

UN THEOREME ERGODIQUE PRESQUE SOUS-ADDITIF

BY YVES DERRIENNIC

Université de Bretagne Occidentale

The two following results are proved. Given $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ where T is a measurable transformation preserving the probability measure μ , given a sequence f_n of integrable functions such that

$$\int (f_{n+k} - f_n - T^n f_k)^+ d\mu \leq c_k \text{ with } \lim_k \frac{1}{k} c_k = 0,$$

then $(1/n) f_n$ is converging in L^1 -norm. If, furthermore, $f_{n+k} - f_n - T^n f_k \leq T^n h_k$ with h_k a sequence of positive functions whose integrals are bounded, then $(1/n) f_n$ is also converging a.e. From this extension of Kingman's subadditive ergodic theorem, the Shannon-McMillan-Breiman theorem follows at once.

1. Introduction. Le théorème ergodique sous-additif de Kingman est connu pour ses nombreuses applications. Cependant dans diverses situations où pourtant la propriété de sous-additivité joue un rôle essentiel, ce théorème ne suffit pas. Par exemple le théorème de McMillan-Breiman ne résulte pas du théorème de Kingman (voir le paragraphe 4).

Le but du présent travail est de donner, sous une hypothèse de "presque sous-additivité", un théorème ergodique qui englobe le théorème de Kingman et qui soit assez fort pour avoir comme corollaire le théorème de McMillan-Breiman (ainsi on obtient une démonstration de ce théorème qui n'utilise pas le théorème de convergence des martingales; une condition de presque sous-additivité plus restrictive a déjà été utilisée pour établir la convergence en moyenne de l'information pour l'action d'un groupe discret général (11)). Le théorème ergodique presque sous-additif obtenu, devrait aussi avoir d'autres applications, en particulier dans le domaine de la percolation où déjà divers auteurs ont été amenés à utiliser des arguments du même type ((1), (5), (8)).

Dans toute la suite on considère un système dynamique mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ où T est donc une transformation mesurable laissant invariante la mesure de probabilité μ .

On note $f \circ T = Tf$. Le théorème de Kingman dit que la suite $(1/n) f_n$ converge $\mu - p.p$ et en norme L^1 si la suite de fonctions intégrables f_n vérifie les deux conditions suivantes:

- a) sous-additivité i.e. $f_{n+k} \leq f_n + T^n f_k$ $\mu.p.p.$ pour tout n et k entiers
- b) intégrabilité bornée en moyenne i.e.

$$\inf_n \frac{1}{n} \int f_n d\mu > -\infty.$$

La limite est alors une fonction invariante i.e. solution de l'équation $f = Tf$ ((9), (10), (2)). La démonstration, qui s'appuie sur le théorème de Birkhoff, utilise le résultat d'analyse élémentaire suivant: si la suite réelle a_n est sous-additive i.e. $a_{n+k} \leq a_n + a_k$ pour tout n et k entiers, alors $\lim_n (1/n) a_n = \inf_n (1/n) a_n$. Pour éclairer ce qui va suivre il est utile de remarquer déjà que si la suite a_n n'est pas sous-additive, mais vérifie seulement $a_{n+k} \leq a_n + a_k + c$ où c est une constante positive, alors la suite $(1/n) a_n$ converge encore mais sa limite est en général différente de $\inf_n (1/n) a_n$. Ceci résulte de la sous-additivité de la suite $a'_n = a_n + c$. Plus généralement la convergence de $(1/n) a_n$ a lieu sous l'hypothèse de presque sous-additivité $a_{n+k} \leq a_n + a_k + c_k$ où c_k est une suite positive telle que $\lim_k (1/k) c_k = 0$. Suivant la méthode classique il suffit d'observer que l'hypothèse entraîne:

$$a_m \leq \ell a_n + a_r + (\ell + 1) c_n$$

Received July 1982.

AMS 1980 subject classifications. Primary 28D05; secondary 60G10.

