ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 22, Number 3, September 1978

PREDICTION D'UN PROCESSUS STATIONNAIRE DU SECOND ORDRE DE COVARIANCE CONNUE SUR UN INTERVALLE FINI

PAR

A. SEGHIER

Soit $X(t)$ un processus stationnaire du 2^e ordre connu sur $(-a, a)$, on suppose qu'on peut lui associer une infinité de corrélations R coïncidant sur $(-2a, 2a)$. On se propose d'une part, de prédire $X(s)$, pour R donnée, par rapport à $\{X(u): |u| \leq a\}$ et d'autre part de déterminer la corrélation R qui donne la plus mauvaise des prédictions.

Introduction

1. On se donne une densité de probabilité f vérifiant:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} f(x)}{1+x^2}\,dx > -\infty.$$

Soit $L_f^2(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions ϕ, définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs complexes, telles que $|\phi(x)|^2$ soit intégrable par rapport à la mesure $f \,.\, dx$.

Soit a, b, $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, on note par $H_{(a\,b)}$, l'espace de Hilbert engendré dans $L_f^2(\mathbf{R})$ par l'ensemble des combinaisons linéaires

$$\sum_{n=1}^{N} a_n e^{it_n x}, \quad a_n \in \mathbf{C},\ t_n \in \mathbf{R} \text{ et } a \leq t_n \leq b,$$

et soit e_s la fonction $x \to e^{isx}$, $e_s \in L_f^2(\mathbf{R})$.

Dans la première partie on déterminera la projection de e_s sur $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)}$, $s > a$.

Avec une condition sur le poids f, on calculera dans la seconde partie, la projection de e_s sur le sous-espace $H_{(-a\,a)}$ (qui coïncidera avec $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\,\infty)}$, $a > 0$).

On donnera dans la troisième partie des exemples de calculs de projections et une application à un problème d'extremum, à savoir, connaissant la covariance d'un processus stationnaire du 2^e ordre $X(t)$ sur l'intervalle $(-a\ a)$ trouver parmi tous les processus stationnaires ayant la même covariance sur $(-2a\ 2a)$, celui qui donne la plus mauvaise prédiction pour $s > a$.

2. Le problème de la projection d'un élément e_s sur le sous-espace $H_{(-a\,a)}$ a été étudié par M. G. Krein [8]. La solution qui en est donnée nécessite la connaissance de solutions d'un problème de Sturm-Liouville inverse.

Received July 14, 1975; received in revised form November 23, 1977.

Y. A. Rozanov [10] a étudié ce problème et donne une solution explicite dans le cas où le poids f est une fraction rationnelle. Enfin Dym et McKean [2] obtiennent la solution de ce problème (pour une large classe de poids) en utilisant la théorie de de Branges des espaces de Hilbert de fonctions entières.

Le but de ce travail est de montrer que l'étude de la structure du sous-espace $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)}$ donne, entre autres conséquences, une solution explicite de la projection de e_s sur $H_{(-a\, a)}$ pour une très large classe de poids f. Ce qui constitue la généralisation de la solution explicite donnée par Y. A. Rozanov pour des fractions rationnelles. Les méthodes, toutefois, sont différentes.

Celles que nous utilisons sont basées sur les propriétés des fonctions analytiques dans le demi-plan et un théorème de Paley-Wiener.

3. Relation avec la prédiction d'un processus stationnaire du 2^e ordre. (Voir Dym et McKean [2, p. 300–302].)

Soit $X(t)$, t réel, un processus du second ordre stationnaire de corrélation r:

$$r(s-t) = \int_\Omega X(t)X(s)\,dP, \quad r(0) = 1.$$

On suppose la corrélation $t \to r(t)$ continue, on a $r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\,d\mu(t)$, où μ est une probabilité.

La représentation obtenue nous permettra d'interpréter la prédiction de $X(s)$, connaissant $X(t)$, $t \in T$ et $s \notin T$, en termes de projection de e_s sur le sous-espace $H_{(-a\, a)}$ avec $T = (-a\; a)$.

Un processus sans partie déterministe est caractérisé par les mesures $d\mu = f \,.\, dx$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} f(x)}{1+x^2}\,dx > -\infty \quad \text{avec} \, f(x) = f(-x) > 0 \text{ p.p.}$$

Le sujet de cet article a été proposé par Monsieur le Professeur Dacunha-Castelle.

I. Projection de e_s sur $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)}$

Soit $f(x) > 0$ p.p. et vérifiant

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} f(x)}{1+x^2}\,dx > -\infty.$$

On note par $\hat{h} = \mathscr{F}h$ la transformée de Fourier de $h \in L^2(\mathbf{R})$ et définie par

$$\hat{h} = \lim_{A \to +\infty} \psi_A \quad \text{dans } L^2(\mathbf{R}), \quad \text{avec } \psi_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{+A} h(t) e^{-itx}\,dx$$

et par $\bar{g}$ la fonction

$$x \to \overline{g(e^{ix})}.$$

On sait que $\mathscr{F}$ est une isométrie de $L^2(\mathbf{R})$ sur $L^2(\mathbf{R})$.

H^{2+} et H^{2-} sont des sous-espaces fermés de $L^2(\mathbf{R})$ définis par

$$H^{2+} = \{h \in L^2(\mathbf{R}), \hat{h}(u) = 0 \text{ p.p.}, u \leq 0\},$$
$$H^{2-} = \{h \in L^2(\mathbf{R}), \hat{h}(v) = 0 \text{ p.p.}, v \geq 0\}.$$

On a d'autre part $L^2(\mathbf{R}) = H^{2+} \oplus H^{2-}$.
Les deux propositions suivantes sont classiques.

