The Annals of Probability
1980, Vol. 8, No. 6, 1183–1188

COMPARAISON DES "NORMES" L_p DU PROCESSUS CROISSANT ET DE LA VARIABLE MAXIMALE POUR LES MARTINGALES REGULIERES À DEUX INDICES. THÉORÈME LOCAL CORRESPONDANT

BY JEAN BROSSARD

Université Scientifique et Médicale de Grenoble

Etant donné une martingale à deux indices régulière (en un sens convenable), on majore la "norme" L_p ($p \in]0, \infty[$) de S (racine de la variaton quadratique) par la "norme" L_p de u^* (variable maximale). Pour cela on démontre une inégalité faisant intervenir les fonctions de répartition de S et u^*. La méthode permet aussi de montrer le théorème local correspondant, à savoir que S est presque sûrement fini là où u^* est fini.

Les inégalités de Burkholder montrent, pour une martingale à un indice u, l'équivalence des normes L_p ($p > 1$) de u^* (variable maximale) et S (racine de la variable terminale du processus croissant associé à u). L'équivalence des normes reste vraie pour $p = 1$ comme l'a démontré Davis, mais est fausse en général si $p < 1$. Cependant, Burkholder et Gundy ont montré, sous une hypothèse de régularité, l'équivalence des deux "normes" L_p pour tout p dans $]0, \infty[$.

Dans le cas des martingales à deux indices (à temps discret) l'équivalence des normes L_p pour $p > 1$ est connue, et c'est une conséquence des inégalités de Burkholder pour les martingales à un indice mais à valeur dans un espace de Hilbert (cf. par exemple Gundy [2]). Pour les martingales régulières, la majoration de $\| u^* \|_p$ par $\| S \|_p$ a été démontrée par C. Fefferman (non publié; cf. Bernard [1] pour une démonstration dans le cas $p = 1$, ou Gundy [2] pour le cas "brownien"). Le but de ce papier est d'obtenir la majoration inverse (c'est-à-dire la majoration de $\| S \|_p$ par $\| u^* \|_p$ pour $p \leq 1$). On démontrera aussi le théorème local corresondant, è savoir que S est fini presque sûrement là où u^* l'est.

Ces résultats sont bien sûr à rapprocher des résultats analogues pour les fonctions biharmoniques: dans le cas des fonctions biharmoniques, le théorème local a d'abord été démontré par M.P. et P. Malliavin [4], puis R. Gundy et E. M. Stein [3] ont démontré le théorème global (majoration de la "p-norme" de la fonction d'aire par la "p-norme" de la fonction maximale).

0. Definitions, notations, enonce des théorèmes. Soit un double indice $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$. On notera $\underline{m}$ (resp. $\bar{m}$, resp. $\bar{\underline{m}}$) le double indice $(m_1 + 1, m_2)$ (resp. $(m_1, m_2 + 1)$, resp. $(m_1 + 1, m_2 + 1)$). Etant donné une suite à deux indices $(u_m)_{m \in \mathbb{N}^2}$, on note $\Delta_1 u_m$, $\Delta_2 u_m$, et Δu_m respectivement les accroissements $u_{\underline{m}} - u_m$, $u_{\bar{m}} - u_m$, $u_{\bar{\underline{m}}} - u_{\bar{m}} - u_{\underline{m}} + u_m$.

Soit $(\Omega, (\mathscr{F}_m)_{m \in \mathbb{N}^2}, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration à deux indices, c'est-à-dire d'une famille de tribus indexée par $\mathbb{N}^2$, et croissant (i.e., pour tout m, $\mathscr{F}_m \subset \mathscr{F}_{\underline{m}}$ et $\mathscr{F}_m \subset \mathscr{F}_{\bar{m}}$). On supposera en outre que pour tout m, $\mathscr{F}_{\underline{m}}$ et $\mathscr{F}_{\bar{m}}$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathscr{F}_m$. Une martingale est une famille de variables aléatories intégrables indexée par $\mathbb{N}^2$ et telle que $E[u_{\bar{m}}/\mathscr{F}_m] = E[u_{\underline{m}}/\mathscr{F}_m] = u_m$ pour tout m. La filtration $(\mathscr{F}_m)$ sera dite régulière s'il existe une constante R (constante de régularité) telle que pour toute martingale (v_m) positive, on ait pour tout m:

$$v_{\bar{m}} \leq R v_m \quad \text{et} \quad v_{\underline{m}} \leq R v_m.$$

Received July 19, 1979.