Key words and phrases. Ergodic theorem, a.e. convergence, L^1 -convergence, subadditive sequence, almost subadditive sequence, entropy.

pour un entier m s'écrivant $m = n\ell + r$ avec $0 < r < n$, ce qui donne

$$\lim_m \sup \frac{1}{m} a_m \leq \frac{1}{n} a_n + \frac{1}{n} c_n.$$

Une condition de presque sous-additivité d'une autre forme a été traitée dans (6), (7).

Dans le paragraphe 2 on traite de la convergence en moyenne. Dans le paragraphe 3 on traite de la convergence presque partout, ce qui est le plus difficile. Dans le paragraphe 4 on montre que le théorème ergodique presque sous-additif obtenu a pour corollaire le théorème de McMillan-Breiman. L'extension au cas multidimensionnel, qui est possible, fera l'objet d'un article ultérieur.

2. Théorème presque sous-additif en moyenne. Dans ce paragraphe on démontre le théorème suivant en adaptant un argument donné dans (3). On note h^+ la partie positive de la fonction h .

THÉORÈME 1. Soit f_n une suite de fonctions intégrables vérifiant les deux conditions:

a) pour tout n et k entiers

$$\int (f_{n+k} - f_n - T^n f_k)^+ d\mu \leq c_k$$

où c_k est une suite réelle positive telle que $\lim(1/k)c_k = 0$.

b) $\inf_n (1/n) \int f_n d\mu > -\infty$.

Alors la suite $(1/n)f_n$ converge en norme dans $L^1(\mu)$ vers une fonction \bar{f} invariante sous T qui vérifie:

$$\bar{f} = \lim_k \frac{1}{k} (\lim_j \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} T^{ik} f_k).$$

DÉMONSTRATION. Posons $\gamma_n = \int f_n d\mu$ et observons d'après a) que $\gamma_{n+k} \leq \gamma_n + \gamma_k + c_k$. D'après la remarque faite en introduction $\lim(1/n)\gamma_n = \gamma$ et d'après b) γ est fini.

Fixons l'entier n . Si $m = n\ell + r$ avec $0 \leq r < n$, par ℓ applications de a) et grâce à l'inégalité $(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)^+ \leq \alpha_1^+ + \dots + \alpha_k^+$ on obtient:

$$\int (f_m - \sum_{j=0}^{\ell-1} T^{nj} f_n - T^{n\ell} f_r)^+ d\mu \leq (\ell-1)c_n + c_r$$

d'où

$$\int (f_m - \sum_{j=0}^{\ell-1} T^{nj} f_n)^+ d\mu \leq (\ell-1)c_n + c_r + \|f_r\|.$$

Le théorème de Birkhoff appliqué à T^n donne $\lim_{\ell} (1/\ell) \sum_{j=0}^{\ell-1} T^{nj} f_n = \bar{f}_n$ p.p et dans L^1 avec \bar{f}_n invariante et vérifiant

$\int f_n d\mu = \int \bar{f}_n d\mu$. Comme l'inégalité précédente donne

$$\int \left(\frac{1}{m} f_m - \frac{1}{n} \bar{f}_n \right)^+ d\mu \leq \frac{(\ell-1)}{m} c_n + \frac{c_r + \|f_r\|}{m} + \int \left(\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\ell-1} T^{nj} f_n - \frac{1}{n} \bar{f}_n \right)^+ d\mu$$

on trouve

$$\lim \sup_m \int \left(\frac{1}{m} f_m - \frac{1}{n} \bar{f}_n \right)^+ d\mu \leq \frac{c_n}{n},$$

et ceci pour tout n .

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Pour n assez grand on a $|(1/n)\gamma_n - \gamma| < \varepsilon$ et $c_n/n < \varepsilon$. Pour un tel n et pour m assez grand on a alors

$$\int \left(\frac{1}{m} f_m - \frac{1}{n} \bar{f}_n \right)^+ d\mu \leq \frac{c_n}{n} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

et $|(1/m)\gamma_m - \gamma| < \varepsilon$. En appliquant l'inégalité $\|g\| \leq 2 \int g^+ d\mu + |\int g d\mu|$ on trouve

$$\left| \left| \frac{1}{m} f_m - \frac{1}{n} \bar{f}_n \right| \right| \leq 4\varepsilon + \left| \frac{1}{m} \gamma_m - \frac{1}{n} \gamma_n \right| \leq 6\varepsilon.$$

Cette inégalité montre que les deux suites $(1/m)f_m$ et $(1/n)\bar{f}_n$ sont des suites de Cauchy dans L^1 . Elles sont donc convergentes et ont même limite dans L^1 . Cela prouve le théorème.