PROPOSITION 1 [3, p. 18–20]. *Soit f une fonction vérifiant les conditions* (1) *ci-dessus. Alors il existe une fonction g (dite extérieure) vérifiant,*

(i) $|g(x)|^2 = f(x)$ p.p.,
(ii) $g \in H^{2+}$,
(iii) $g \cdot H_{(0\,\infty)} = H^{2+}$.

Soit $\mathscr{F}$ la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$, $\mathscr{F}^{-1}$ sa réciproque et $1_{\mathbf{R}_-}$ l'indicatrice de $\mathbf{R}_- = \{x \in \mathbf{R}, x \leq 0\}$.

PROPOSITION 2 (Szegö [6]). *Soit g, avec $|g|^2 = f$, vérifiant les conditions de la proposition* 1 *et ϕ_s la projection de e_s, $s > 0$, sur $H_{(-\infty\,0)} = \bar{g}^{-1}H^{2-}$, alors*

$$\phi_s = \bar{g}^{-1}\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(e_s\bar{g})1_{\mathbf{R}_-}).$$

Démonstration. La projection ϕ_s de e_s vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_s - e_s|^2(x)|g|^2(x)\,dx = \min_{\phi \in H_{(-\infty\,0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi - e_s|^2(x)|g|^2(x)\,dx$$

ou encore, en tenant compte de $H_{(-\infty\,0)} = \bar{g}^{-1}H^{2-}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_s \cdot \bar{g} - e_s \cdot \bar{g}|^2(x)\,dx = \min_{\bar{g}\cdot\phi \in H^{2-}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi \cdot \bar{g} - e_s \cdot \bar{g}|^2(x)\,dx.$$

La dernière expression montre que $\phi_s \cdot \bar{g}$ est la projection (dans $L^2(\mathbf{R})$) de $\phi_s \cdot \bar{g}$ sur H^{2-}.

D'après la définition de H^{2-} et du fait que $\mathscr{F}$ soit une isométrie de $L^2(\mathbf{R})$, on a

$$\mathscr{F}(\phi_s \cdot \bar{g}) = \text{projection de } \mathscr{F}(e_s \cdot \bar{g}) \text{ sur } \mathscr{F}(H^{2-}) = \mathscr{F}(e_s \cdot \bar{g}) \cdot 1_{\mathbf{R}_-}$$

d'où la proposition.

La proposition 2 permet de résoudre le problème de la projection de e_s sur $H_{(-\infty\,0)}$ (et plus généralement sur $H_{(-\infty\,a)}$, $a \geq 0$, $s > a$).

Il reste à étudier le cas de $H_{(-\infty\,a)} \cap H_{(-a\,\infty)}$.

LEMME 1. *Soit f donnée et g associée à f par la proposition* 1. *Soit P_a le projecteur orthogonal de $L_f^2(\mathbf{R})$ sur $H_{(-\infty\,a)} \cap H_{(-a\,\infty)}$.*

Alors, pour $s > a$, il existe deux suites $(\theta_{1,n})_{n\geq 0}$ et $(\theta_{2,n})_{n\geq 0}$ dans $L^2(\mathbf{R})$ telles que

(i) $\theta_{1,n} \in H^{2-}$ *et* $\theta_{2,n} \in H^{2+}$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$
(ii) $P_a e_s = e_s + \lim_{n\to\infty} (e_{-a} \cdot g^{-1} \cdot \theta_{1,n} + e_a \cdot \bar{g}^{-1}\theta_{2,n})$.

Démonstration. On a la relation d'orthogonalité suivante:

$$(H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)})^{\perp} = \overline{(H^{\perp}_{(-\infty\, a)} + H^{\perp}_{(-a\, \infty)})}.$$

$P_a e_s - e_s$ étant orthogonal à $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)}$, il existe une suite

$$(h_{1,n})_{n\geq 0},\ h_{1,n} \in H^{\perp}_{(-\infty\, a)}$$

et une suite

$$h_{2,n},\ h_{2,n} \in H^{\perp}_{(-a\, \infty)}$$

telles que

$$P_a(e_s) - e_s = \lim_{n\to+\infty} (h_{1,n} + h_{2,n}).$$

D'après la proposition 1:

$$H_{(-\infty\, a)} = e_a \cdot H_{(-\infty\, 0)} = e_a \cdot \bar{g}^{-1} \cdot H^{2-}$$
$$H_{(-a\, \infty)} = e_{-a} \cdot H_{(0\, \infty)} = e_{-a} g^{-1} \cdot H^{2+}.$$

Donc pour tout n,

$$(h_{1,n} \in H^{\perp}_{(-\infty\, a)}) \quad \Leftrightarrow \quad (h_{1,n} \cdot e_{-a} \cdot \bar{g} \in H^{2+})$$

et

$$(h_{2,n} \in H^{\perp}_{(-a\, \infty)}) \quad \Leftrightarrow \quad (h_{2,n} \cdot e_a \cdot g \in H^{2-})$$

En posant $\theta_{1,n} = h_{2,n} \cdot e_a \cdot g$ et $\theta_{2,n} = h_{1,n} \cdot e_{-a} \cdot \bar{g}$, on obtient (i) et (ii).