Key words and phrases. Martingale régulière à deux indices, processus de la variation quadratique, variable maximale.

AMS 1970 *subject classification* 60G42.

Le principal exemple de filtration régulière est le suivant: chaque tribu $\mathscr{F}_m$ est atomique, les atomes de $\mathscr{F}_{\underline{m}}$ (resp. $\mathscr{F}_{\bar{m}}$) étant obtenus en coupant chaque atome de $\mathscr{F}_m$ en $\underline{p}$ (resp. $\bar{p}$) parties équiprobables, ($\underline{p}$ et $\bar{p}$ étant des entiers fixés, ou au moins restant majorés quand m varie). Cette définiton de la régularité recouvre donc le cas des martingales dyadiques pour lesquelles la filtration $\mathscr{F}_m$ est du type précédent avec $\underline{p} = \bar{p} = 2$.

Etant donné une martingale (u_m) on définit u^* sa variable maximale par

$$u^* = \sup_m |u_m|$$

et la variable S (S^2 est la variable terminale d'un processus croissant associé) par:

$$S = [\textstyle\sum_m (\Delta u_m)^2]^{1/2}.$$

Le principal résultat de ce papier est le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit $(u_m)_{m \in N^2}$ une martingale pour une filtration réqulière, nulle sur les axes, et soit $p \in]0, \infty[$. Il existe une constante C ne dépendant que de p et R (constante de régularité) telle que*: $E[S^p] \leq CE[u^{*p}]$.

Ce théorème est connu pour toute martingale dans le cas $p > 1$, comme je l'ai dit plus haut. Pour $p \in]0, 1]$, on le démontre en multipliant par λ^{p-1} puis en intégrant l'inégalité de la Proposition 1:

PROPOSITION 1. *Soit $(u_m)_{m \in N^2}$ une martingale pour une filtration régulière, nulle sur les axes. Il existe une constante C ne dépendant que de R telle que*:

$$P[S > \lambda] \leq C(P[u^* > \lambda] + \frac{1}{\lambda^2} E[u^{*2}; u^* \leq \lambda]).$$

La démonstration de cette proposition fait l'objet des Paragraphes 1, 2, 3.

Dans le Paragraphe 4, je démontrerai le théorème local correspondant au théorème 1:

THÉORÈME 2. *Soit $(u_m)_{m \in N_2}$ une martingale pour une filtration régulière, S est presque sûrement fini là où u^* est fini.*

1. Démonstration de la proposition: première étape. On peut toujours supposer que la martingale u_m est arrêtée, c'est-à-dire qu'il existe un double indice $M = (M_1, M_2)$ tel que $\Delta u_m = 0$ sauf si $m < M$ (c'est-à-dire $m_1 < M_1$ et $m_2 < M_2$).

Soit alors λ un nombre positif et $E = \{u^* \leq \lambda\}$. Considérons la martingale $w_m = E[1_E/\mathscr{F}_m]$. Soit $F = \{(1 - w)^* \leq 1/2R^2\}$ et v_m la martingale $v_m = E[1_F/\mathscr{F}_m]$.

Considérons maintenant $G = \{(1 - v)^* \leq ½\}$.

REMARQUE 1. Si $E[1_G/\mathscr{F}_{\underline{\bar{m}}}]$ est non nul, alors $v_m \geqslant 1/2R^2$. En effet:

$$½E[1_G/\mathscr{F}_{\underline{\bar{m}}}] \geq E[(1 - v_{\underline{\bar{m}}})1_G/\mathscr{F}_{\underline{\bar{m}}}] = (1 - v_{\underline{\bar{m}}})E[1_G/\mathscr{F}_{\underline{\bar{m}}}].$$

Et donc si $E[1_G/\mathscr{F}_{\underline{\bar{m}}}]$ est non nul, alors $(1 - v_{\underline{\bar{m}}}) \leq ½$. D'où le résultat d'après la régularité de la filtration.

