QUELQUES FORMULES RELATIVES À DES SÉRIES DE GAUSS.

PAR

PAUL APPELL

à PARIS.

La définition de la constante d'Euler donne

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{h-1} - \log h + S(h),$$

où h est un entier positif quelconque et $S(h)$ une fonction de h tendant vers zéro quand h croît indéfiniment. Cette quantité $S(h)$ peut être exprimée à l'aide de la fonction $\Psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx}$ de Gauss (Oeuvres t. III). On a en effet $\Psi(x+1) = \frac{1}{x+1} + \Psi(x)$ d'où

$$\Psi(h-1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{h-1} + \Psi(0)$$

et

$$C = \Psi(h-1) - \Psi(0) - \log h + S(h).$$

Comme $C = -\Psi(0)$,

$$S(h) = -\Psi(h-1) + \log h$$

formule établie ici pour h entier positif; cette formule sera généralisée plus loin, elle donne actuellement

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{h-1} - \Psi(h-1).$$

On peut également exprimer C en fonction de $\Psi(x)$, où x est quelconque. On a en effet la formule

$$\Psi(x) = \Psi(0) + \frac{x}{1}\Psi'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2}\Psi''(0) + \cdots$$

Or en posant

$$S_p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

on a

$$\Psi'(0) = S_2, \quad \Psi''(0) = -\ 1 \cdot 2\, S_3, \ \ldots$$

et en remplaçant $\Psi(0)$ par $-C$, on obtient la formule connue

$$C = -\Psi(x) + S_2 x - S_3 x^2 + S_4 x^3 - S_5 x^4 + \cdots$$

pourvu que x ait une valeur rendant la série convergente, ce qui a lieu pour $0 \leq x \leq 1$; cette dernière condition peut toujours être remplie par l'application répétée de la formule

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x+1}.$$

Legendre donne la formule

$$C + \Psi(x) = \int_0^1 \frac{1-(1-z)^x}{z}\, dz$$

qui se trouve dans son Exercices sur le Calcul Intégral (t. II, p. 45); en développant l'intégrale suivant les puissances de x et identifiant les deux séries on a

$$S_{p+1} = (-1)^p \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p} \int_0^1 \frac{\log^p(1-z)}{z}\, dz.$$

L'expression analytique de $S(h)$ se trouve donnée, parmi d'autres formules dignes d'attention dues à M. Ser sous forme de questions posées dans le tome IV, 2ième série, de l'Intermédiaire des mathématiciens p. 126—128, Novembre-Décembre 1925. En désignant par p_{n+1} le nombre commensurable

$$p_{n+1} = \int_0^1 \frac{x(1-x)\cdots(n-1-x)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}\, dx$$

il indique l'expression

$$S(h) = (h-1)!\left[\frac{p_2}{h!} + \frac{1!\,p_3}{(h+1)!} + \frac{2!\,p_4}{(h+2)!} + \cdots\right]$$

qui donne aussi $\Psi(h-1)$ en fonction de h; cette formule montre que $S(h)$ diminue avec $\frac{1}{h}$. On a $S(h) < \frac{1}{h}$, $S(h) > \frac{1}{2h}$. M. Ser exprime les nombres p_{n+1} en fonction des nombres de Bernoulli et il retrouve entre autres la formule

$$C = p_2 + \frac{p_3}{2} + \frac{p_4}{3} + \cdots + \frac{p_{n+1}}{n} + \cdots$$

due à Fontana, professeur à l'Université de Pavie vers 1780, publiée par Mascheroni en 1790 et démontrée par Bessel en 1812. Une bibliographie précise relative à cette dernière formule se trouve dans une Note de M. Giovanni Vacca présentée par M. Vito Volterra à l'Accademia nationale dei Lincei (Rendiconti, Classe de Scienze fisiche, matematiche et nationali, tome I, 6ième Série, Séance du 28 fevrier 1925, p. 206—210).

Les formules de M. Ser peuvent être rattachées aux recherches de Cramer sur les factorielles dans le Journal de Crelle et à celles de M. Nörlund sur les équations aux différences finies dans les dernières années des Acta mathematica. Dans une lettre que M. Ser m'écrit de Bagnères de Bigorre, il expose ses propres recherches sur ce sujet. Toutes les fois qu'une fonction $f(x)$ est développée suivant les polynomes $x(x-1)\cdots(x-n+1)$ en prenant l'intégrale $\int_0^x f(x)\,dx$ on introduit les polynomes que M. Ser désigne par $P_{n+1}(x)$ et qui ont été considérés à un tout autre point de vue par Edouard Lucas (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XI, 1882—83, p. 69—71). En mettant comme limite supérieure de l'intégrale $x=1$, on fait apparaître les nombres p_{n+1}.

