

BEMERKUNGEN ÜBER DIE PROJEKTIVE GRUPPE EINER MOUFANG-EBENE

VON
GÜNTER PICKERT

Eine *Moufang-Ebene* ist eine solche projektive Ebene, in welcher der kleine Desarguessche Satz gilt. Bekanntlich lassen sich genau die Moufang-Ebenen als Ebenen über Alternativkörpern gewinnen¹. Die nichtassoziativen Alternativkörper, die also gerade die nichtdesarguesschen Moufang-Ebenen liefern, sind nun die Cayley-Algebren. Für den Fall der Cayley-Algebra über den reellen Zahlen konnte H. FREUDENTHAL² zeigen, daß die *Kollineationsgruppe* (d.i. die Gruppe der umkehrbaren inzidenzerhaltenden Selbstabbildungen) der Moufang-Ebene (*“Oktavengeometrie”* bei FREUDENTHAL) isomorph ist zur Cartanschen Ausnahmegruppe E_6 , also einfach. Sie stimmt daher mit der *projektiven Gruppe* sowohl wie mit der *kleinen projektiven Gruppe* überein, die ja Normalteiler der Kollineationsgruppe sind. Dabei ist die projektive Gruppe (Elemente als *projektive Kollineationen* bezeichnet) definiert als das Erzeugnis der *zentralen Kollineationen* (auch *Perspektivitäten* genannt) und die kleine projektive Gruppe³ (Elemente als *kleine projektive Kollineationen* bezeichnet) als das Erzeugnis derjenigen zentralen Kollineationen, bei denen das Zentrum auf der Achse liegt. Man fragt sich nun natürlich, bei welchen anderen Grundkörpern statt des Körpers der reellen Zahlen dieses Ergebnis (also das Zusammenfallen der drei Gruppen) richtig bleibt. Wäre bei beliebiger Moufang-Ebene eine obere Schranke für die Anzahl der zentralen Kollineationen (mit Zentrum auf Achse) bekannt, die man jeweils miteinander multiplizieren muß, um die Elemente der kleinen projektiven Gruppe zu erhalten, so könnte man in der Definition dieses Begriffs ohne den Begriff der natürlichen Zahl auskommen, den man sonst in der folgenden Form braucht: Eine Kollineation gehört genau dann zur kleinen projektiven Gruppe, wenn sie bei geeigneter natürlicher Zahl n das Produkt von n zentralen Kollineationen (mit Zentrum auf Achse) ist. Es ließe sich daher auf die Frage nach dem Zusammenfallen der Gruppen das Entscheidungsverfahren von A. TARSKI⁴ anwenden, und das hergeleitete Ergebnis würde sich vom Körper der reellen Zahlen auf jeden reell-abgeschlossenen Grundkörper übertragen.

Received September 24, 1958.

¹ Näheres darüber sowie über andere im folgenden vorausgesetzte Ergebnisse über projektive Ebenen findet man z.B. in meinem Buch *Projektive Ebenen*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955 (im folgenden als *PE* zitiert).

² *Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie*, Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht, 1951.

³ in desarguesschen Ebenen meistens als *spezielle* (oder auch *unimodulare*) *projektive Gruppe* bezeichnet.

⁴ *A decision method for elementary algebra and geometry*, 2nd ed., Berkeley and Los Angeles, 1951. S. insb. die Anmerkungen 9 (S. 48) und 15 (S. 53).

Im folgenden verzichte ich darauf, die volle Aussage der Gruppenübereinstimmung auf andere Grundkörper zu übertragen und beschränke mich vielmehr auf eine Folgerung daraus, nämlich auf die Aussage: Die kleine projektive Gruppe ist transitiv auf den nichtausgearteten Punktquadrupeln⁵. Dies folgt aus der Übereinstimmung der kleinen projektiven Gruppe mit der Kollineationsgruppe, da diese nach Arbeiten von BRUCK, KLEINFELD und SCHAFER (vgl. *PE*, S. 195) auf den nichtausgearteten Punktquadrupeln transitiv ist. Diese Folgerung nun erweist sich bei jedem Grundkörper als richtig, in dem jedes Element eine dritte Potenz ist und der so angeordnet werden kann, daß jedes positive Element ein Quadrat ist; diese Eigenschaften seien im folgenden kurz als *kubisch abgeschlossen* und *reell-quadratisch abgeschlossen* bezeichnet. Dieses Ergebnis wird als Satz 2 bewiesen. Zur Vorbereitung auf den Beweis dient Satz 1, der die algebraische Bedingung dafür angibt, daß in einer desarguesschen Ebene projektive und kleine projektive Gruppe übereinstimmen. Ohne Zusammenhang mit dem Vorhergehenden macht zum Schluß Satz 3 eine Aussage darüber, wie man die projektiven Kollineationen aus den kleinen projektiven Kollineationen gewinnen kann.