REMARQUE 2. Si $v_m > 0$, alors $|u_m| \leq \lambda$, $|u_{\bar{m}}| \leq \lambda$, $|u_{\underline{m}}| \leq \lambda$, $|u_{\underline{\bar{m}}}| \leq \lambda$. En effet, pour les mêmes raisons que dans la Remarque 1, si v_m est non nul, $(1 - w_m)$ est inférieur à $1/2R^2$, donc $(1 - w_{\bar{m}})$ et $(1 - w_{\underline{m}})$ sont inférieurs à $1/2R$ et $(1 - w_{\underline{\bar{m}}})$ à ½ d'après la régularité. w_m, $w_{\bar{m}}$, $w_{\underline{m}}$ et $w_{\underline{\bar{m}}}$ sont donc non nuls, ce qui implique le résultat (même argument que dans la Remarque 1).

REMARQUE 3. $P[G^c] \leq C \cdot P[u^* > \lambda]$ (C constante ne dépendant que de R); G^c désigne ici le complémentaire de G. En effet en utilisant l'inégalité de Doob (valable aussi à deux indices)

$$P[G^c] = P[(1 - v)^* \geq ½] \leq 4E[(1 - v^*)^2] \leq 4CE[(1 - v_M)^2]$$

c'est-à-dire $P[G^c] \leq 4CP[F^c]$. De même $P[F^c] \leq 4R^4CP[E^c]$. D'où le résultat.

Revenons à la démonstration de la proposition:

$$P[S > \lambda] = P[S > \lambda;\, G] + P[S > \lambda;\, G^c]$$
$$\leq \frac{1}{\lambda^2} E[S^2;\, G] + C \cdot P[u^* > \lambda] \qquad \text{(Remarque 3).}$$

Mais

$$E[S^2;\, G] = E[\textstyle\sum_{m<M} (\Delta u_m)^2 \cdot 1_G] = E[\sum_{m<M} (\Delta \mu_m)^2 E[1_G/\mathscr{F}_{\overline{\underline{m}}}]]$$
$$\leq (2R^2)^4 E[\textstyle\sum_{m<M} (\Delta u_m)^2 v_m^4] \qquad \text{(Remarque 1).}$$

Pour démontrer la proposition, il suffit donc de majorer $I = E[\sum (\Delta u_m)^2 v_m^4]$ par une expression du type $C(\lambda^2 P[u^* > \lambda] + E[u^{*2};\, u^* \leq \lambda])$.

2. Une majoration préliminaire. Dans ce qui suit, pour abréger les écritures on notera $\tilde{E}[\cdot]$ au lieu de $\sum_{0 \leq m < M} E[\cdot]$, et on notera C toutes les constantes ne dépendant que de R.

Dans ce paragraphe, nous allons majorer:

$$K = \tilde{E}[(\Delta_1 u_m)^2 (\Delta_2 u_m)^2 v_m^4].$$

Commençons par une série de lemmes:

LEMME 1. *Sur l'événement* $\{v_m > 0\}$ $\Delta_1 u_m^4$ *a même espérance conditionnelle par rapport à* $\mathscr{F}_m$ *que* $(\Delta_1 u_m)^2[6u_m^2 + 4u_m \Delta_1 u_m + (\Delta_1 u_m)^2]$ *et* Δu_m^4 *a même espérance conditionnelle par rapport à* $\mathscr{F}_m$ *que*:

$$6(\Delta_1 u_m)^2(\Delta_2 u_m)^2 + 12(\Delta u_m)(\Delta_1 u_m)(\Delta_2 u_m)(u_{\underline{m}} + u_{\bar{m}})$$
$$+ (\Delta u_m)^2[6(u_{\bar{m}} + u_{\underline{m}} - u_m)^2 + 4(u_{\underline{m}} + u_{\bar{m}} - u_m)\Delta u_m + (\Delta u_m)^2].$$

Ce lemme s'obtient par un calcul simple après avoir exprimé $u_{\bar{m}}$, $u_{\bar{m}}$ et $u_{\underline{m}}$ en fonction de u_m, $\Delta_1 u_m$, $\Delta_2 u_m$, Δu_m (on utilise plusieurs fois l'indépendance conditionnelle de $\mathscr{F}_{\bar{m}}$ et $\mathscr{F}_{\underline{m}}$ par rapport à $\mathscr{F}_m$).

LEMME 2. $\tilde{E}[(\Delta v_m)^2] \leq CP[u^* > \lambda]$ *et* $\tilde{E}[(\Delta_1 v_m)^2(\Delta_2 v_m)^2] \leq CP[u^* > \lambda]$.

