierte Epimorphismus von K auf F.

Wir betrachten für p und q die Triangel-Gruppen

$$F(r) = \{a, b \mid a^p = b^q = (ab)^r = 1\}$$

in Abhängigkeit von r. ∎

BEHAUPTUNG (2.1). *Gibt es für ein r_0 Elemente $x, y \in F(r_0)$ mit $[x, y] = (ab)^{\alpha(r_0)}$, $1 \leq \alpha(r_0) < r_0$, und $G = \{x, y\}$ Normalteiler von $F(r_0)$, so gibt es für jedes $r \geq r_0$ Elemente $x, y \in F(r)$ mit $[x, y] = (ab)^{\alpha(r)}$, $1 \leq \alpha(r) < r_0 \leq r$, und $G = \{x, y\}$ Normalteiler von $F(r)$, und es ist $\alpha(r) = \alpha(r_0)$.*

Beweis von (2.1). Wir betrachten eine Triangel-Gruppe $F(r)$. Es gebe in $F(r)$ Elemente $x, y \in F(r)$ mit $[x, y] = (ab)^{\alpha(r)}$, $1 \leq \alpha(r) < r$, und $G = \{x, y\}$ Normalteiler von $F(r)$. Nach Lemma 3 und Lemma 4 müssen wir folgende vier Fälle unterscheiden.

(1) $F(r) = G = \{x, y\}$. Wir wenden Theorem 1.1 von [3] an. Es folgt, daß einer der folgenden Fälle eintritt:

(a) $p = 2$, $q = 3$, $(2, r) = (3, r) = 1$, $\alpha(r) = 6$.
(b) $p = 2$, $q = 4$, $(2, r) = 1$, $\alpha(r) = 4$.
(c) $p = 3 = q$, $(3, r) = 1$, $\alpha(r) = 3$.

(Einen Beweis hierfür kann man [10] entnehmen).

(2) $2 \leq |F(r): G|$ *und G Triangel-Gruppe.* Es ist $r \geq 3$, denn für $r = 2$ wäre G wegen $[x, y] = (ab)^{\alpha(r)}$ nach [4] eine Gruppe vom Typ (b) aus Lemma 3.

Wir betrachten in [6] die Liste aller Paare von Triangel-Gruppen (Γ, Γ_0) mit $\Gamma \subset \Gamma_0$ von endlichem Index (vgl. auch [8]). Da $G = \{x, y\}$ Normalteiler in $F(r)$ ist, folgt, daß in der üblichen Signaturbezeichnung (vgl. [6]) eine der folgenden Möglichkeiten eintritt:

(a) $F(r) = (0; 3, 3, r)$, $G = (0; r, r, r)$, $|F(r)\colon G| = 3$.
(b) $F(r) = (0; 2, 3, r)$, $G = (0; k, k, k)$, $r = 2k$, $|F(r)\colon G| = 6$.
(c) $F(r) = (0; 2, q, r)$, $G = (0; q, q, k)$, $r = 2k$, $|F(r)\colon G| = 2$.
(d) $F(r) = (0; 3, q, 3)$, $G = (0; q, q, q)$, $|F(r)\colon G| = 3$.
(e) $F(r) = (0; 2, q, 3)$, $G = (0; k, k, k)$, $q = 2k$, $|F(r)\colon G| = 6$.
(f) $F(r) = (0; 2, q, r)$, $G = (0; k, r, r)$, $q = 2k$, $|F(r)\colon G| = 2$.

