ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 44, Number 4, Winter 2000

# NATURE LOG-ANALYTIQUE DU VOLUME DES SOUS-ANALYTIQUES

G. COMTE, J.-M. LION ET J.-P. ROLIN

ABSTRACT. Using a preparation theorem for subanalytic functions and Lipschitz stratification for compact subanalytic sets we prove that volumes of slices of globally subanalytic sets and density have a log-analytic nature. We also prove that the set of parameters for which the volume of fiber is finite is globally subanalytic.

Soit $X$ un sous-ensemble de $\mathbf{R}^m$ qui admet une partition localement finie en sous-variétés analytiques. La dimension de $X$ est le maximum des dimensions des sous-variétés de la partition. Munissons chacune de ces sous-variétés de la structure riemannienne induite par la structure euclidienne de $\mathbf{R}^m$. Soit $k$ un entier. Si la dimension de $X$ est strictement supérieure à $k$, le volume $k$-dimensionnel $\mathrm{vol}(X)$ de $X$ est infini. Sinon il est égal à la somme des volumes $k$-dimensionnels des sous-variétés de dimension $k$ de la partition (ou encore à sa mesure $k$-dimensionnelle de Hausdorff; cf. [Fe]). Il peut alors être nul (ssi $\dim X < k$), fini ou infini. La dimension de $X$ et son volume $k$-dimensionnel ne dépendent pas du choix de la partition. Soit $x \in \mathbf{R}^m$. On appelle $k$-densité de $X$ au point $x$ la limite $\Theta(x)$, si elle existe,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{vol}(X \cap \{x'/\|x - x'\| < \varepsilon\})/c_k \varepsilon^k$$

où $c_k$ est le volume de la boule unité de $\mathbf{R}^k$. Lelong ayant le premier prouvé l'existence de $\Theta(x)$ lorsque $X$ est analytique complexe, on appelle aussi $\Theta(x)$ le nombre de Lelong de $X$ en $x$ (dans le cas complexe $\Theta(x)$ est un entier, égal à la multiplicité de $X$ en $x$). Il est prouvé dans [KR] que les ensembles sous-analytiques de $\mathbf{R}^m$ admettent une densité en tous les points de $\mathbf{R}^m$.

Dans ce travail nous précisons le théorème 1 de [LR2] qui porte sur la variation du volume $k$-dimensionnel de $X$ lorsque $X$ appartient à une famille "sous-analytique globale" de sous-analytiques globaux. Nous améliorons aussi son corollaire relatif à la nature de la fonction densité $\Theta(x)$ lorsque $X$ est un sous-analytique global.

Avant d'énoncer nos résultats rappelons la définition des sous-analytiques globaux. Ce sont les sous-ensembles de $\mathbf{R}^m$ qui sont des sous-analytiques du produit $\mathbb{P}^m$ où $\mathbb{P}$ désigne la droite projective réelle. Plus précisément, la droite réelle $\mathbf{R}$ est plongée dans la droite projective réelle $\mathbb{P}$: $[x : 1] \sim [1 : x']$ ssi $xx' = 1$. L'espace $\mathbf{R}^m$ est donc plongé dans le tore $\mathbb{P}^m$. Un sous-ensemble $Y$ de $\mathbf{R}^m$ est un *sous-analytique global* s'il existe $d \in \mathbf{N}$, et un sous-ensemble semi-analytique $Z$ du tore $\mathbb{P}^{m+d}$ tel que $Y = \pi(Z) \cap \mathbf{R}^m$ où $\pi$ est la projection canonique de $\mathbb{P}^{m+d}$ sur $\mathbb{P}^m$. Soit $D$ un sous-ensemble de $\mathbf{R}^m$. Une fonction $f\colon D \to \mathbf{R}$ est une *fonction sous-analytique globale* si

Received May 25, 1999; received in final form June 20, 1999.
1991 Mathematics Subject Classification. Primary 51M25, 14P15; Secondary 14P10.

son graphe est un sous-analytique global. Le lecteur peut consulter [BM], [DD], [DS], [Ga], [Hi], [Ku], [Lo] pour connaître les premières propriétés des sous-analytiques.

Nous allons montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1′. *Soit $Y$ un sous-analytique global de $\mathbf{R}^{n+m}$. On suppose que les fibres $Y_x = Y \cap (\{x\} \times \mathbf{R}^m)$ sont de dimension au plus $k$. Le lieu des points où le volume $k$-dimensionnel $v(x)$ de $Y_x$ est fini est un sous-analytique global $B$ de $\mathbf{R}^n$. La restriction de $v$ à $B$ est de la forme $v = P(A_1, \ldots, A_r, \log A_1, \ldots, \log A_r)$ où les $A_i$ sont sous-analytiques globales et la fonction $P$ est un polynôme.*

Si $Y$ est un sous-analytique non global (ou un semi-analytique), l'ensemble $B$ n'est pas nécessairement un sous-analytique de $\mathbf{R}^n$. Par exemple, la réunion des sous-ensembles $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\colon |y| < |x|\}$ et $\{1/n, y)\colon n \in \mathbf{N}, n \neq 0, y > n\}$ est un semi-analytique $Y$ de $\mathbf{R}^2$ et l'ensemble $B$ associé qui est égal à $\mathbf{R} \setminus \{1/n\colon n \in \mathbf{N}, n \neq 0\}$ n'est pas sous-analytique.