Nous allons établir deux relations qui caractérisent les suites $(\theta_{1,n})_{n\geq 0}$ et $(\theta_{2,n})_{n\geq 0}$.

LEMME 2. *Soit P (resp. Q) le projecteur de $L^2(\mathbf{R})$ sur H^{2+} (resp. sur H^{2-}), $(\theta_{1,n})_{n\geq 0}$ et $(\theta_{2,n})_{n\geq 0}$ les deux suites du lemme 1 et $s > a$. On a les relations suivantes:*

$$\lim_{n\to+\infty} (\theta_{1,n} + Q(e_{2a} \cdot g \cdot [\bar{g}]^{-1} \cdot \theta_{2,n})) = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (P(e_{-2a} \cdot \bar{g} \cdot [g]^{-1} \cdot \theta_{1,n} + e_{s-a} \cdot \bar{g}) + \theta_{2,n}) = 0.$$

Démonstration. Soit $P_a e_s \in H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)}$ la projection de e_s sur cet espace, on a

$$P_a e_s \in e_a \cdot \bar{g}^{-1} \cdot H^{2-} \quad \text{et} \quad P_a e_s \in e_{-a} \cdot g^{-1} \cdot H^{2+}$$

d'après la proposition 1, d'où

$$P((P_a e_s) \cdot e_{-a} \cdot \bar{g}) = 0 \quad \text{et} \quad Q((P_a e_s) \cdot e_a g) = 0.$$

On a d'autre part, pour $s > a$, $Q(g \cdot e_{s+a}) = 0$. En remplaçant $P_a e_s$ par son expression du lemme 1, on obtient les deux relations annoncées.

Remarque. Dans le cas $s \leq -a$, on obtient des relations analogues en remplaçant $\theta_{1,n}$ par $\theta_{2,n}$ et vice et versa.

Introduisons quelques notations: Soit M l'opérateur linéaire de H^{2+} dans H^{2-} défini par

$$M: \theta \to Q(e_{2a} \cdot g \cdot [\bar{g}]^{-1} \cdot \theta)$$

et soit M^* l'opérateur linéaire de H^{2-} dans H^{2+} défini par

$$M^*: \theta \to P(e_{-2a} \cdot \bar{g} \cdot [g]^{-1} \cdot \theta)$$

on notera par $\|h\| = (\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|^2 \, dx)^{1/2}$ et $\|k\|_f = (\int_{-\infty}^{+\infty} |k(x)|^2 f(x) \, dx)^{1/2}$.

PROPOSITION 3. *Soit $b_s = -P(\bar{g} \cdot e_{s-a})$, $s > a$. On suppose $I - M^*M$ inversible, alors:*

(i) $P_a e_s = e_s - e_{-a} g^{-1} \cdot M(I - M^*M)^{-1} b_s + e_a \bar{g}^{-1}(I - M^*M)^{-1} b_s$,

(ii) $\|P_a e_s\|_f^2 = 1 + \|M \cdot (I - M^*M)^{-1} b_s\|^2 - \|(I - M^*M)^{-1} b_s\|^2$.

Démonstration. Montrons (i). $P_a e_s$ s'écrit, d'après le lemme 1,

$$P_a e_s = e_s + \lim_{n \to \infty} (e_{-a} \cdot g^{-1} \theta_{1,n} + e_a \bar{g}^{-1} \theta_{2,n})$$

où $\theta_{1,n} \in H^{2-}$ et $\theta_{2,n} \in H^{2+}$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$.

D'après le lemme 2, on a

$$\lim_{n \to \infty} (\theta_{1,n} + M\theta_{2,n}) = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} (\theta_{2,n} - M^*\theta_{1,n}) = b_s,$$

soit encore

$$\theta_{1,n} = -M\theta_{2,n} + \alpha_n \quad \text{pour tout } n, \text{ avec } \alpha_n \in H^{2-} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$$

et

$$\theta_{2,n} + M^*\theta_{1,n} = b_s + \beta_n \quad \text{pour tout } n, \text{ avec } \beta_n \in H^{2+} \text{ et } \lim_{n \to \infty} \beta_n = 0,$$

d'où

$$(I - M^*M)\theta_{2,n} = b_s + \beta_n - M^*\alpha_n.$$

Comme $(I - M^*M)^{-1}$ existe et est borné sur H^{2+} par hypothèse,

$$\lim_{n \to +\infty} \theta_{2,n} = (I - M^*M)^{-1} b_s + \lim_{n \to +\infty} (I - M^*M)^{-1}(\beta_n - M^*\alpha_n).$$

On a d'autre part $\|M^*\| = \|M\| \leq 1$, il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} (\beta_n - M^*\alpha_n) = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \theta_{2,n} = (I - M^*M)^{-1} b_s$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \theta_{1,n} = -\lim_{n\to\infty} M\theta_{2,n} = -M \lim_{n\to\infty} \theta_{2,n}.$$

Prouvons (ii). Posons $\theta_1 = \lim_{n\to+\infty} \theta_{1,n}$ et $\theta_2 = \lim_{n\to\infty} \theta_{2,n}$, on a

$$\begin{aligned}\|P_a e_s - e_s\|_f^2 &= 1 - \|P_a e_s\|_f^2\\ &= \|e_{-a} g^{-1}\theta_1 + e_a \bar{g}^{-1}\theta_2\|_f^2\\ &= \|\theta_1\|^2 + \|\theta_2\|^2 + 2R_e(\theta_1, \theta_2 e_{2a} g[\bar{g}]^{-1}).\end{aligned}$$

Comme $\theta_1 = -Q(\theta_2 e_{2a} \cdot g \cdot [\bar{g}]^{-1})$, on obtient $R_e(\theta_1, \theta_2 e_{2a} g \cdot [\bar{g}]^{-1}) = -\|\theta_1\|^2$ d'où

$$\|P_a e_s\|_f^2 = 1 + \|\theta_1\|^2 - \|\theta_2\|^2$$

ce qui donne (ii).