Wir betrachten nun diese Möglichkeiten. Es ist $G = \{x, y\}$ mit $[x, y] = (ab)^{\alpha(r)}$. Nach (1) ist dann nur (c) mit $q = 3$, $r = 2k$, $(3, k) = 1$ möglich, d.h. es tritt mit 1 (c) folgender Fall ein:

$$p = 2,\ q = 3,\ r = 2k,\ (3, r) = 1,\ \alpha(r) = 3 \cdot 2 = 6.$$

(3) $2 \leq |F(r)\colon G|$ *und* $G = \{c, d \mid [c, d]^k = 1\}$, $k \geq 2$. Wir betrachten in [8] die Liste aller Paare (Γ, Γ_0) von Fuchsschen Gruppen mit Γ_0 Triangel-Gruppe, Γ vom Typ (b) aus Lemma (3) und $\Gamma \subset \Gamma_0$ von endlichem Index. Da $G = \{x, y\}$ Normalteiler in $F(r)$ ist, folgt mit analogem Schluß wie in (2), daß einer der folgenden Fälle eintritt:

(a) $p = 2$, $q = 3$, $r = 6k$, $|F(r)\colon G| = 6$.
(b) $p = 2$, $q = 4$, $r = 4k$, $|F(r)\colon G| = 4$.
(c) $p = 3 = q$, $3 = 3k$, $|F(r)\colon G| = 3$.

Nach [4] ist $[x, y]$ in G konjugiert zu $[c, d]^\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$, und es gibt einen freien Übergang von $\{x, y\}$ zu $\{c, d\}$. Im Fall (a) ergibt sich dann $\alpha(r) = 6$, im Fall (b) $\alpha(r) = 4$ und im Fall (c) $\alpha(r) = 3$.

(4) $2 \leq |F(r)\colon G|$ *und* $G = \{c, d, e \mid c^2 = d^2 = e^2 = (cde)^k = 1\}$, *k ungerade*, $k \geq 3$. Wir wenden Proposition 3 von [6] an und erhalten die Liste aller Paare (Γ, Γ_0) von Fuchsschen Gruppen mit Γ_0 Triangel-Gruppe, Γ vom Typ (c) aus Lemma 3 und $\Gamma \subset \Gamma_0$ von endlichem Index (vgl. die zweite Liste am Ende der Arbeit). Da $G = \{x, y\}$ Normalteiler in $F(r)$ ist, folgt mit analogem Schluß wie in (2), daß einer der folgenden Fälle eintritt:

(a) $p = 2$, $q = 3$, $r = 3k$, $(2, k) = 1$, $|F(r)\colon G| = 3$.
(b) $p = 2$, $q = 4$, $r = 2k$, $(2, k) = 1$, $|F(r)\colon G| = 2$.

Nach Satz 3.1 von [11] ist $[x, y]$ in G konjugiert zu $(cde)^{2\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$, und es gibt einen freien Übergang von $\{x, y\}$ zu $\{cd, ec\}$. Im Fall (a) ergibt sich dann $\alpha(r) = 6$ und im Fall (b) $\alpha(r) = 4$. Damit ist die Behauptung (2.1) bewiesen. ∎

Insbesondere entnehmen wir dem Beweis von (2.1), daß $2 \leq p \leq 3$, $3 \leq q \leq 4$, wobei $q = 3$ für $p = 3$. Aus (2.1) erhält man: Sind $x, y \in F$ mit $[x, y] = (ab)^{\alpha}$, $\alpha \not\equiv 0(r)$, und $G = \{x, y\}$ Normalteiler von F, so gibt es $x_1, y_1 \in K$ und ein $\beta \neq 0$ mit $\phi(x_1) = x$, $\phi(x_2) = y$ und $[x_1, y_1] = (a_1 b_1)^{\beta}$.

Nach Satz 2 von [7] gibt es einen freien Übergang von (x_1, x_2) zu (u_1, v_1), wobei

(a) $u_1 = a_1 b_1 a_1 b_1^2$, $v_1 = b_1^2 a_1 b_1 a_1$, falls $p = 2$, $q = 3$;
(b) $u_1 = a_1 b_1^2$, $v_1 = b_1^3 a_1 b_1^3$, falls $p = 2$, $q = 4$;
(c) $u_1 = a_1 b_1^2$, $v_1 = b_1^2 a_1$, falls $p = q = 3$.