Le corollaire qui suit se déduit du théorème 1′ comme le corollaire au théorème 1 de [LR2] se déduit de ce dernier.

COROLLAIRE. *Soit $X$ un sous-analytique global de dimension au plus $k$ de $\mathbf{R}^m$. Alors la fonction densité $k$-dimensionnelle $\Theta(x)$ de $X$ est bien définie en tout point de $\mathbf{R}^m$ et c'est une fonction bornée de la forme $\Theta = P(A_1, \ldots, A_r, \log A_1, \ldots, \log A_r)$ où les $A_i$ sont sous-analytiques globales et la fonction $P$ est un polynôme.*

Les premières étapes de [LR2] (i.e., théorème d'intégration de [LR2] et début de la preuve du Théorème 1) peuvent être résumées par le lemme suivant.

LEMME [LR2]. *Il existe une fonction positive $G$ définie sur $\mathbf{R}^n \times ]0, 1[^k$ de la forme $G = P(A_1, \ldots, A_r, \log A_1, \ldots, \log A_r)$ où les $A_i$ sont sous-analytiques globales et la fonction $P$ est un polynôme et telle que $v(x) = \lim_{\varepsilon_1 \to 0}(\ldots(\lim_{\varepsilon_k \to 0} G(x, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k))\ldots)$.*

Ainsi pour obtenir le théorème 1′ il suffit de montrer les propositions suivantes.

PROPOSITION 1. *Soit $Y$ un sous-analytique global de $\mathbf{R}^{n+m}$. On suppose que les fibres $Y_x = Y \cap (\{x\} \times \mathbf{R}^m)$ sont de dimension au plus $k$. Le lieu des points $x$ de $\mathbf{R}^n$ où le volume $k$-dimensionnel $v(x)$ est fini est un sous-analytique global de $\mathbf{R}^n$.*

PROPOSITION 2. *Soit $G$ une fonction positive définie sur $\mathbf{R}^{n+1}$, à valeurs dans $[0, +\infty[$ et de la forme $P(A_1, \ldots, A_r, \log A_1, \ldots, \log A_r)$ où les $A_i$ sont sous-analytiques globales et la fonction $P$ est un polynôme. On suppose que si $x \in \mathbf{R}^n$, la limite $g(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} G(x, \varepsilon)$ est finie. Alors la fonction $g$ est de la forme $p(a_1, \ldots, a_s, \log a_1, \ldots, \log a_s)$ où les $a_i$ sont sous-analytiques globales et la fonction $p$ est un polynôme.*

Nous déduirons cette proposition de deux affirmations. La première résume les résultats de Parusiński sur l'existence de stratifications sous-analytiques localement lipschitz-triviales (premier lemme d'isotopie de Thom-Mather dans la catégorie lipschitz) (voir [Pa3] pour une vue générale).

AFFIRMATION 1 (Théorème 1.6 et Lemme 1.7 de [Pa4]). *Soit $Z$ un sous-analytique de $[-1, 1]^n \times B_m$ où $B_m$ désigne la boule unité de $\mathbf{R}^m$. Il existe une partition finie de $[-1, 1]^n$ en sous-analytiques $D_1, \dots, D_t$ tels que si $x, x'$ appartiennent au même $D_i$ il existe un homéomorphisme bi-lipschitzien $F$ de $B_m$ qui fixe l'origine et qui envoie $Z_x$ sur $Z_{x'}$.*

AFFIRMATION 2. *Soient $F$ un homéomorphisme bi-lipschitzien de la boule unité qui fixe l'origine, $K$ une constante de Lipschitz commune à $F$ et son inverse et $J$ l'inversion par rapport à la sphère unité de $\mathbf{R}^m$. Si $U$ est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^m \setminus B_m$ de volume fini, les volumes de $U$ et de $J \circ F \circ J(U)$ sont dans un rapport compris entre $1/K^{3m}$ et $K^{3m}$.*