DÉMONSTRATION. Posons $a_m = 1 - v_m$. Alors:

- $\tilde{E}[(\Delta v_m)^2] = \tilde{E}[(\Delta a_m)^2] = \tilde{E}[\Delta a_m^2] = E[a_M^2 - a_{M_1,0}^2 - a_{0,M_2}^2 + a_{0,0}^2]$
$$\leq 2E[a_M^2] = 2P[F^c] \leq 2CP[u^* > \lambda]$$

d'après le Paragraphe 1, Remarque 3.

On a utilisé ici: $E[(\Delta a_m)^2/\mathscr{F}_m] = E[\Delta a_m^2/\mathscr{F}_m]$ (égalité valable pour toute martingale. Même démonstration que pour le Lemme 1).

- Pour le deuxième point, utilisons le Lemme 1 en majorant v_m, $v_{\bar{m}}$ etc $\cdots$ par 1; il vient:

$$6\tilde{E}[(\Delta_1 v_m)^2(\Delta_2 v_m)^2] = 6\tilde{E}[(\Delta_1 a_m)^2(\Delta_2 a_m)^2]$$
$$\leq \tilde{E}[\Delta a_m^4] + 24\tilde{E}[|\Delta a_m|\,|\Delta_1 a_m|\,|\Delta_2 a_m|] + 60\tilde{E}[(\Delta a_m)^2].$$

Comme dans le premier point $\tilde{E}[\Delta a_m^4]$ se majore par $2E[a_M^4]$ puis par $2CP[u^* > \lambda]$. Le terme $\tilde{E}[(\Delta a_m)^2]$ est majoré par $2CP[u^* > \lambda]$. Quant au terme $\tilde{E}[|\Delta a_m|\,|\Delta_1 a_m|\,|\Delta_2 a_m|]$, par Schwarz, il se majore par:

$$(\tilde{E}[(\Delta_1 a_m)^2(\Delta_2 a_m)^2])^{1/2}(\tilde{E}[(\Delta a_m)^2])^{1/2} \leq C(\tilde{E}[(\Delta_1 a_m)^2(\Delta_2 a_m)^2])^{1/2}(P[u^* > \lambda])^{1/2}.$$

Le résultat découle alors du lemme élémentaire suivant:

LEMME 3. *Soient α et β positifs. Alors*

$$X \leq \alpha + \beta X^{1/2} \Rightarrow X \leq 2(\alpha + \beta^2).$$

Nous pouvons maintenant majorer K. D'après le Lemme 1, et la Remarque 2 du Paragraphe 1:

$$K = \tilde{E}[(\Delta_1 u_m)^2(\Delta_2 u_m)^2 v_m^4] \leq C\tilde{E}[(\Delta u_m^4)v_m^4] + C\lambda\tilde{E}[|\Delta u_m||\Delta_1 u_m||\Delta_2 u_m| v_m^4] + C\lambda^2\tilde{E}[(\Delta u_m)^2 v_m^4].$$

• Le dernier terme est égal à $C\lambda^2 I$.
• Le second est majoré par: $C\lambda I^{1/2}K^{1/2}$ (Inégalité de Schwarz).
• Il ne restequ'à majorer $\tilde{E}[(\Delta u_m^4)v_m^4]$.

Ecrivons $\tilde{E}[(\Delta u_m^4)v_m^4] = (\alpha) + (\beta) + (\beta') + (\gamma)$ avec

$$(\alpha) = \tilde{E}[(\Delta u_m^4)(\Delta v_m^4)]$$

$$(\beta) = \tilde{E}[(\Delta u_m^4)v_{\underline{m}}^4], \qquad (\beta') = \tilde{E}[(\Delta u_m^4)v_{\bar{m}}^4]$$

$$(\gamma) = -\tilde{E}[(\Delta u_m^4)v_{\underline{\bar{m}}}^4].$$

Majoration de (α): utilisons l'identité:

$$\Delta u_m^2 = (u_{\underline{\bar{m}}} + u_{\bar{m}} + u_{\underline{m}} - u_m)\Delta u_m + 2(\Delta_1 u_m)(\Delta_2 u_m).$$

D'où:

$$\Delta u_m^4 = (u_{\underline{\bar{m}}}^2 + u_{\bar{m}}^2 + u_{\underline{m}}^2 - u_m^2)\Delta u_m^2 + 2(u_{\underline{m}} + u_m)(u_{\bar{m}} + u_m)(\Delta_1 u_m)(\Delta_2 u_m).$$