Der Epimorphismus ϕ induziert nun einen wohldefinierten freien Übergang von (x, y) zu (u, v) mit $\phi(u_1) = u$, $\phi(v_1) = v$. ∎

Weil in jedem Fall $\{u, v\}$ Normalteiler von F ist, überlegt man sich leicht:

Lemma 6 (Korollar). *Sei $F = \{a, b \mid a^p = b^q = (ab)^r = 1\}$ Triangel-Gruppe mit $2 \leq p \leq 3$, $3 \leq q \leq 4$, wobei $q = 3$ für $p = 3$. Seien $x, y \in F$ mit $[x, y] = h(ab)^{\alpha}h^{-1}$, $\alpha \not\equiv 0(r)$, $h \in F$. Sei $G = \{x, y\}$ Normalteiler von F. Dann gibt es einen freien Übergang von (x, y) zu (u, v), wobei u, v wie in Lemma 5 gegeben.*

Lemma 7 (Korollar). *Sei $F = \{a, b \mid a^p = b^q = (ab)^r = 1\}$ Triangel-Gruppe mit $2 \leq p \leq 3$ und $3 \leq q \leq 4$, wobei $q = 3$ für $p = 3$. Sei $x, y \in F$ mit $[x, y]^n = 1$ für $n \geq 2$. Sei $G = \{x, y\}$ Normalteiler von F. Dann ist $[x, y] = h(ab)^{\alpha}h^{-1}$ für $\alpha \not\equiv 0(r)$ und $h \in F$.*

Beweis. Im anderen Fall müßte $r \leq 4$ für $p = 2$ und $r \leq 3$ für $p = 3$ sein, und das ist wegen $1/p + 1/q + 1/r < 1$ nicht möglich. ∎

3. Der Fall $p = 2$, $q = 3$

Satz 1. *Sei $F = \{a, b \mid a^2 = b^3 = (ab) = 1\}$ Triangel-Gruppe, d.h. $r \geq 7$. Sei $x, y \in F$ mit $[x, y]^n = 1$ für $n \geq 2$ und $G = \{x, y\}$ Normalteiler von F. Dann ist G die Kommutatorgruppe von F und es gilt:*

(1) $G = F$ für $(2, r) = (3, r) = 1$.
(2) $G = \{abab^2, b^2aba \mid [abab^2, b^2aba]^k = 1\}$ für $6 \mid r$ und $r = 6k$. Es ist $|F : G| = N = 6$.
(3) $G = \{a, bab^2, b^2ab \mid a^2 = (bab^2)^2 = (b^2ab)^2 = (a(bab^2)(b^2ab))^k = 1\}$ für $3 \mid r$, $2 \nmid r$ und $r = 3k$. Es ist $|F : G| = N = 3$.
(4) $G = \{b, aba \mid b^3 = (aba)^3 = (b(aba))^k = 1\}$ für $2 \mid r$, $3 \nmid r$ und $r = 2k$. Es ist $|F : G| = N = 2$.

Beweis. Nach Lemma 7 ist $[x, y] = h(ab)^{\alpha}h^{-1}$ für $\alpha \not\equiv 0(r)$ und $h \in F$.

Nach Lemma 6 gibt es einen freien Übergang von (x, y) zu $(abab^2, b^2aba)$. Insbesondere ist $(ab)^6 \in G$. Sei F' die Kommutatorgruppe von F. Wegen $abab^2$, $b^2aba \in F'$ ist $G \subset F'$.

(1) Sei $(2, r) = (3, r) = 1$. Dann ist $ab \in G$. Wegen $(ab)^{-2}abab^2 = b$ ist $b \in G$ und damit auch $a \in G$, d.h. $G = F$.

(2) Sei $6 \mid r$ und $r = 6k$. Sei F treu dargestellt als Untergruppe der $PSL(2, \mathbf{R})$. Aus [3] und [4] folgt dann $Sp[x, y] = -2 \cos \pi/k$. Nach [4] ist $G = \{x, y \mid [x, y]^k = 1\}$. Nach Lemma 1 ist $|F \colon G| = 6$. Weiter bilden die Elemente $1, ab, (ab)^2, (ab)^3, (ab)^4, (ab)^5$ ein Repräsentantensystem von F nach G. Damit ist $F' = G$.