*Preuve de l'Affirmation* 2. Il suffit de montrer:
($*$) *Si $y \in \mathbf{R}^m \setminus B_m$ et si $\eta > 0$, il existe $R(y, \eta) > 0$ tel que l'image de la boule $B(y, R)$ par l'application $J \circ F \circ J$ est contenue dans la boule de centre $J \circ F \circ J(y)$ et de rayon $K^3(1 + \eta)^2 R$ pour tout $R < R(y, \eta)$.*
Ceci résulte des points (1) et (2) suivants:
(1) Puisque $F$ et son inverse sont $K$-lipschitziens et fixent l'origine, on a pour tout $y \in B_m$ non nul et $R > 0$: $1/K\|y\| < \|F(y)\| < K\|y\|$ et $F(B(y, R)) \subset B(F(y), KR))$.
(2) Si $y \in \mathbf{R}^m$ non nul et $u \in \mathbf{R}^m$, alors

$$\|dJ(y).u\| = \|\frac{u}{\|y\|^2} - 2(y \cdot u)\frac{y}{\|y\|^4}\| \leq \frac{\|u\|}{\|y\|^2}.$$

Ceci implique que si $\eta > 0$ il existe $r(y, \eta) > 0$ tel que l'image de la boule $B(y, r)$ par l'application $J$ est contenue dans la boule de centre $J(y)$ et de rayon $(1 + \eta)r/\|y\|^2$ pour tout $r < r(y, \eta)$.

On démontre ($*$) en choisissant $R(y, \eta)$ inférieur à $r(y, \eta)$ et à $\frac{r(F \circ J(y), \eta)\|y\|^2}{K(1+\eta)}$.

*Preuve de la proposition* 1. On peut supposer que $Y$ est contenu dans $[-1, 1]^n \times \mathbf{R}^m$ et que les fibres $Y_x$ ne rencontrent pas la boule unité $B_m$. Notons $Z$ le sous-analytique relativement compact $Z = \{(x, z)\colon x \in [-1, 1]^n; \exists y \in Y_x, z = J(y)\}$. En appliquant les résultats de Parusiński à $Z$ on peut conclure. En effet, soit $D_i$ un élément de la partition finie de $[-1, 1]^n$ obtenue. Si $x, x'$ appartiennent à $D_i$ il existe un homéomorphisme bi-lipschitzien $F$ de la boule unité qui fixe l'origine et qui envoie $Z_x$ sur $Z_{x'}$. Ceci implique, d'après l'Affirmation 2, que l'ensemble des points $x$ tels que le volume $v(x)$ est fini est la réunion de certains $D_i$.

*Preuve de la proposition* 2. Nous montrons cette proposition en appliquant le théorème de préparation des fonctions sous-analytiques de [LR1] simultanément aux fonctions $A_1, \dots, A_r$ qui interviennent dans la définition de $G(x, \varepsilon)$. Quitte à se restreindre à un sous-analytique global $D$ de $\mathbf{R}^n \times ]0, 1[$ tel que tout point $x$ de $\mathbf{R}^n$ est dans l'adhérence de $(x \times \mathbf{R}) \cap D$, le théorème de préparation des fonctions sous-analytiques permet de supposer être dans la situation suivante (voir la preuve du théorème d'intégration de [LR2]). La restriction de $G(x, \varepsilon)$ à $D$ est une somme finie de termes de la forme

$$g_{p,\kappa}(x)\varepsilon^{p/q} u_{p,\kappa}(\theta(x), b(x)\varepsilon^{1/q})(\log \varepsilon)^{\kappa}$$

où $\kappa \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$, $g_{p,\kappa}(x)$ est un polynôme en des fonctions sous-analytiques globales et en leurs logarithmes, $b(x)$ est une fonction sous-analytique globale, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ avec les $\theta_i(x)$ sous-analytiques globales et $u_{p,\kappa}$ est une fonction analytique définie sur $\overline{(\theta, by^{1/q})(D)}$ telle que $u_{p,\kappa}(\theta(x), 0) \neq 0$ si $x \in D$. Contrairement à la preuve du théorème d'intégration de [LR2], il n'apparaît pas ici de monôme de la forme $c(x)/y^{1/q}$ dans l'unité $u_{p,\kappa}$, car on a supposé que si $x \in \mathbf{R}^n$, $x$ est dans l'adhérence de $(x \times \mathbf{R}) \cap D$. La fonction $G(x, \varepsilon)$ s'écrit donc sous la forme

$$G(x, \varepsilon) = \sum_{-l \leq p \leq l} \sum_{0 \leq \kappa \leq d} g_{p,\kappa}(x)\varepsilon^{p/q} u_{p,\kappa}(\theta(x), b(x)\varepsilon^{1/q})(\log \varepsilon)^{\kappa}.$$

La proposition résulte alors de la remarque suivante. Soit $x \in \mathbf{R}^n$. La limite $g(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} G(x, \varepsilon)$ est finie si et seulement si $g_{0,\kappa}(x) = 0$ lorsque $\kappa > 0$ et $g_{p,\kappa}(x) = 0$ lorsque $p < 0$. Et alors $g(x) = g_{0,0}(x) u_{0,0}(\theta(x), 0)$.