Dans ce qui suit nous allons donné des conditions suffisantes sur le rapport $g \cdot [\bar{g}]^{-1}$ pour que M^*M soit inversible. Soit $b \geq 0$, supposons que $g \cdot [\bar{g}]^{-1} = e_b J B^{-1}$ où J est une fonction intérieure et B un produit de Blaschke donné par

$$B(\lambda) = \prod \left(\frac{1 - \lambda/\lambda_n}{1 - \lambda/\bar{\lambda}_n}\right)^{p_n + 1}$$

avec $\operatorname{Im} \lambda_n > 0$, p_n des entiers positifs ou nuls, $n = 1, 2, \ldots$.

Soient θ un élément de H^{2-}, $\tilde{\theta}$ la projection orthogonale de $\bar{J}\theta$ sur $H^{2-} \ominus \bar{B}H^{2-}$ et $\tilde{R}$ l'opérateur de H^{2-} dans $H^{2+} \ominus BH^{2+}$ défini par $\tilde{R} \cdot \theta = B \cdot \tilde{\theta}$.

Posons $a' = 2a + b$ et $U_{a'}$ l'opérateur de $H^{2+} \ominus BH^{2+}$ dans lui-même défini par $U_{a'}\psi = P(e_{-(2a+b)}\psi)$ où $\psi \in H^{2+} \ominus BH^{2+}$ et P la projection orthogonale de $L^2(\mathbf{R})$ sur H^{2+}. Soit M^* l'opérateur défini précédemment par

$$M^*\theta = P(e_{-2a}\bar{g} \cdot [g]^{-1} \cdot \theta) = P(e_{-a'} \cdot J^{-1} B \cdot \theta),$$

on vérifie que $M^*\theta = U_{a'}\tilde{R}\theta$ pour tout $\theta \in H^{2+}$.

Notons par Λ l'ensemble de zéros de B ($\lambda_n, n = 1, 2, \ldots$), $L^2(\Lambda)$ le sous-espace de $L^2(0\ \infty)$ engendré par les fonctions ξ_n définies par $\xi_n(x) = x^{p_n} e^{i\lambda_n x}$ $(x \geq 0)$, $n = 1, 2, \ldots$. Notons enfin par $T_{a'}$ l'opérateur de $L^2(\Lambda)$ dans lui-même défini par $(T_{a'}\xi)(x) = \xi(x + a')$ pour $x \geq 0$ $(a' > 0)$ et $(T_{a'}\xi)(x) = 0$ pour $x < 0$.

D'après la remarque de P. Lax [7] l'image de $L^2(\Lambda)$ par la transformation de Fourier, notée $\mathscr{F}$, est l'espace $H^{2+} \ominus BH^{2+}$. On a d'autre part $U_{a'} = \mathscr{F} T_{a'} \mathscr{F}^{-1}$. Comme $\mathscr{F}$ est une isométrie de $L^2(0\ \infty)$ sur H^{2+}, $U_{a'}$ est compact si et seulement si $T_{a'}$ est compact.

Nous avons ainsi le théorème:

THEOREME (P. Koosis [7]). *L'opérateur $T_{a'}$ est compact pour tout $(a' > 0)$ si et seulement si*

$$\lim_{|\sigma| \to \infty} \sum \frac{(p_n + 1) \operatorname{Im} \lambda_n}{|\lambda_n - \sigma|^2} = 0, \quad \sigma \textit{ réel et } \lim_{n \to \infty} \operatorname{Im} \lambda_n = \infty.$$

COROLLAIRE. *On suppose que les zéros de $B(\lambda)$ vérifie les conditions du théorème précédent. Alors*

(i) *M^*M est un opérateur compact de H^{2+},*
(ii) *$\|M^*M\| < 1$ et $I - M^*M$ est inversible.*

Preuve. (i) D'après le théorème de P. Koosis $T_{a'}$ est un opérateur compact donc aussi $U_{a'}$, d'autre part $M^*M = U_{a'}\tilde{R}M$ où RM est un opérateur continu $(\|\tilde{R}M\| \leq 1)$ de H^{2+} dans $H^{2+} \ominus BH^{2+}$, donc M^*M est un opérateur compact.
(ii) M^*M est un opérateur auto-adjoint positif. Comme c'est un opérateur compact sa norme est égale à sa plus grande valeur propre. On aura donc $\|M^*M\| < 1$ si toute valeur propre de M^*M est strictement inférieur à 1.
En effet, soit $\phi_0 \in H^{2+}$ et supposons que l'on ait

$$\|M\phi_0\| = \|Q(e_{2a}g \cdot [\bar{g}]^{-1}\phi_0)\| = \|\phi_0\|.$$

Comme Q est un projecteur orthogonal, cela implique que $\theta = e_{2a}g[\bar{g}]^{-1}\phi_0 \in H^{2-}$. On a alors

$$(\bar{g}\theta)^\wedge(u) = (e_{2a} \cdot g\phi_0)^\wedge(u) = (g\phi_0)^\wedge(u - 2a) = 0$$

pour presque tout $u \geq 0$. On a d'autre part $(g\phi_0)^\wedge(v) = 0$ pour presque tout $v \leq 0$, d'où $(g\phi_0)^\wedge(v) = 0$ presque partout. Comme $g \cdot \phi_0 \in L(\mathbf{R})$ et $g \neq 0$ presque partout on obtient $\phi_0 = 0$ presque partout. On a donc $\|M\phi\| < \|\phi\|$ et $\|M^*M\phi\| < \|\phi\|$ pour tout $\phi \in H^{2+}$.