SATZ 1. *In einer desarguesschen Ebene stimmen projektive und kleine projektive Gruppe genau dann überein, wenn die multiplikative Gruppe des Koordinatenschiefkörpers bereits von ihrer Kommutatorgruppe und den dritten Potenzen der Zentrumselemente erzeugt wird.*

Nach Einführung von homogenen Koordinaten wird eine projektive Kollineation bekanntlich durch eine lineare Abbildung

$$x'_i = \sum_{k=0}^2 a_{ik} x_k \quad (i = 0, 1, 2)$$

gegeben, wobei die a_{ik} bis auf einen gemeinsamen Faktor z aus dem Zentrum Z des Koordinatenschiefkörpers K bestimmt sind. Es handelt sich nun genau dann um eine zentrale Kollineation mit dem Zentrum auf der Achse, wenn der Faktor z so gewählt werden kann, daß die Matrix der a_{ik} konjugiert ist zu einer Matrix

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bei der Determinantendefinition (über einem Schiefkörper) nach DIEUDONNÉ⁶ sind es nun gerade die Produkte von Konjugierten der Matrizen (1), denen als Determinante das Einselement C der Faktorgruppe K^\times/C zugeordnet wird, wobei K^\times die multiplikative Gruppe von K und C ihre Kommutatorgruppe

⁵ Ein Punktquadrupel heißt *nichtausgeartet*, wenn keine drei seiner Punkte auf einer Geraden liegen.

⁶ *Les déterminants sur un corps non commutatif*, Bull. Soc. Math. France, t. 71 (1943), pp. 27–45; s. auch *La géométrie des groupes classiques*, Ergebnisse der Mathematik, N. F., Heft 5 (1955), Chapitre II, §1.

bezeichnet. Daher sind die kleinen projektiven Kollineationen gekennzeichnet als solche projektive Kollineationen, deren Matrix bei passender Wahl des Zentrumsfaktors die Determinante C besitzt. Eine zentrale Kollineation, deren Zentrum nicht auf der Achse liegt, läßt sich bei passendem Koordinatensystem in der Form

$$(2) \quad x'_0 = s^{-1}x_0, \quad x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2$$

darstellen, und umgekehrt liefert (2) bei jeder Wahl von s aus K^\times eine derartige zentrale Kollineation. Da nun die Determinante einer Diagonalmatrix einfach die Klasse (mod C) des Produkts ihrer Diagonalelemente ist, besagt nach den angeführten Tatsachen das Übereinstimmen von projektiver und kleiner projektiver Gruppe gerade: Zu jedem $s \in K^\times$ gibt es ein $z \in Z$ mit $s^{-1}z^3 \in C$. Mit anderen Worten: Zu s gibt es ein $c \in C$ und ein $z \in Z$ mit $s = cz^3$.

SATZ 2. *In einer nichtdesarguesschen Moufang-Ebene, deren Koordinatenalternativkörper einen reell-quadratisch und kubisch abgeschlossenen Grundkörper besitzt, ist die kleine projektive Gruppe transitiv auf den nichtausgearteten Quadrupeln.*

Zum Beweis benutze ich die bekannte Tatsache, daß die kleine projektive Gruppe einer Moufang-Ebene stets transitiv auf den nichtkollinearen Punkttripeln ist⁷. Ich habe daher nur noch das Folgende zu beweisen: Zu nichtkollinearen Punkten A, B, C und Punkten D, D' , die auf keiner der Geraden AB, BC, CA liegen, gibt es eine kleine projektive Kollineation mit Fixpunkten A, B, C , welche D in D' überführt. Nach einem Ergebnis von R. MOUFANG (s. *PE*, S. 189) liegen die Punkte A, B, C, D, D' in einer desarguesschen Unterebene, deren Koordinatenschiefkörper eine nichtkommutative Algebra über K ist; dabei sei mit K der Grundkörper (= Zentrum) des Koordinatenalternativkörpers der Moufang-Ebene bezeichnet. Dieser Koordinatenschiefkörper muß nun bekanntlich eine Quaternionenalgebra Q über K sein.

Da K reell-quadratisch abgeschlossen sein soll, besitzt Q eine Basis $\{1, i, j, k\}$ mit der üblichen Multiplikationstafel:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Ein Element aus Q läßt sich stets als Produkt eines Elements von K und einer Quaternion $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ mit der Norm $N(x) = \sum_{h=0}^3 x_h^2 = 1$ darstellen. Um Satz 1 anwenden zu können, ist wegen der kubischen Abgeschlossenheit von K also nur noch zu zeigen, daß x zur Kommutatorgruppe C von Q^\times gehört. Wegen $-1 \leq x_0$ gibt es in K ein y_0 mit $2y_0^2 = x_0 + 1$. Mit $y_i = x_i/2y_0$ und $y = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k$ rechnet man dann leicht $N(y) = 1$,

⁷ *PE*, S. 109, Satz 3. Einen einfacheren Beweis, sogar gleich für eine weitergehende Transitivitätsaussage (*PE*, S. 194, Satz 13), gibt N. S. MENDELSON, *Canadian J. Math.*, vol. 8 (1956), pp. 532–562, p. 539, Theorem 8.