On peut remarquer qu'en fait l'argument précédent reste valable si T est une contraction positive de L^1 possédant un élément invariant strictement positif.

3. Theoreme presque sous-additif ponctuel. Il n'est pas difficile de construire sur un intervalle une suite de fonctions intégrables f_n telle que

$$\int (f_{n+k} - f_n - f_k)^+ \leq 1 \quad \text{pour tout } n \text{ et } k, \text{ et vérifiant:}$$

$$\lim_n \frac{1}{n} \|f_n\| = 0, \quad \lim \sup_n \frac{1}{n} f_n = +\infty \text{ p.p.,}$$

$\lim_n \inf (1/n)f_n = -\infty$ p.p. Sous les hypothèses du Théorème 1 il n'est donc pas possible d'obtenir un résultat de convergence ponctuelle. Il faut faire une hypothèse qui porte sur les fonctions $(f_{n+k} - f_n - T^n f_k)^+$ elles-mêmes et non plus seulement sur leurs intégrales. S'il existe une fonction h positive et intégrable telle que $f_{n+k} - f_n - T^n f_k \leq T^n h$ pour tout n et k , alors la convergence presque partout de $(1/n)f_n$ se déduit immédiatement de la sous-additivité de la suite $f_n = f_n + h$ et du théorème de Kingman. Cela vaut en particulier si les fonctions $f_{n+k} - f_n - T^n f_k$ sont majorées dans leur ensemble par une constante. Cette remarque très simple s'est révélée utile (voir par exemple (1), page 589). On va choisir une hypothèse de même type, mais généralisée, qui sera justifiée par l'application donnée dans le paragraphe suivant. Comme dans le théorème de Kingman l'étude de la limite supérieure est plus facile que celle de la limite inférieure. Aussi on les traite séparément.

THÉORÈME 2. Soit f_n une suite de fonctions intégrables vérifiant les deux conditions:

a) Pour tout n et k entiers

$$f_{n+k} - f_n - T^n f_k \leq T^n h_k$$

où h_k est une suite de fonctions positives telle que $\lim(1/k) \int h_k d\mu = 0$.

b) $\inf_n (1/n) \int f_n d\mu > -\infty$

Alors la suite $(1/n) f_n$ converge en norme dans $L^1(\mu)$ vers \bar{f} et $\bar{f} = \lim \sup_n (1/n) f_n$ p.p.

DÉMONSTRATION. Le Théorème 1 donne la convergence en norme. Pour n fixé et $m = n.\ell + r$ avec $0 \leq r < n$ on obtient par applications répétées de a):

$$f_m \leq \sum_{j=1}^{\ell-1} T^{nj} f_n + T^{n\ell} f_r + \sum_{j=1}^{\ell-1} T^{nj} h_n.$$

Comme r est borné $\lim_{\ell} (1/\ell) T^{n\ell} f_r = 0$ p.p., d'après un argument classique. Le théorème de Birkhoff appliqué à T^n permet donc d'écrire

$$\lim \sup_m \frac{1}{m} f_m \leq \frac{1}{n} \bar{f}_n + \frac{1}{n} \bar{h}_n \text{ p.p.}$$

où $\bar{h}_n = \lim_{\ell} (1/\ell) \sum_{j=0}^{\ell-1} T^{nj} h_n$ vérifie $\int \bar{h}_n d\mu = \int h_n d\mu$.

L'hypothèse faite sur les h_n donne alors

$$\int \limsup_m \frac{1}{m} f_m d\mu \leq \lim_n \frac{1}{n} \int \bar{f}_n d\mu = \int \bar{f} d\mu.$$

D'après le lemme de Fatou, on obtient le résultat cherché.