II. Consequences de I

PROPOSITION 4. *Pour que la projection de $H_{(-a\,\infty)}$ sur $H_{(-\infty\,a)}$ coïncide avec $H_{(-\infty\,a)} \cap H_{(-a\,\infty)}$, il faut et il suffit que $g \cdot [\bar{g}]^{-1}e_{2a}$ soit une fonction intérieure, i.e., la restriction sur $\mathbf{R}$ d'une fonction ϕ telle que*

(i) *$z \to \phi(z)$ soit analytique dans* $\operatorname{Im} z > 0$,
(ii) $|\phi(z)| \leq |\phi(x)| = |g(x) \cdot [\bar{g}]^{-1}(x)e^{2iax}| = 1$ p.p. *avec $z = x + iy$ et* $\operatorname{Im} z \geq 0$, *et* $\phi(x) = \lim_{y \to 0} \phi(x + iy)$ p.p.

Démonstration. 1. Soit b_s la fonction définie dans la proposition 3 par $b_s = -P(\bar{g}e_{s-a})$. La condition $M(b_s) = 0$ pour tout $s \geq a$ est nécessaire pour que la projection de $H_{(-a\,\infty)}$ sur $H_{(-\infty\,a)}$ coïncide avec $H_{(-\infty\,a)} \cap H_{(-a\,\infty)}$: il revient au même de voir ce fait pour un élément e_s, $s \geq a$.

Supposons que $P_a e_s$ coïncide avec la projection de e_s sur $H_{(-\infty\, a)}$, $(s \geq a)$, alors $M(b_s) = 0$. En effet en tenant compte du fait que $P_a e_s - e_s$ est orthogonal à $H_{(-\infty\, a)} = e_a \cdot \bar{g}^{-1} H^{2-}$, on obtient $\theta_{2,n} = -b_s$ pour tout n et $\theta_{1,n} = -M\theta_{2,n} = M(b_s) = 0$ pour tout n, ($\theta_{1,n}$ et $\theta_{2,n}$ sont les fonctions du lemme 1).

2. Supposons $M(b_s) = 0$ pour tout $s \geq a$, alors $g \cdot [\bar{g}]^{-1} e_{2a}$ est une fonction intérieure. En effet la condition $M(b_s) = Q(g[\bar{g}]^{-1} e_{2a} b_s) = 0$ implique

$$g \cdot [\bar{g}]^{-1} e_{2a} b_s \in H^{2+} \quad \text{pour tout } s \geq a. \tag{1}$$

Notons par $\mathcal{M}$ le sous-espace ferme de $L^2(\mathbf{R})$ engendré par le système $\{b_s\}_{s \geq a}$. On a $\mathcal{M} = H^{2+}$.

En effet, par définition $b_s = -P(\bar{g} \cdot e_{s-a}) \in H^{2+}$, donc $\mathcal{M} \subset H^{2+}$. D'autre part soit $\phi \in H^{2+}$ orthogonal à $\mathcal{M}$, on a

$$(b_s, \phi) = (\bar{g} e_{s-a}, \phi) = 0 \quad \text{pour } s \geq a. \tag{2}$$

Mais comme g est extérieure, le système $\{\bar{g} e_u\}$ $u \leq 0$ engendre H^{2-}, d'où $(\bar{g} e_u, \phi) = 0$, pour $u \leq 0$. Il s'ensuit de (2) que $(\bar{g} e_u, \phi) = 0$ pour tout $u \in \mathbf{R}$, c'est-à-dire $(g \cdot \phi)^\wedge(u) = 0$ pour presque tout u, comme $g \cdot \phi \in L^1(\mathbf{R})$ et $g \neq 0$ p.p., on a $\phi = 0$ p.p., d'où $\mathcal{M} = H^{2+}$.

D'après (1) on a aussi

$$g \cdot [\bar{g}]^{-1} e_{2a} \cdot \mathcal{M} = g \cdot [\bar{g}]^{-1} e_{2a} H^{2+} \subset H^{2+}.$$

Comme $|(g \cdot [\bar{g}]^{-1} e_{2a})(x)| = 1$ p.p., d'après un théorème de Beurling, c'est une fonction intérieure.

3. Si $e_{2a} g \cdot [\bar{g}]^{-1}$ est une fonction intérieure alors $M(b_s) = 0$ pour $s \geq a$. Il suffit en effet de remarquer que $e_{2a} \cdot g[\bar{g}]^{-1} b_s \in H^{2+}$.

4. Supposons que $M(b_s) = 0$ pour $s \geq a$, d'après 2, $e_{2a} \cdot g \cdot [\bar{g}]^{-1} \theta \in H^{2+}$ pour tout $\theta \in H^{2+}$, donc $M(\theta) = 0$. Il s'ensuit d'après le lemme que $\theta_{1,n} = -M\theta_{2,n} = 0$ et, $\theta_{2,n} = -b_s$ et $P_a e_s = e_s + e_a [\bar{g}]^{-1} b_s$, c'est-à-dire la projection de e_s sur $H_{(-\infty\, a)}$.