(3) Sei $3 \mid r$, $2 \nmid r$ und $r = 3k$. Dann ist $(ab)^3 \in G$. Wegen

$$(ab)^3(b^2aba)(abab^2) = a$$

ist $a \in G$, $bab^2 \in G$ und $b^2ab \in G$. Nach Lemma 4 ist

$$G = \{a, bab^2, b^2ab \mid a^2 = (bab^2)^2 = (b^2ab)^2 = (a(bab^2)(b^2ab))^k = 1\}.$$

Nach Lemma 1 ist $|F \colon G| = 3$. Weiter bilden $1, ab, (ab)^2$ ein Repräsentantensystem von F nach G. Damit ist $F' = G$.

(4) Sei $2 \mid r$, $3 \nmid r$ und $r = 2k$. Dann ist $(ab)^2 \in G$. Wegen $(ab)^2(b^2aba) \times (abab^2) = b^2$ ist $b \in G$ und $aba \in G$. Nach Lemma 4 ist $G = \{b, aba \mid b^3 = (aba)^3 = (b(aba))^k = 1\}$. Nach Lemma 1 ist $|F \colon G| = 2$. Damit ist $F' = G$. ∎

4. Der Fall $p = 2$, $q = 4$

SATZ 2. *Sei $F = \{a, b \mid a^2 = b^4 = (ab)^r = 1\}$ Triangel-Gruppe, d.h. $r \geq 5$. Sei $x, y \in F$ mit $[x, y]^n = 1$ für $n \geq 2$ und $G = \{x, y\}$ Normalteiler von F. Dann gilt:*

(1) *$G = F$ für $(2, r) = 1$.*

(2) *$G = \{a, b^2, b^3ab \mid a^2 = (b^2)^2 = (b^3ab)^2 = (ab^2(b^3ab))^k = 1\}$ für $2 \mid r$, $4 \nmid r$ und $r = 2k$. Es ist $|F \colon G| = 2$.*

(3) *$G = \{ab^2, b^3ab^3 \mid [ab^2, b^3ab^3]^k = 1\}$ für $4 \mid r$ und $r = 4k$. Es ist $|F \colon G| = 4$.*

Beweis. Nach Lemma 7 ist $[x, y] = h(ab)^\alpha h^{-1}$ für $\alpha \not\equiv 0(r)$ und $h \in F$. Nach Lemma 6 gibt es einen freien Übergang von (x, y) zu (ab^2, b^3ab^3). Insbesondere ist $(ab)^4 \in G$.

(1) Sei $(2, r) = 1$. Dann ist $ab \in G$. Wegen $(ab)^{-1}ab^2 = b$ ist $b \in G$ und damit auch $a \in G$. d.h. $G = F$.

(2) Sei $2 \mid r$, $4 \nmid r$ und $r = 2k$. Dann ist $(ab)^2 \in G$. Es ist $(ab)^{-2}ab^2 = b^3ab \in G$. Wegen $(b^3ab^3)^{-1}b^3ab = b^{-2}$ ist $b^2 \in G$ und $a \in G$. Nach Lemma 4 ist

$$G = \{a, b^2, b^3ab \mid a^2 = (b^2)^2 = (b^3ab)^2 = (ab^2(b^3ab))^k = 1\}.$$

Nach Lemma 1 ist $|F \colon G| = 2$.