$y^2 = x$ nach. Da K reell-quadratisch abgeschlossen sein soll, gibt es u_1, u_2, u_3 mit

$$(3) \quad \sum_{h=1}^3 u_h y_h = 0, \quad \sum_{h=1}^3 u_h^2 = 1.$$

Setzt man jetzt

$$v_1 = -y_0 u_1 + (y_2 u_3 - y_3 u_2),$$

$$v_2 = -y_0 u_2 + (y_3 u_1 - y_1 u_3),$$

$$v_3 = -y_0 u_3 + (y_1 u_2 - y_2 u_1),$$

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k, \quad v = v_1 i + v_2 j + v_3 k,$$

so ergibt sich aus (3) $y = uw$ und daher wegen $N(u) = N(y) = 1$ auch $N(v) = 1$, also $u^{-1} = -u, v^{-1} = -v$. Aus alledem folgt

$$x = (w)^2 = wu^{-1}v^{-1},$$

d.h. x ist sogar selbst Kommutator.

In der desarguesschen Ebene mit dem Koordinatenschiefkörper Q gibt es nun eine projektive Kollineation mit den Fixpunkten A, B, C , die D in D' überführt. Nach Satz 1 ist diese sogar eine kleine projektive Kollineation, also Produkt von zentralen Kollineationen, bei denen das Zentrum auf der Achse liegt. Wegen der Gültigkeit des kleinen Desarguesschen Satzes in der Moufang-Ebene lassen sich diese zentralen Kollineationen nun zu solchen der Moufang-Ebene (unter Erhaltung von Zentrum und Achse natürlich) fortsetzen. Damit ist die Behauptung von Satz 2 bewiesen.

SATZ 3. *In einer Moufang-Ebene läßt sich nach Wahl einer Geraden g und eines nicht auf ihr liegenden Punktes P jede projektive Kollineation darstellen als Produkt einer kleinen projektiven Kollineation und einer zentralen Kollineation mit Zentrum P und Achse g .*

ZUSATZ. *Eine Kollineation einer Moufang-Ebene ist projektiv, wenn sie auf mindestens einer Geraden eine Projektivität hervorruft.*

Um den Zusatz⁸ gleich mit zu beweisen, sei von der Kollineation k nicht vorausgesetzt, daß sie projektiv ist, sondern nur, daß sie auf mindestens einer Geraden eine Projektivität (= Produkt von Projektionen) hervorruft. Bekanntlich (s.z.B. *PE*, S.67, Satz 10) gibt es eine kleine projektive Kollineation k_0 , welche auf g dieselbe Projektivität hervorruft wie k . Für den Beweis des Zusatzes, bei dem es ja nicht auf die beliebige Wahl von g ankommt, hat man dazu natürlich erst g als solche Gerade zu wählen, auf der k eine Projektivität hervorruft. Dann läßt kk_0^{-1} (d.h. erst k , dann k_0^{-1}) jeden Punkt von g fest. Der Bildpunkt P' von P bei kk_0^{-1} kann daher nicht auf g liegen, und es

⁸ Er dehnt einen für desarguessche Ebenen bereits bekannten Satz (s.z.B. *PE*, S. 114, Satz 11) unter leichter Verschärfung auf Moufang-Ebenen aus; dabei erreicht man zugleich eine Beweisvereinfachung auch für den desarguesschen Fall.

gibt somit eine zentrale Kollineation t mit Achse g und Zentrum auf g , welche P in P' überführt. Nun läßt $s = kk_0^{-1}t^{-1}$ jeden Punkt von g und außerdem noch P fest, ist also eine zentrale Kollineation mit Zentrum P und Achse g . Aus $k = stk_0$ folgt dann sofort die Behauptung.

Geht man mit g als uneigentlicher Geraden zur affinen Betrachtung über, so sind die zentralen Kollineationen mit Zentrum P und Achse g die *Streckungen* mit Fixpunkt P . Man kann daher den Inhalt von Satz 3 auch so aussprechen: *Die projektive Gruppe einer Moufang-Ebene ist das Produkt der kleinen projektiven Gruppe mit einer Streckungsgruppe*; wegen der Normalteilereigenschaft der kleinen projektiven Gruppe ist dabei die Reihenfolge der Faktoren gleichgültig.

UNIVERSITÄT
TÜBINGEN, DEUTSCHLAND