Pour étudier la limite inférieure on cherche une décomposition d'une suite presque sous-additive analogue à celle donnée par Kingman pour les suites sous-additives ((9), (10)). Pour cela on suppose que la suite c_k apparaissant dans l'hypothèse a du Théorème 1, c'est à dire la suite qui mesure le défaut de sous-additivité, est une suite bornée. Le lemme suivant est adapté d'un calcul donné dans (9) (voir aussi (2)).

LEMME. Posons $g_n = (1/n) \sum_{i=1}^n (f_i - Tf_{i-1})$.

Si f_n est une suite de fonctions intégrables vérifiant

$$\int (f_{n+k} - f_n - T^n f_k)^+ d\mu \leq C$$

pour tout n et k , alors il existe une suite réelle positive K_n telle que, quel que soit $m > n$:

$$\int (\sum_{i=0}^{n-1} T^i g_m - f_n)^+ d\mu \leq C + \frac{K_n}{m}.$$

Si f_n vérifie $f_{n+k} - f_n - T^n f_k \leq T^n h_k$ μ p.p. où h_k est une suite de fonctions positives, alors il existe une suite $\varphi_n \in L^1_+$ telle que, quel que soit $m > n$ on ait

$$\sum_{i=0}^{n-1} T^i g_m \leq f_n + T^n \left(\frac{1}{m} \sum_{r=1}^{m-1} h_r \right) + \frac{1}{m} \varphi_n.$$

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{aligned} mg_m &= (I - T) \sum_{r=1}^{m-1} f_r + f_m; \\ m \sum_{i=0}^{n-1} T^i g_m &= (I - T^n) (\sum_{r=1}^{m-1} f_r) + \sum_{i=0}^{n-1} T^i f_m \\ &= \sum_{r=1}^n f_r + \sum_{r=1}^{m-n-1} (f_{r+n} - T^n f_r) + \sum_{i=0}^{n-1} T^i (f_m - T^{n-i} f_{m-n+i}). \end{aligned}$$

Sous la première hypothèse on trouve donc

$$\int m (\sum_{i=0}^{n-1} T^i g_m - f_n)^+ d\mu \leq (m-1)C + \left[(n+1) \|f_n\| + 2 \int (\sum_{r=1}^n f_r)^+ d\mu \right].$$

Il suffit alors de poser pour K_n le terme figurant sous le crochet, qui est indépendant de m , pour obtenir le résultat.

Sous la seconde hypothèse, on a

$$f_{n+r} - T^n f_r \leq f_n + T^n h_r$$

et

$$f_m - T^{n-i} f_{m-n+i} \leq f_{n-i} + T^{n-i} h_{m-n+i}$$

d'où

$$m \sum_{i=0}^{n-1} T^i g_m \leq m f_n + T^n (\sum_{r=1}^{m-1} h_r) + [\sum_{r=1}^n f_r - (n+1) f_n + \sum_{i=0}^{n-1} T^i f_{n-i}].$$

Il suffit alors de poser pour φ_n la partie positive de la fonction figurant sous le crochet, qui est indépendante de m , pour arriver au résultat.

THÉORÈME 3. Supposons la transformation T inversible. Soit f_n une suite de fonctions

intégrables vérifiant les deux conditions:

a) pour tout n et k entiers

$$\int (f_{n+k} - f_n - T^n f_k)^+ d\mu \leq C$$

b) $\inf_n (1/n) \int f_n d\mu > -\infty$.