En utilisant la Remarque 2 du Paragraphe 1 et la régularité de $(\mathscr{F}_m)$ (qui implique $v_{\underline{\bar{m}}} \leq R\max(v_{\underline{m}}, v_{\bar{m}}) \leq R^2 v_m$). Il vient

$$|\Delta u_m^4||\Delta v_m^4| \leq C[\lambda^3|\Delta u_m| + \lambda^2|\Delta_1 u_m||\Delta_2 u_m|][v_m^3|\Delta v_m| + v_m^2|\Delta_1 v_m||\Delta_2 v_m|].$$

Et donc en utilisant l'inégalité de Schwarz et le Lemma 2:

$$(\alpha) \leq C[\lambda^3 I^{1/2}(P[u^* > \lambda])^{1/2} + \lambda^2 K^{1/2}(P[u^* > \lambda])^{1/2}]$$
$$\leq C[\lambda^2 K^{1/2}(P[u^* > \lambda])^{1/2} + \lambda^2 I + \lambda^4 P[u^* > \lambda]].$$

Majoration de (β) (et (β')): comme $\Delta u_m^4 = \Delta_2 u_{\underline{m}}^4 - \Delta_2 u_m^4$ on a

$$(\Delta u_m^4)v_{\underline{m}}^4 = (\Delta_2 u_{\underline{m}}^4)v_{\underline{m}}^4 - (\Delta_2 u_m^4)v_m^4 - (\Delta_2 u_m^4)(\Delta_1 v_m^4).$$

$\tilde{E}[(\Delta_2 u_m^4)(\Delta_1 v_m^4)]$ est positif car:

$$E[(\Delta_2 u_m^4)(\Delta_1 v_m^4)/\mathscr{F}_m] = E[\Delta_2 u_m^4/\mathscr{F}_m]E[\Delta_2 v_m^4/\mathscr{F}_m] \geq 0$$

car u^4 et v^4 sont des sous-martingales. Donc

$$(\beta) \leq \tilde{E}[(\Delta_2 u_{\underline{m}}^4)v_{\underline{m}}^4 - (\Delta_2 u_m^4)v_m^4].$$

En effectuant la sommation sur le premier indice, il vient:

$$(\beta) \leq \textstyle\sum_{m_2=0}^{M_2-1} E[(u_{M_1,m_2+1}^4 - u_{M_1,m_2}^4)v_{M_1,m_2}^4].$$

Omettons maintenant le premier indice M_1: comme

$$E[u_{m_2+1}^4 - u_{m_2}^4/\mathscr{F}_{m_2}] = E[(u_{m_2+1} - u_{m_2})^2[6u_{m_2}^2 + (u_{m_2+1} - u_{m_2})^2 + 4u_{m_2}[u_{m_2+1} - u_{m_2}]]/\mathscr{F}_m]$$

(d'après le Lemme 1), il vient en utilisant la Remarque 2, Paragraphe 1:

$$(\beta) \leq C\textstyle\sum_{m_2=0}^{M_2-1}\lambda^2 E[(u_{m_2+1} - u_{m_2})^2 v_{m_2}^4] \leq C\lambda^2\sum_{m_2=0}^{M_2-1} E[(u_{m_2+1} - u_{m_2})^2 v_{m_2}^2]$$
$$= C\lambda^2 I'$$
$$I' = \textstyle\sum E[(u_{m_2+1}^2 - u_{m_2}^2)v_{m_2+1}^2] - \sum E[(u_{m_2+1}^2 - u_{m_2}^2)(v_{m_2+1}^2 - v_{m_2}^2)]$$

(car $E[(u_{m_2+1} - u_{m_2})^2/\mathscr{F}_m] = E[u^2_{m_2+1} - u^2_{m_2}/\mathscr{F}_{m_2}]$). La valeur absolue du deuxième terme est majorée par $C\lambda(\sum E[(u_{m_2+1} - u_{m_2})^2 v^2_{m_2}])^{1/2} (\sum E[(v_{m_2+1} - v_m)^2])^{1/2}$ et donc par $C\lambda I'^{1/2}(P[u^* > \lambda])^{1/2}$.

(Mêmes arguments en plus simple que dans la majoration de (α).)