(3) Sei $4 \mid r$ und $r = 4k$. Sei F treu dargestellt als Untergruppe der $PSL(2, \mathbf{R})$. Aus [3] und [4] folgt dann $Sp[x, y] = -2 \cos \pi/k$. Nach [4] ist $G = \{x, y \mid [x, y]^k = 1\}$. Nach Lemma 1 ist $|F \colon G| = 4$. ∎

5. Der Fall $p = 3 = q$

SATZ 3. *Sei $F = \{a, b \mid a^3 = b^3 = (ab)^r = 1\}$ Triangel-Gruppe, d.h. $r \geq 4$. Sei $x, y \in F$ mit $[x, y]^n = 1$ für $n \geq 2$ und $G = \{x, y\}$ Normalteiler von F. Dann gilt:*

(1) *$G = F$ für $(3, r) = 1$.*
(2) *$G = \{ab^2, b^2a \mid [ab^2, b^2a]^k = 1\}$ für $3 \mid r$ und $r = 3k$. Es ist $|F : G| = 3$.*

Beweis. Nach Lemma 7 ist $[x, y] = h(ab)^\alpha h^{-1}$ für $\alpha \not\equiv 0(r)$ und $h \in F$. Nach Lemma 6 gibt es einen freien Übergang von (x, y) zu (ab^2, b^2a). Insbesondere ist $(ab)^3 \in G$.

(1) Sei $(3, r) = 1$. Dann ist $ab \in G$. Wegen $(ab)^{-1}ab^2 = b$ ist $b \in G$ und $a \in G$, d.h. $G = F$.

(2) Sei $3 \mid r$ und $r = 3k$. Sei F treu dargestellt als Untergruppe der $PSL(2, \mathbf{R})$. Aus [3] und [4] folgt dann $Sp[x, y] = -2 \cos \pi/k$. Nach [4] ist $G = \{x, y \mid [x, y]^k = 1\}$. Nach Lemma 1 ist $|F : G| = 3$. ∎

6. Zusammenfassung

Durch [6], Satz 1, Satz 2, und Satz 3 sind alle Paare (G, F) von Fuchsschen Gruppen bestimmt mit:

(1) F ist Triangel-Gruppe,
(2) $G \subset F$ ist Normalteiler von endlichem Index und
(3) G hat Rang zwei.

Diese Paare (G, F) mit $1 < |F : G|$ sind in der üblichen Signaturbezeichnung (vgl. [6]) gegeben durch die folgende Liste:

G	F	Index
$(1; k)$	$(0; 2, 3, 6k)$	6
$(0; 2, 2, 2, k)$	$(0; 2, 3, 3k)$, $2 \nmid k$	3
$(0; 2, 2, 2, k)$	$(0; 2, 4, 2k)$, $2 \nmid k$	2
$(1; k)$	$(0; 2, 4, 4k)$	4
$(1; k)$	$(0; 3, 3, 3k)$	3
$(0; k, k, k)$	$(0; 3, 3, k)$	3
$(0; k, k, k)$	$(0; 2, 3, 2k)$	6
$(0; k, k, l)$	$(0; 2, k, 2l)$	2

Bemerkung. In [8] bestimmt Frau Schulenburg unter anderem alle Paare (G, F) von Fuchsschen Gruppen mit:

(1) F ist Triangel-Gruppe,
(2) $G \subset F$ von endlichem Index und
(3) G ist Triangel-Gruppe oder $G = \{a, b \mid [a, b]^n = 1\}$, $n \geq 2$.

Auf Grund eines Satzes von Zassenhaus war sie der Meinung, damit alle Paare (G, F) von Fuchsschen Gruppen bestimmt zu haben mit:

(1) F und G haben Rang zwei und
(2) $G \subset F$ von endlichem Index.

Nach Lemma 3 ist dies aber nicht der Fall. Mit Proposition 3 von [6] überlegt man sich leicht, daß die Paare (G, F) von Fuchsschen Gruppen fehlen mit:

(1) F ist Triangel-Gruppe,
(2) $G \subset F$ von endlichem Index und
(3) $G = \{a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^k = 1\}$, $k \geq 3$, $2 \nmid k$.