En résumé on a:

(i) la projection de e_s sur $H_{(-\infty\, a)}$ coïncide avec $P_a e_s$ pour $s \geq a$,

(ii) $M(b_s) = 0$ pour tout $s \geq a$,

(iii) $e_{2a} g \cdot [\bar{g}]^{-1}$ fonction intérieure,

avec (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Remarque. La proposition 4 constitue une généralisation d'un résultat de Levinson et McKean [9].

IIIA. Quelques exemples de calculs de projection

Dans cette partie, nous allons donner des résultats explicites de calculs de projections sur le sous-espace $H_{(-a\, a)}$ pour des conditions assez faibles sur le poids f.

Nous noterons par M_c l'opérateur M de la partie I, $(c \geq 0)$, i.e.,

$$M_c\colon \theta \to Q(e_{2c}g \cdot [\bar{g}]^{-1} \cdot \theta).$$

THEOREME (H. Dym [4]). *Soit f^{-1} localement sommable, alors*

$$H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)} = \bigcap_{\varepsilon > 0} H_{(-a-\varepsilon\, a+\varepsilon)} \quad \textit{pour tout } a \geq 0. \tag{1}$$

Si de plus $\|M_c\| < 1$ pour un nombre $c \geq 0$, alors

$$H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)} = H_{(-a\, a)} \quad \textit{pour tout } a > c. \tag{2}$$

Ce théorème est la généralisation d'un résultat de l'auteur dans un manuscrit non publié.

COROLLAIRE 1. *Soit $f(x) = |\phi(x)|^{-2}$ où $g = e_c\phi^{-1}$ est une fonction extérieure et ϕ une fonction entière de type exponentiel $\leq c$. Alors pour tout $a > c$, la projection de e_s $(s \geq a)$ sur $H_{(-a\, a)}$ est donnée par*

$$P_a e_s = e_s - e_{a-c} \cdot \bar{\phi} P(e_{s+c-a}\bar{\phi}^{-1}),$$

$$\|P_a e_s\|_f^2 = 1 - \int_0^{s-a} |(e_{s+c-a}\bar{\phi}^{-1})^\wedge(u)|^2\, du$$

Preuve. $g \cdot [\bar{g}]^{-1} = e_{2c}\bar{\phi}/\phi$ est une fonction intérieure d'après le lemme 2.1 [5]. D'après le théorème de Dym [4] et le corollaire du théorème de Koosis, on a $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)} = H_{(-a\, a)}$. L'expression de la projection de e_s sur $H_{(-a\, a)}$ découle enfin de la proposition 4.

COROLLAIRE 2. *Soit $f(x) = |R(x)/\phi(x)|^2$ où $g = R \cdot [e_c\phi]^{-1}$ est une fonction intérieure, ϕ une fonction entière de type exponentiel $\leq c$ et R un polynôme dont les zéros $w_1, \ldots, w_n$ sont dans le demi-plan* $\operatorname{Im} z < 0$, *de multiplicités $r_1, \ldots, r_n$.*

Alors pour tout $a > c$, la projection de e_s $(s \geq a)$ sur $H_{(-a\, a)}$ est de la forme

$$P_a(e_s)(x) = e^{isx} - \frac{e^{iax}}{\bar{g}(x)}\left(P \cdot (\bar{g}e_{s-a})(x) + \sum_1^n \frac{1}{x - w_k} Q_k\left(\frac{1}{x - w_k}\right)\right)$$
$$+ \frac{e^{-iax}}{g(x)} \sum_1^n \frac{1}{x - \bar{w}_k} R_k\left(\frac{1}{x - \bar{w}_k}\right)$$

Preuve. $g \cdot [\bar{g}]^{-1} = R \cdot [\bar{R}]^{-1} e_{2c}\bar{\phi}/\phi$ où $R[\bar{R}]^{-1}$ est l'inverse d'un produit de Baschke et $e_{2c}\bar{\phi}/\phi$ est une fonction intérieure d'après le lemme 2.1 [5]. D'après les mêmes remarques que dans la preuve du corollaire 1 on a $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)} = H_{(-a\, a)}$ et la projection de e_s sur cet espace est donnée par la proposition 3. L'expression de la projection dans le corollaire s'obtient enfin par un calcul de résidus.

Exemple 1. Projection de e_s sur $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)}$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

on obtient

$$P_a(e_s)(x) = \left(1 + i(i-1)\frac{x-i}{x-1}(s-a)\right) e^{-(s-a)} e^{iax}.$$

Remarque 1. On a dans ce cas $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)} \neq H_{(-a\, a)}$, car $P_a(e_s)$ n'est pas analytique (on sait que tous les éléments de $H_{(-a\, a)}$ sont de type exponentiel, de paramètre inférieur ou égal à a; voir [9]. Cela est dû au fait que $f^{-1}(x)$ admet un pôle en $x = 1$ (donc non localement sommable).