Alors il existe $\lambda \in L^1$ telle que pour tout n

$$\int (\sum_{i=0}^{n-1} T^i \lambda - f_n)^+ d\mu \leq C$$

et

$$\int \lambda d\mu = \lim_n \frac{1}{n} \int f_n d\mu.$$

Si de plus la suite f_n vérifie

$$f_{n+k} - f_n - T^n f_k \leq T^n h_k$$

avec $0 \leq h_k$ et $\int h_k d\mu \leq C$, alors il existe $\Psi \in L^1_+$ telle que pour tout n

$$\sum_{i=0}^{n-1} T^i \lambda \leq f_n + T^n \Psi \mu \text{ p.p.}$$

DÉMONSTRATION. On utilise un argument dérivé de l'argument original de Kingman ((9), (10)). Il consiste à utiliser le fait que g_m est borné en norme dans L^1 et que $\int g_m d\mu = (1/m) \int f_m d\mu$ pour obtenir, par compacité faible, dans le bidual $(L^\infty)^*$ un point d'accumulation ν de g_m , dont on peut montrer que la partie absolument continue est la fonction λ cherchée.

On reprend les notations du lemme. On pose $R_{n,m} = (\sum_{i=0}^{n-1} T^i g_m - f_n)^+$ si $n < m$.

D'après le lemme on a

$$\int R_{n,m} d\mu \leq C + \frac{K_n}{m}$$

d'où

$$\|g_m\| < \|f_1\| + 2 \left(C + \frac{K_1}{m} \right) + \left| \frac{1}{m} \int f_m d\mu - \int f_1 d\mu \right|.$$

D'après le Théorème 1, la suite $(1/m) \int f_m d\mu$ a une limite, donc la suite g_m est bornée en norme dans L^1 .

Plongeons L^1 dans son bidual $(L^\infty)^*$ et identifions sous la même notation chaque élément de L^1 avec l'élément correspondant de $(L^\infty)^*$. Notons encore T le prolongement à $(L^\infty)^*$ de l'isométrie positive T de L^1 . Par compacité faible des boules dans $(L^\infty)^*$ (pour la topologie $\sigma((L^\infty)^*, L^\infty)$) et grâce au procédé diagonal, il existe une suite croissante d'entiers m' telle que

$$w^* - \lim_{m'} g_{m'} = \nu$$

et pour tout n , $w^* - \lim_{m'} R_{n,m'} = \xi^n$ ($w^* - \lim$ désigne les limites faibles dans $(L^\infty)^*$). Pour chaque n , $\xi^n \geq 0$ et $\xi^n(\Omega) \leq C$. L'opérateur T est faiblement continu; par passage à la limite dans l'inégalité du lemme on trouve:

$$\sum_{i=0}^{n-1} T^i \nu \leq f_n + \xi^n.$$

En particulier $f_1 + \xi^1 - \nu \geq 0$. D'après un théorème de Hewitt et Yosida ((4) page 163) tout élément positif ρ de $(L^\infty)^*$ se décompose de façon unique en $\rho = \rho_a + \rho_s$ où ρ_a est un élément de L^1_+ et où ρ_s est une charge pure positive (i.e. ρ_s est purement finiment additive:

si $\delta \in L^1$ et si $0 \leq \delta \leq \rho_s$ alors $\delta = 0$). Il y a donc une écriture unique de ce type: $f_1 + \xi^1 - \nu = \rho_a + \rho_s$; comme ξ^1 a aussi une décomposition de la même forme $\xi^1 = \xi_a^1 + \xi_s^1$ on obtient: $\nu = \lambda + \xi_s^1 - \rho_s$ où $\lambda \in L^1$. L'inégalité du lemme entraîne alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} T^i \lambda \leq f_n + \xi_a^n + \xi_s^n + \sum_{i=0}^{n-1} T^i \rho_s$$

car $\xi_s^1 \geq 0$. Comme T est inversible l'image par T d'une charge pure positive est aussi une charge pure positive, donc $\xi_s^n + \sum_{i=0}^{n-1} T^i \rho_s$ est une charge pure positive et l'on obtient $\sum_{i=0}^{n-1} T^i \lambda \leq f_n + \xi_a^n$. Par intégration $\int \lambda d\mu \leq (1/n) \int f_n d\mu + (C/n)$ d'où $\int \lambda d\mu \leq \gamma$. Or $\nu(\Omega) = \gamma$ car pour tout m

$$\int g_m d\mu = \frac{1}{m} \int f_m d\mu; \text{ donc } \gamma \geq \int \lambda d\mu = \gamma - \xi^1(\Omega) + \rho_s(\Omega) \geq \gamma - C.$$