Diese Paare (G, F) sind in der üblichen Signaturbezeichnung gegeben durch folgende Liste:

G	F	Index
$(0; 2, 2, 2, k)$	$(0; 2, 3, 3k)$, $2 \nmid k$	3
$(0; 2, 2, 2, k)$	$(0; 2, 4, 2k)$, $2 \nmid k$	2
$(0; 2, 2, 2, 3)$	$(0; 2, 3, 7)$	7
$(0; 2, 2, 2, 7)$	$(0; 2, 3, 7)$	15
$(0; 2, 2, 2, 3)$	$(0; 2, 3, 8)$	4
$(0; 2, 2, 2, 5)$	$(0; 2, 4, 5)$	6

Man erhält diese Liste mit Proposition 3 von [6]. Mit Hilfe des Reidemeister-Schreier-Verfahrens kann man nun leicht jeweils Erzeugende für G erhalten. Für $G \subset F = (0; 2, 3, 7)$ wird dies in [9] getan.

Insgesamt haben wir jetzt damit alle Paare (G, F) von Fuchsschen Gruppen mit:

(1) F und G haben Rang zwei und
(2) $G \subset F$ von endlichem Index.

Nun können wir folgenden Satz aussprechen:

SATZ 4. *Sei* $F = \{s_1, s_2, s_3 \mid s_1^{\alpha_1} = s_2^{\alpha_2} = s_3^{\alpha_3} = s_1 s_2 s_3 = 1\}$ *Triangel-Gruppe mit* $2 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$. *Seien* $u, v \in F$ *mit* $F = \{u, v\}$. *Dann ist einer der folgenden Fälle erfüllt:*

(1) *Es gibt einen freien Übergang von* (u, v) *zu einem System* $(s_{\nu_1}^{\gamma_1}, s_{\nu_2}'^{\gamma_2})$, $1 \leq \gamma_i < \alpha_{\nu_i}$, $(\gamma_i, \alpha_{\nu_i}) = 1$ *und* $s'_{\nu_2} = g s_{\nu_2} g^{-1}$, $g \in F$.

(2) *Es ist* $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, *und* $(\alpha_3, 2) = (\alpha_3, 3) = 1$, *und es gibt einen freien Übergang von* (u, v) *zu* $(s_1 s_2 s_1 s_2^2, s_2^2 s_1 s_2 s_1)$.

(3) *Es ist* $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$ *und* $(\alpha_3, 2) = 1$, *und es gibt einen freien Übergang von* (u, v) *zu* $(s_1 s_2^2, s_2^3 s_1 s_2^3)$.

(4) *Es ist* $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$ *und* $(\alpha_3, 3) = 1$, *und es gibt einen freien Ubergang von* (u, v) *zu* $(s_1 s_2^2, s_2^2 s_1)$.

Beweis. Sei F treu dargestellt als Untergruppe der $PSL(2, \mathbf{R})$. Für $|Sp[u, v]| \geq 2$ erhalten wir die Behauptung, wenn wir wie beim Beweis von Satz 1 aus [5] vorgehen. Für $|Sp[u, v]| < 2$, d.h. $[u, v]^n = 1$ für ein $n \geq 2$, folgt die Behauptung aus Satz 1, Satz 2, und Satz 3. ∎

Bemerkungen. (1) Ist $\alpha_i \geq 4$ für $i = 1, 2, 3$, so gibt es einen freien Übergang von (x_1, x_2) zu einem System $(s_{v1}^{\gamma_1}, s_{v2}^{\gamma_2})$ mit $v_i \in \{1, 2, 3\}$, $1 \leq \gamma_i < \alpha_{v_i}$, $(\gamma_i, \alpha_{vi}) = 1$ und $v_1 < v_2$ (vgl. [5]). Ist ein $v_i \leq 3$ und tritt der Fall 1) von Satz 4 ein, so gilt solch eine Aussage im allgemeinen nicht, wie folgende Beispiele zeigen:

(a) Sei

$$G = \{s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^p = s_3^q = s_1 s_2 s_3 = 1\}$$

mit $7 \leq p, q$ und p, q ungerade. Sei $x_1 = s_2^2$, $x_2 = s_1 s_2^2 s_1^{-1}$. Es ist $G = \{x_1, x_2\}$, und es gibt keinen freien Übergang von (x_1, x_2) zu einem System $(s_{v1}^{\gamma_1}, s_{v2}^{\gamma_2})$ mit $v_1 < v_2$.