Quant au premier terme de I', par une transformation d'Abel il vaut:

$$E[u^2_M v^2_M] - \sum_{m_2=0}^{M_2-1} E[u^2_{m_2}(v^2_{m_2+1} - v^2_{m_2})] \leq E[u^2_M v^2_M] \ (car\ E[v^2_{m_2+1} - v^2_{m_2}/\mathscr{F}_{m_2}] \geq 0)$$
$$= E[u^2_M \cdot 1_F] \leq E[u^{*2} \cdot 1_E] = E[u^{*2};\ u^* \leq \lambda].$$

D'où $I' \leq E[u^{*2};\ u^* \leq \lambda] + CI'^{1/2}(\lambda^2 P[u^* > \lambda])^{1/2}$. Donc $I' \leq C[E[u^{*2};\ u^* \leq \lambda] + \lambda^2 P[u^* > \lambda]$ d'après le Lemme 3 donc $(\beta) \leq C[\lambda^2 E[u^{*2};\ u^* \leq \lambda] + \lambda^4 P[u^* > \lambda]]$.

Majoration de (γ): par une transformation d'Abel il vient:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_2' + \gamma_3 \quad \text{avec}$$
$$\gamma_1 = -\tilde{E}[u^4_m \cdot \Delta v^4_m]$$
$$\gamma_2 = +\sum_{m_1=0}^{M_1-1} E[u^4_{m_1,M_2}(v^4_{m_1+1,M_2} - v^4_{m_1,M_2})]$$
$$\gamma_2' = +\sum_{m_2=0}^{M_2-1} E[u^4_{M_1,m_2}(v^4_{M_1,m_2+1} - v^4_{M_1,m_2})]$$
$$\gamma_3 = -E[u^4_M v^4_M].$$

Comme γ_3 est négatif: $(\gamma) \leq |\gamma_1| + |\gamma_2| + |\gamma_2'|$.

D'après le Lemme 1:

$$|\gamma_1| = |\tilde{E}[u^4_m \Delta v^4_m]| \leq C\lambda^4[\tilde{E}[(\Delta_1 v_m)^2(\Delta_2 v_m)^2] + \tilde{E}[|\Delta v_m||\Delta_1 v_m||\Delta_2 v_m|] + \tilde{E}[|\Delta v_m|^2]] \leq C\lambda^4 P[u^* > \lambda]$$

(d'après le Lemme 2 et l'inégalité de Schwarz). Quant au terme γ_2, en utilisant l'inégalité:

$$0 \leq E[(v^4_{m_1+1} - v^4_{m_1})/\mathscr{F}_{m_1}]$$
$$= E[(v_{m_1+1} - v_{m_1})^2[6v^2_{m_1} + (v_{m_1+1} - v_{m_1})^2 + 4v_{m_1}(v_{m_1+1} - v_{m_1})]/\mathscr{F}_{m_1}]$$
$$\leq C \cdot E[(v_{m_1+1} - v_{m_1})^2/\mathscr{F}_m] = C \cdot E[v^2_{m_1+1} - v^2_{m_1}/\mathscr{F}_m] \quad \text{(on a omis l'indice } M_2\text{)}$$

il vient:

$$|(\gamma_2)| \leq C\lambda^4 \sum_{m_1=0}^{M_1-1} E[v^2_{m_1+1,M_2} - v^2_{m_1,M_2}] \leq C\lambda^4 P[u^* > \lambda].$$

D'où: $(\gamma) \leq C\lambda^4 P[u^* > \lambda]$.

RÉCAPITULATIF. On obtient donc pour K la majoration:

$$K \leq C[\lambda^2 I + \lambda I^{1/2} K^{1/2} + \lambda^2 (P[u^* > \lambda)^{1/2} K^{1/2} + \lambda^4 P[u^* > \lambda] + \lambda^2 E[u^{*2};\ u^* \leq \lambda]].$$

D'où (d'après le Lemme 3):

$$K \leq C[\lambda^2 I + \lambda^4 P[u^* > \lambda] + \lambda^2 E[u^{*2};\ u^* \leq \lambda]].$$

3. Majoration de I. Le terme $I = \tilde{E}[(\Delta u^2_m) v^4_m]$ se traite comme le terme $\tilde{E}[(\Delta u^4_m) v^4_m]$ de la majoration de K. A quelques simplifications près, les calculs sont identiques. On obtient alors ((α), (β), (γ) désigent les termes analogues à ceux de la décomposition du premier terme de K):

$$(\alpha) \leq C[\lambda I^{1/2}(P[u^* > \lambda])^{1/2} + K^{1/2}(P[u^* > \lambda])^{1/2}]$$
$$(\beta) \leq C[E[u^{*2};\ u^* \leq \lambda] + \lambda^2 P[u^* > \lambda]]$$
$$(\gamma) \leq C\lambda^2 P[u^* > \lambda].$$