On considère maintenant $g'_m = (1/m) \sum_{r=1}^m f_{2r} - T^2 f_{2(r-1)}$. La suite f_{2n} est presque sous-additive par rapport à T^2 avec la même constante C . Le raisonnement précédent s'applique donc à cette nouvelle suite; il existe une sous-suite m'' de la suite m' telle que $w^* - \lim_{m''} g'_{m''} = \nu'$; on peut écrire $\nu' = \lambda' + (\xi_s^1)' - \rho'_s$ et on a

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \int \lambda' d\mu \geq \gamma - \frac{C}{2}$$

car $\lim_n (1/n) \int f_{2n} d\mu = 2\gamma$. On observe alors que

$$g'_m = \frac{1}{m} (\sum_{r=1}^m (f_{2r} - T f_{2r-1}) + T \sum_{r=1}^m (f_{2r-1} - T f_{2r-2})).$$

Comme $\int (f_n - T f_{n-1})^+ d\mu \leq \int f_1^+ d\mu + C$, chacune des deux moyennes

$$\frac{1}{m} \sum_{r=1}^m (f_{2r} - T f_{2r}), \quad \frac{1}{m} T (\sum_{r=1}^m f_{2r-1} - T f_{2r-2})$$

a une partie positive d'intégrale bornée. Leur somme g'_m étant bornée en norme L^1 , chacune de ces deux moyennes l'est aussi. On peut donc choisir la sous-suite m'' de telle façon que

$$w^* - \lim_{m''} \frac{1}{m''} \sum_{r=1}^{m''} (f_{2r} - T f_{2r-1}) = \nu_1$$

$$w^* - \lim_{m''} \frac{1}{m''} \sum_{r=1}^{m''} (f_{2r-1} - T f_{2r-2}) = \nu_2.$$

Ces deux éléments doivent satisfaire $\nu = (\frac{1}{2})(\nu_1 + \nu_2)$ et $\nu' = \nu_1 + T\nu_2$; chacun d'eux s'écrit $\nu_i = \lambda_i + \theta_i^1 - \theta_i^2$ où $\lambda_i \in L^1$ et où les θ^i sont des charges pures et positives. En vertu de l'unicité de la décomposition de Hewitt et Yosida on trouve $\lambda' = \lambda_1 + T\lambda_2$ et $\lambda = (\frac{1}{2})(\lambda_1 + \lambda_2)$, d'où $\int \lambda d\mu = \frac{1}{2} \int \lambda' d\mu$ et

$$\gamma \geq \int \lambda d\mu \geq \gamma - \frac{C}{2}.$$

En remplaçant 2 par un entier p quelconque, c'est à dire en considérant la suite f_{pn} presque sous-additive par rapport à T^p , on peut répéter entièrement le raisonnement précédent et on obtient:

$$\gamma \geq \int \lambda d\mu \geq \gamma - \frac{C}{p}.$$

Donc cette fonction λ vérifie les propriétés demandées.

Pour démontrer la seconde partie il suffit d'utiliser la seconde inégalité du lemme. Comme la suite $(1/m) \sum_{r=1}^{m-1} h_r$ est bornée dans L^1 , la suite m' utilisée dans la première partie peut être choisie de façon que $(1/m') \sum_{r=1}^{m'-1} h_r$ converge faiblement dans $(L^\infty)^*$ vers δ . En passant à la limite dans l'inégalité on trouve

$$\sum_{i=0}^{n-1} T^i \lambda \leq f_n + T^n \delta.$$

Il suffit alors de prendre pour Ψ la partie absolument continue de δ dans la décomposition de Hewitt et Yosida.