(b) Sei

$$G = \{s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^3 = s_3^q = s_1 s_2 s_3 = 1\}$$

mit $7 \leq q$ und q ungerade. Sei $x_1 = s_3^2$, $x_2 = s_2 s_1 s_2^2 s_3^2 s_2 s_1 s_2^2$. Wähle n so, daß $(s_3^2)^n = s_3$. Es ist $n \geq 2$. Dann ist

$$x_1^n x_2^n = s_2^2 s_3^{-4} s_2 = s_3 s_1 s_3^{-4} s_1 s_3^{-1},$$

d.h. $s_1 s_3 s_1 \in \{x_1, x_2\}$ Weiter ist

$$x_1^n s_1 s_3 s_1 = (s_3 s_1)^2 = s_2^{-2},$$

d.h. $s_2 \in \{x_1, x_2\}$ und $s_1 \in \{x_1, x_2\}$. Also ist $G = \{x_1, x_2\}$; und es gibt keinen freien Übergang von (x_1, x_2) zu einem System $(s_{v1}^{\gamma_1}, s_{v2}^{\gamma_2})$ mit $v_1 < v_2$.

(2) Die Gruppen $G = \{s_1, s_2, s_3 \mid s_1^{\alpha_1} = s_2^{\alpha_2} = s_3^{\alpha_3} = s_1 s_2 s_3 = 1\}$ mit $2 \leq \alpha_i$ und $1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 + 1/\alpha_3 \geq 1$ wollen wir hier nicht weiter behandeln. Für $1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 + 1/\alpha_3 > 1$ bzw. $= 1$ tritt G als diskontinuierliche Bewegungsgruppe der Sphäre (insbesondere ist G endliche Gruppe) bzw. der euklidischen Ebene auf.

Literatur

1. L. Greenberg, *Discrete groups of motions*, Canadian J. Math., vol. 12 (1960), pp. 414–425.
2. A. H. M. Hoare, A. Karrass, und D. Solitar, *Subgroups of finite index of Fuchsian groups*, Math. Zeitschr., vol. 120 (1971), pp. 289–298.
3. A. W. Knapp, *Doubly generated Fuchsian groups*, Michigan Math. J., vol. 15 (1968), pp. 289-304.
4. N. Purzitsky und G. Rosenberger, *Two generator Fuchsian groups of genus one*, Math. Zeitschr., vol. 128 (1972), pp. 245–251; Correction, Math. Zeitschr., vol. 132 (1973), pp. 261-262.
5. G. Rosenberger, *Eine Bemerkung zu den Triangel-Gruppen*, Math. Zeitschr., vol. 132 (1973), pp. 239–244.

6. D. Singerman, *Finitely maximal Fuchsian groups*, J. London Math. Soc. (2), vol. 6 (1972), pp. 29–38.
7. N. Peczynski, G. Rosenberger, und H. Zieschang, *Über Erzeugende ebener diskontinuierlicher Gruppen*, Inventiones Math., vol. 29 (1975), pp. 161–180.
8. E. Schulenburg, *Die Erweiterungen der Grenzkreisgruppen mit zwei Erzeugenden*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, vol. 13 (1939), pp. 144–199.
9. J. Cannon und R. Gallagher, *All subgroups U of $G = (0; 2, 3, 7)$ with $|G: U| \leq 50$*, Computer-Output, 1976.
10. N. Purzitsky, *All two-generator Fuchsian groups*, Math. Zeitschr., vol. 147 (1976), pp. 87–92.
11. R. N. Kalia und G. Rosenberger, *Automorphisms of the Fuchsian groups of type* $(0; 2, 2, 2, q; 0)$, Communications in Algebra, to appear.

Universität Dortmund
Dortmund, Bundes Republik Deutschland