*Pour conclure.* L'affirmation admet une version semi-algébrique: si $Z$ est semi-algébrique alors la partition $D_1, \dots, D_t$ obtenue est semi-algébrique. En effet les diverses étapes de la preuve de cette affirmation sont valides dans le cadre semi-algébrique. C'est en particulier le cas de la démonstration de l'existence de stratifications lipschitziennes adaptées aux ensembles semi-analytiques compacts [Pa2] (voir aussi [Pa1]). On peut également citer le théorème 4 de [CR] qui donne une stratification semi-algébrique localement triviale de manière lipschitz (mais non bilipschitz) d'un semi-algébrique.

La proposition 1 admet donc comme corollaire le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Soit $Y$ un semi-algébrique de $\mathbf{R}^{n+m}$. On suppose que les fibres $Y_x = Y \cap (\{x\} \times \mathbf{R}^m)$ sont de dimension au plus $k$. Le lieu des points $x$ de $\mathbf{R}^n$ où le volume $k$-dimensionnel $v(x)$ est fini est un semi-algébrique de $\mathbf{R}^n$.*

En revanche, l'exemple suivant montre qu'on ne peut pas améliorer la seconde affirmation du théorème 1′ lorsque $Y$ est supposé semi-algébrique. Considérons l'ensemble semi-algébrique

$$Y = \{(x, y, z)\colon\ x \in [0, 1],\ y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

Pour tout $x$ le volume 1-dimensionnel de la fibre $Y_x$ est $\arccos(x)$, qui n'est pas de la forme $P(A_1, \ldots, A_r, \log A_1, \ldots, \log A_r)$ avec les $A_i$ semi-algébriques et la fonction $P$ polynôme.

## BIBLIOGRAPHIE

[BM] E. Bierstone et P. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **67** (1988), 5–42.
[CR] M. Coste et M. Reguiat, "Trivialités en famille" dans *Real algebraic geometry* (*Rennes* 1991), Lecture Notes in Math., no. 1524, Springer, Berlin, 1992, pp. 193–204.
[DD] J. Denef et L. van den Dries, *p-adic and real subanalytic sets*, Ann. of Math. **128** (1988), 79–138.
[DS] Z. Denkowska et J. Stasica, *Ensemble sous-analytiques à la polonaise*, 1985, preprint.
[Fe] H. Federer, *Geometric measure theory*, Grundlehren Math. Wiss., no. 153, Springer-Verlag, 1969.
[Ga] A. M. Gabrielov, Projections of semi-analytic sets, Functional Anal. Appl. **2** (1968), 282–291.
[Hi] H. Hironaka, "Subanalytic sets" dans *Number theory, algebraic geometry and commutative algebra*, Kinokuniya, Tokyo, 1973, pp. 453–493.
[Ku] K. Kurdyka, *Points réguliers d'un sous-analytique*, Ann. Fourier **38** (1988), 133–156.
[KR] K. Kurdyka et G. Raby, *Densité des ensembles sous-analytiques*, Ann. Fourier **39** (1989), 753–771.
[Le] P. Lelong, *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 239–262.
[Lo] S. Lojasiewicz, *On semi-analytic and subanalytic geometry*, Banach Center Publication 34, 1995, pp. 89–104.
[LR1] J.-M. Lion et J.-P. Rolin, *Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles*, Ann. Inst. Fourier **47** (1997), 859–884.
[LR2] ———, *Intégration des fonctions sous-analytiques et volumes des sous-analytiques*, Ann. Inst. Fourier **48** (1998), 755–767.
[Pa1] A. Parusiński, *Lipschitzowska stratyfikacja zbiorów semi-analitycznych*, Thèse, Université Jagellone, Cracovie, 1987.
[Pa2] ———, *Lipschitz properties of semi-analytic sets*, Ann. Inst. Fourier **38** (1988), 189–213.
[Pa3] ———, "Lipschitz stratification" dans *Global analysis in modern mathematics*, Proceedings of a Symposium in honor of R. Palais, Publish or Perish, 1993, pp. 73–89.
[Pa4] ———, *Lipschitz stratification of subanalytic sets*, Ann. École Nat. Sup. Méc. Nantes **27** (1994), 661–996.

G. Comte, Laboratoire Dieudonné, CNRS UMR 6621, Université de Nice-Sophia-Antipolis, F 0618 Nice Cedex 2, France
comte@math.unice.fr.

J.-M. Lion, Laboratoire Topologie, CNRS UMR 5584, Université de Bourgogne, BP47870, F 21078 Dijon Cedex, France
lion@u-bourgogne.fr

J.-P. Rolin, Laboratoire Topologie, CNRS UMR 5584, Université de Bourgogne, BP47870, F 21078 Dijon Cedex, France
rolin@u-bourgogne.fr