REMARQUE. L'inversibilité de T ne joue pas un rôle essentiel. Comme on le sait, si T n'est pas inversible on peut toujours plonger le système $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ dans un système plus gros $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ où T est inversible et toutes les propriétés de convergence sur Ω peuvent se déduire des propriétés correspondantes sur $\tilde{\Omega}$. Ceci évidemment utilise l'invariance de μ . Sans l'inversibilité de T le Théorème 3 reste vrai à condition de définir λ sur le gros espace $\tilde{\Omega}$. Grâce à cette remarque on peut énoncer le théorème suivant, qui est le résultat principal de cette étude, sans se préoccuper de l'inversibilité de T .

THÉORÈME 4. (théorème ergodique presque sous-additif). Soit f_n une suite de fonctions intégrables vérifiant les deux conditions:

a) pour tout n et k entiers

$$f_{n+k} - f_n - T^n f_k \leq T^n h_k \text{ } \mu \text{ p.p.}$$

où h_k est une suite de fonctions positives telle que $\sup_k \int h_k d\mu < +\infty$

b) $\inf_n (1/n) \int f_n d\mu > -\infty$.

Alors la suite $(1/n)f_n$ converge μ .p.p. et en norme $L^1(\mu)$ vers une fonction invariante \bar{f} telle que $\int \bar{f} d\mu = \lim_n (1/n) \int f_n d\mu$.

DÉMONSTRATION. Avec les notations du Théorème 3, on a

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i \lambda \leq \lim_n \inf \frac{1}{n} f_n \text{ } \mu \text{ p.p.}$$

car $\lim_n (1/n) T^n \Psi = 0$ μ p.p. La limite de Birkhoff de gauche est une fonction dont l'intégrale vaut $\gamma = \lim_n (1/n) \int f_n d\mu$. D'après le Théorème 2 on peut donc écrire

$$\gamma \leq \int \lim_n \inf \frac{1}{n} f_n d\mu \leq \int \limsup_n \frac{1}{n} f_n d\mu = \gamma,$$

ce qui prouve le résultat.

REMARQUE. La démonstration précédente peut être beaucoup simplifiée quand la suite h_k possède la propriété d'équi-intégrabilité. Dans ce cas la suite $(1/m) \sum_{r=1}^{m-1} h_r$ est aussi équi-intégrable, c'est à dire relativement faiblement compacte dans L^1 , et le passage à la limite dans l'inégalité du lemme s'en trouve facilité. Il n'est plus nécessaire alors de considérer les sous-suites multiples presque sous-additives pour les puissances de T .

Sous cette hypothèse supplémentaire, la méthode directe de (2) peut aussi être utilisée pour démontrer le Théorème 4 sans passer par la décomposition du Théorème 3.

4. Une application. Soit \mathcal{P} une partition mesurable, dénombrable de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dont l'entropie

$$H(\mathcal{P}) = - \sum_{A \in \mathcal{P}} \mu(A) \log \mu(A)$$

est supposée finie. On pose $\mathcal{P}_s^t = \bigvee_{i=s}^t T^{-i} \mathcal{P}$, la partition engendrée par les partitions $T^{-i} \mathcal{P}$ avec $s \leq i \leq t$, s et t étant des entiers relatifs. On se propose de montrer que la suite des

fonctions "information"

$$I_n = \sum_{A \in \mathcal{P}_0^{n-1}} \chi_A(-\log \mu(A))$$

vérifie les hypothèses du Théorème 4 (on note χ les fonctions indicatrices d'ensembles; on utilise le log de base 2; pour les propriétés élémentaires classique de ces objets on renvoie à (12)).

Si les partitions $T^{-i}\mathcal{P}$ sont indépendantes la suite I_n est additive (i.e. $I_{n+k} = I_n + T^n I_k$). Dans tous les autres cas, bien que la suite $H(\mathcal{P}_0^n) = \int I_n d\mu$ soit sous-additive, la suite des fonctions I_n elles-mêmes n'est pas sous-additive. En effet

$$I_{n+k} = I_n + \sum_{A \in \mathcal{P}_0^{n+k-1}} \chi_A(-\log \mu(A/\mathcal{P}_0^{n-1}))$$

où $\mu(A/\mathcal{P}_0^n)$ désigne l'espérance conditionnelle de χ_A sachant \mathcal{P}_0^n . Ceci s'écrit encore

$$I_{n+k} = I_n + T^n [\sum_{A \in \mathcal{P}_0^{k-1}} \chi_A(-\log \mu(A/\mathcal{P}_0^{-1}))].$$