Exemple 2. Projection de e_s sur $H_{(-a\, a)}$

$$f(x) = \frac{2}{5\pi} \frac{x^2+4}{(x^2+1)^2};$$

$f^{-1}(x)$ étant localement sommable d'après le corollaire 2 la projection de e_s sur $H_{(-a\, a)}$ est aussi la projection sur $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)}$, les calculs donnent

$$P_a(e_s)(x)$$

$$= A(s) \cdot \frac{(x+i)^2}{x^2+4} e^{-ixa} + \left(e^{-(s-a)}\left(1 + (s-a)\frac{x-i}{x-2i}\right) + B(s) \cdot \frac{(x-i)^2}{x^2+4}\right) \cdot e^{ixa}$$

où

$$A(s) = -\frac{36(s-a)e^{-(s-a)} \cdot e^{-4a}}{81 - e^{-8a}} \quad \text{et} \quad B(s) = -\frac{e^{-4a}}{9} A(s).$$

IIIB. Application à un problème d'extremum

(1) Position du problème. Soit f une fonction positive presque partout, sommable telle que $f\,dx$ soit une probabilité sur $\mathbf{R}$ et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} f(x)}{1+x^2} dx > -\infty.$$

On considère une famille de mesures de probabilités μ sur $\mathbf{R}$, vérifiant

$$\text{(i)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iut}\, d\mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iut} f(t)\, dt, \quad |u| \leq 2a,\ a > 0.$$

De telles mesures existent et diffèrent de $f \, . \, dx$, un procédé de construction est donné dans [1], on ne les obtient pas toutes cependant.

On note par $H^{\mu}_{(-a\, a)}$ le sous-espace fermé de $L^2_{\mu}(\mathbf{R})$ engendré par $\{e_u, |u| \leq a\}$ ($e_u(x) = e^{ixu}$). Un nombre $s > a$ étant donné, on cherchera parmi les mesures μ

vérifiant (i), celle pour laquelle la distance de e_s à $H^{\mu}_{(-a\,a)}$ dans $L^2_{\mu}(\mathbf{R})$ est maximum.

Des résultats peuvent être donnés pour une famille particulière de poids et pour s, $a \leq s \leq 3a$.

(2) D'après la proposition 1, si f vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} f(x)}{1+x^2}\, dx > -\infty,$$

alors il existe g telle que $|g|^2(x) = f(x)$ p.p. et $\hat{g}(u) = 0$, $u \leq 0$.

La norme d'un élément ψ de $L^2_{\mu}(\mathbf{R})$ sera notée $\|\psi\|_{\mu}$.

Proposition 5. *Soit c, $0 \leq c < a$. On suppose f^{-1} localement sommable et $g \cdot [\bar{g}]^{-1} e_{2c}$ une fonction intérieure. Alors pour tout s tel que $a \leq s < 3a - 2c$ la distance de e_s à $H^{\mu}_{(-a\,a)}$ est maximum pour $f \cdot dx$.*

Démonstration. 1. L'hypothèse $g[\bar{g}]^{-1} e_{2c}$ intérieure entraîne que l'opérateur M_c est nul sur H^{2+} (autrement dit $\|M_c\| = 0$), comme de plus on suppose f^{-1} localement sommable, on a, d'après le théorème de Dym [4],

$$(1) \qquad H_{(-\alpha\,\alpha)} = H_{(-\infty\,\alpha)} \cap H_{(-\alpha\,\infty)} \quad \text{pour } \alpha > c.$$

D'après la proposition 4, $g[\bar{g}]^{-1} e_{2\alpha}$ étant aussi intérieure ($\alpha > c$), la projection de e_s sur $H_{(-\alpha\,\alpha)}$ est égale à la projection de e_s sur $H_{(-\infty\,a)}$.

2. Soient α, $0 \leq c < \alpha \leq a$ et $s \geq a$; on a

$$\min_{\phi \in H_{(-a\,a)}} \|e_s - \phi\|_f = \min_{\phi \in H_{(a-2\alpha\,a)}} \|e_s - \phi\|_f.$$

En effet d'après 1,

$$\min_{\phi \in H_{(a-2\alpha\,a)}} \|e_s - \phi\|_f = \min_{e_{\alpha-a}\phi \in H_{(-\alpha\,+\alpha)}} \|e_{s-a+\alpha} - e_{\alpha-a}\phi\|_f,$$

$$\min_{e_{\alpha-a}\cdot\phi \in H_{(-\infty\,\alpha)}} \|e_{s-a-\alpha} - e_{\alpha-a}\phi\|_f = \min_{e_{a-\alpha}\ \in H_{(-\infty\,a)}} \|e_s - e_{a-\alpha}\psi\|_f.$$

Ce qui donne toujours d'après 1,

$$\min_{\phi \in H_{(-\infty\,a)}} \|e_s - \phi\|_f = \min_{\phi \in H_{(-a\,a)}} \|e_s - \phi\|_f.$$

Il s'ensuit que la projection de e_s sur $H_{(-a\,a)}$ est égale à la projection de e_s sur $H_{(a-2\alpha\,a)}$.