Si l'on tient compte de la majoration de K obtenue dans II, on obtient:

$$I \leq C[\lambda^2 P[u^* > \lambda] + E[u^{*2}; u^* \leq \lambda] + \lambda I^{1/2}(P[u^* > \lambda])^{1/2}].$$

Et donc d'aprè le Lemme 3:

$$I \leq C[\lambda^2 P[u^* > \lambda] + E[u^{*2}; u^* \leq \lambda]].$$

D'après ce qu'on a dit au Paragraphe 1, ceci achève la démonstration de la proposition et du Théorème 1.

REMARQUE. La majoration de I obtenue ici permet d'obtenir:

$$K \leq C[\lambda^4 P[u^* > \lambda] + \lambda^2 E[u^{*2}; u^* \leq \lambda]].$$

Et donc si l'on note $T = [\sum (\Delta_1 u_m)^2 (\Delta_2 u_m)^2]^{1/4}$,

$$P[T > \lambda; G] \leq \frac{1}{\lambda^4} E[T^4; G] \leq CK.$$

D'où $P[T > \lambda] \leq C(P[u^* > \lambda] + (1/\lambda^2) E[u^{*2}; u^* \leq \lambda])$. Cette inégalité permet donc d'obtenir:

$$E[T^p] \leq CE[u^{*p}] \quad \text{pour} \quad 0 < p < 2.$$

4. Le théorème local. Pour démontrer le Théorème (2), il nous suffit de modifier légèrement la définition de F et G (Paragraphe 1). On ne suppose évidemment plus la martingale arrêtée. Soit F_M l'événement $\{\forall m \geq M, w_m \geq 1/2R^2\}$ et $G_{M,N}$ l'événement $\{\forall m \geq N, v_m \geq ½\}$, $(N \geq M)$. Comme w_m tend vers 1_E presque sûrement, en choisissant M assez grand, on peut rendre $P(E - F_M)$ arbitrairement petite et de même, on peut rendre $P[E - G_{M,N}]$ arbitrairement petite par un choix convenable de (M, N). Il suffit donc de montrer que S est finie sur $G_{M,N}$. Mais la démonstration des Paragraphes 2–3 s'applique à la martingale

$$\tilde{u}_m = u_N - u_{N_1, m_2} - u_{m_1, N_2} + u_m \qquad (m \geq N).$$

Ce qui montre donc que $\sum_{m \geq N} (\Delta u)_m^2$ est finie sur $G_{M,N}$.

D'autre part,

$$S^2 - \sum_{m \geq N} (\Delta u)_m^2 = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \left(\sum_{m_2=0}^{+\infty} (\Delta u)_{m_1,m_2}^2\right) + \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} (\Delta u)_{m_1,m_2}^2\right] - \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} (\Delta u)_{m_1,m_2}^2 .$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\sum_{m_1=0}^{N_1} (\sum_{m_2=0}^{+\infty} (\Delta u)_{m_1 m_2}^2)$ est fini sur G_{MN}. Mais $\sum_{m_2=0}^{+\infty} (\Delta u)_{m_1,m_2}^2$ est fini presque sûrement sur E (donc sur $G_{M,N}$) car c'est la valeur terminale du processus croissant associé à la martingale à un indice m_2:$\alpha_{m_2} = (u_{m_1+1,m_2} - u_{m_1,m_2})$ et que $\alpha^* \leq 2u^*$. Ceci achève donc la démonstration du Théorème 2.

REFERENCES

[1] BERNARD, A. (1979). Espaces H_1 de martingales à deux indices. Dualité avec les martingales de type "BMO." *Bull. Sci. Math.* **103** 297–303.

[2] GUNDY, R. F. (1978). *Ecole d'Été de Probabilities de Saint Flour VIII. Lecture Notes* **774**.

[3] GUNDY, R. F. et STEIN, E. M. (1979). H^p theory for the polydisc. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **76** 1026–1029.

[4] MALLIAVIN, M. P. et MALLIAVIN, P. (1977). Intégrales de Lusin-Calderon pour les fonctions biharmoniques. *Bull. Sci. Math.* **101** 357–384.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES—INSTITUT FOURIER
DÉPENDANT DE L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE
ASSOCIÉ AU C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HÈRES (FRANCE)