Une inégalité classique n'utilisant que la définition de l'espérance conditionnelle, est alors:

$$\mu(A \cap \{\sup_{n \geq 1} (-\log(\mu(A/\mathcal{P}_0^{-1}))) > x\}) \leq 2^{-x}$$

quel que soit $A \in \mathcal{P}_0^{k-1}$ et quel que soit $x \geq 0$ ((12)). Posons

$$S_k = \sup_{n \geq 1} \sum_{A \in \mathcal{P}_0^{k-1}} \chi_A(-\log \mu(A/\mathcal{P}_0^{-1})).$$

L'inégalité précédente donne aussitôt l'intégrabilité de S_k . Comme on a la relation

$$I_{n+k} \leq I_n + T^n I_k + T^n (S_k - I_k)^+$$

pour montrer que la suite I_n est presque sous-additive au sens du Théorème 4 il suffit de vérifier que les intégrales $\int (S_k - I_k)^+ d\mu$ sont bornées.

Or, pour $A \in \mathcal{P}_0^{k-1}$, on a

$$\mu(A \cap \{S_k - I_k > x\}) = \mu(A \cap \{S_k > x - \log \mu(A)\}) \leq \mu(A) 2^{-x}$$

d'après l'inégalité précédente. Par sommation sur A on trouve

$$\mu\{S_k - I_k > x\} \leq 2^{-x}$$

donc non seulement les intégrales $\int (S_k - I_k)^+ d\mu$ sont bornées par $1/\text{Log } 2$ mais la suite $(S_k - I_k)^+$ est équi-intégrable. On a ainsi prouvé la proposition suivante:

PROPOSITION. *La suite des fonctions "information" I_n vérifie les hypothèses du Théorème 4 (elle est donc "presque sous-additive").*

D'après le Théorème 4, la suite $(1/n)I_n$ converge p.p. et dans L^1 vers une fonction invariante dont l'intégrale vaut $\lim_n (1/n) H(\mathcal{P}_0^n)$. C'est le théorème de Shannon-McMillan-Breiman ((12)).

REFERENCES

- [1] COX, J. T. and DURRETT, R. (1981). Limit theorems for percolation processes. *Ann. Probab.* **9** 583-603.
- [2] DERRIENNIC, Y. (1975). Sur le théorème ergodique sous-additif. *CRAS Paris Ser. A* **281** 985-988.
- [3] DERRIENNIC, Y. and KRENGEL, U. (1981). Subadditive mean ergodic theorems. *Ergod. Th. and Dynam. Syst.* **1** 33-48.
- [4] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J. (1958). *Linear Operators*. Interscience, New York.
- [5] GRIMMETT, G. R. (1976). On the number of clusters in the percolation model. *J. London Math. Soc. Ser 2* **13** 346-350.

- [6] HAMMERSLEY, J. M. (1962). Generalization of the fundamental theorem on subadditive function. *Proc. Cambridge Philo. Soc.* **58** 235–238.
- [7] HAMMERSLEY, J. M. (1974). Postulates for subadditive processes. *Ann. Probab.* **2** 652–680.
- [8] KESTEN, H. (1973). Discussion of [10].
- [9] KINGMAN, J. F. C. (1968). The ergodic theory of subadditive stochastic processes. *J. Roy. Statist. Soc. B* **30** 499–510.
- [10] KINGMAN, J. F. C. (1973). Subadditive ergodic theory. *Ann. Probab.* **1** 883–909.
- [11] MOULIN-OLLAGNIER, J. (1981). Théorème ergodique presque sous-additif et converger en moyenne de l'information. Preprint de l'Université de Paris XIII.
- [12] SINAI, I. (1976). Introduction to ergodic theory. *Princeton Mathematical Notes*.

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
6 AVENUE LE GORGEU
F 29283 BREST
FRANCE