3. La distance de e_s à $H^{\mu}_{(-a\,a)}$ est maximum pour $f \cdot dx$. Soit $0 < c < \alpha \leq a$. On a, pour $a < s \leq 3a - 2\alpha$,

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n} - e_s \right\|_{\mu} = \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n} - e_s \right\|_f$$

avec $a_1, \ldots, a_N \in \mathbf{C}$ et $a - 2\alpha \leq t_n \leq a$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

En effet

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n} - e_s\right\|_\mu^2 = \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n}\right\|_\mu^2 + 1 - 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n}, e_s\right)_\mu .$$

Comme $\hat{\mu}(t) = \hat{f}(t)$ pour $|t| \leq 2a$, on a d'une part

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n}\right\|_\mu^2 &= \sum_{\substack{1\leq n\leq N\\ 1\leq m\leq N}} a_n \bar{a}_m \hat{\mu}(t_n - t_m)\\ &= \sum_{\substack{1\leq n\leq N\\ 1\leq m\leq N}} a_n \bar{a}_m \hat{f}(t_n - t_m)\\ &= \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n}\right\|_f^2 ;\end{aligned}$$

d'autre part,

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n}, e_s\right)_\mu = \sum_{n=1}^{N} a_n \hat{\mu}(t_n - s)$$

avec $|t_n - s| \leq 2a$ par hypothèse, donc $\hat{\mu}(t_n - s) = \hat{f}(t_n - s)$, $n = 1, \ldots, N$ et

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n}, e_s\right)_\mu = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n}, e_s\right)_f$$

ce qui prouve l'égalité ci-dessus.

D'après 1, on a

$$\min_{\phi\in H_{(-a\,a)}} \|\phi - e_s\|_f = \min \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n} - e_s\right\|_f$$

pour toute suite de nombres complexes $a_1, \ldots, a_N$ et pour toute suite $t_1, \ldots, t_N$ de nombres vérifiant $a - 2\alpha \leq t_n \leq a$, $n = 1, \ldots, N$.

Tenant compte de l'égalité ci-dessus on obtient

$$\min_{\in H_{(-a\,a)}^{\mu}} \|\psi - e_s\|_\mu \leq \min_{\phi\in H_{(-a\,a)}} \|\phi - e_s\|_f$$

pour toute probabilité μ vérifiant $\hat{\mu}(t) = \hat{f}(t)$, $|t| \leq 2a$, ce qui prouve la proposition.

COROLLAIRE. *Soit $f(x) = 1/|Q(x)|^2$, où $Q(z)$ est un polynôme de degré supérieur ou égal à* 1 *et n'ayant pas de zéros dans* $\mathrm{Im}\, z \geq 0$. *Alors la distance de e_s à $H_{(-a\,a)}^{\mu}$, pour toutes les mesures de probabilité vérifiant $\hat{\mu}(u) = \hat{f}(u)$, $|u| \leq 2a$, est maximum pour la mesure $f \,.\, dx$ et pour $a \leq s < 3a$.*

Exemple. Soit $r(t) = e^{-|t|}$ la corrélation d'un processus stationnaire connue sur $(-2a\; 2a)$. On peut la prolonger par $R(t) = e^{-|t|}$ sur tout **R**. La mesure spectrale associée est $f(x)\,dx = \pi(1 + x^2)^{-1}\,dx$. Il existe une infinité de prolongements de $R(t)$ en dehors de $(-2a\ 2a)$. La distance de e_s à $H^{\mu}_{(-a\ a)}$, où μ parcourt l'ensemble des mesures vérifiant $\hat{\mu}(t) = e^{-|t|}$, $|t| \leq 2a$, est maximum pour la mesure $f \, . \, dx$.

Soit maintenant une autre corrélation $\hat{F}(t)$, prolongeant $e^{-|t|}$ sur $(-2a\ 2a)$ et définie par

$$\begin{aligned} \hat{F}(t) &= e^{-|t|}, && |t| \leq 2a, \\ &= 0, && |t| \geq 2a + \varepsilon, \\ &= -e^{-2a}|t| + e^{-2a}(\varepsilon + 2a), && 2a \leq |t| \leq 2a + \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour $s \geq 3a + \varepsilon$, la distance de e_s à $H^F_{(-a\ a)}$, $(\hat{F}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} F(x)\, dx)$ est égale à 1, donc strictement supérieure à la distance de e_s à $H^f_{(-a\ a)}$. Cet exemple montre que la propriété ci-dessus (corollaire) cesse d'être vraie pour $s \geq 3a + \varepsilon$.

Bibliographie

1. D. Dachuna-Castelle, *Remarque sur un problème de M. Paul Levy*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 259 (1964), p. 4480.
2. H. Dym et H. P. McKean, *Application of Granges spaces of integral functions to the prediction of stationary Gaussian processes*, Illinois J. Math., vol. 14 (1970), pp. 299–343.
3. ———, *Extrapolation and interpolation of stationary Gaussian processes*, Ann. of Math. Statistics, vol. 41 (1970), pp. 1817–1844.
4. H. Dym, *A problem in trigonometric approximation theory*, à paraître.
5. ———, *Trzce formulas for a class of Toeplitz-like operators*, Israel J. Math., vol. 27 (1977), pp. 21–48.
6. U. Grenander et G. Szegög, *Toeplitz forms and their applications*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1958, pp. 196–198.
7. P. Koosis, *Interior compact spaces of functions on a half-line*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 10 (1957), pp. 583–615.
8. M. C. Krein, *On basic approximation problem in theory of extrapolation and filtering process*, Traduction anglaise dans Selected Transl. Math. Statis. Prob., vol. 4 (1964), pp. 127-131.
9. N. Levinson et H. P. McKean, Jr., *Weighted trigonometrical approximation on R^1*, Acta Math., vol. 112 (1964), pp. 98–143.
10. Y. A. Rozanov, *Stationary process*, Prigmatgiz Moskva, 1963, Traduction anglaise par A. Feinstein, Holden Day, San Francisco, 1967, pp. 135–142.

Universite de Paris-Sud
Orsay, France