Les formules précédentes jetteront peut-être quelque lumière sur un problème posé par Hermite (Correspondance, lettre à Stieltjes 1889, Paris, 1904, pp. 456, 459, 465, 471) relativement à la nature arithmétique de C.

Les formules de M. Ser peuvent être rattachées à la série hypergéométrique de Gauss

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,n} \cdot \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \cdot z^n$$

et plus généralement à toute série convergente de la forme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{1.2....n} \cdot u_n . z^n$$

u_n étant indépendant de α. Dans ces formules et notamment dans la formule de Fontana-Bessel figurent les polynomes

$$P_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{u(1-u)(2-u)\cdots(n-1-u)}{1.2....n} du$$

et les nombres $p_{n+1} = P_{n+1}(1)$ correspondant à $x=1$. En posant $u=-\alpha$, $du= -d\alpha$, α varie de o à $-x$ et l'on a

$$P_{n+1}(x) = \int_0^{-x} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{1.2....n} d\alpha; \quad P_1(x) = -x$$

d'où il résulte

$$\int_0^{-x} F(\alpha, \beta, \gamma, z)\, d\alpha = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_{n+1}(x) \frac{\beta\cdots(\beta+n-1)}{\gamma\cdots(\gamma+n-1)} \cdot z^n.$$

On déduit de là les formules indiquées en particularisant x, β, γ, z. Si l'on suppose $\gamma=\beta$, F devient $(1-z)^{-\alpha}$ et on a

$$\int_0^{-x} (1-z)^{-\alpha} d\alpha = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_{n+1}(x) . z^n$$

$$\frac{-(1-z)^x + 1}{\log(1-z)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_{n+1}(x) . z^n;$$

si l'on fait $z=1$, puis $x=1$, on a les deux formules de M. Ser

$$0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_{n+1}(x), \quad \frac{z}{\log(1-z)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} p_{n+1} . z^n$$

$$\frac{1}{\log(1-z)} + \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{n=\infty} p_{n+1} . z^{n-1}.$$

Si, dans la formule générale, on fait $z=\text{I}$ en appliquant la formule de Gauss (Oeuvres, t. 3, p. 147)

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\text{I})=\frac{\Pi(\gamma-\text{I})\,.\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-\text{I})}{\Pi(\gamma-\beta-\text{I})\,.\,\Pi(\gamma-\alpha-\text{I})}=\frac{\Gamma(\gamma)\,.\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\,.\,\Gamma(\gamma-\alpha)}$$

elle devient

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)}\cdot\int\limits_0^{-x}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\,d\alpha=\sum_{n=0}^{n=\infty}P_{n+1}(x)\frac{\beta\cdots(\beta+n-\text{I})}{\gamma\cdots(\gamma+n-\text{I})}\cdot$$

Si l'on y suppose $\gamma=\beta+\text{I}$

$$\Gamma(\beta+\text{I})\int\limits_0^{-x}\frac{\Gamma(\text{I}-\alpha)}{\Gamma(\beta+\text{I}-\alpha)}\cdot d\alpha=-x+\sum_{n=1}^{n=\infty}P_{n+1}(x)\frac{\beta}{\beta+n}\cdot$$

En posant

$$\lambda(z)=-\text{I}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{p_{n+1}}{n+z}$$

on a alors

$$\Gamma(z+\text{I})\cdot\int\limits_0^{-1}\frac{\Gamma(\text{I}-\alpha)}{\Gamma(z+\text{I}-\alpha)}\,d\alpha=-\text{I}+z\,.\,\lambda(z).$$

En supposant z entier positif k

$$(k-\text{I})!\int\limits_0^{-1}\frac{d\alpha}{(k-\alpha)(k-\text{I}-\alpha)\cdots(\text{I}-\alpha)}=-\frac{\text{I}}{k}+\lambda(k).$$

On a ainsi les $\lambda(k)$, pour $k=1, 2, 3, \ldots$, par des intégrales conduisant à des logarithmes. Pour $k=\text{I}$, on obtient une formule de M. Ser

$$\lambda(\text{I})=\text{I}-\log 2\,.$$

Les formules précédentes ne s'appliquent pas quand $\beta=0$; ce cas se présente pour la série de M. Ser

$$S(h)=\frac{p_2}{h}+\sum_{n=1}^{n=\infty}p_{n+2}\frac{\text{I}\,.\,2\,.\,\ldots\,.\,n}{(h+\text{I})(h+2)\cdots(h+n)},$$

où h est un entier positif. Alors F devient 1 et on peut introduire, pour $z=1$, le rapport $\frac{-1+F}{\beta}$ qui, pour $\beta=0$, devient

$$F'_\beta(\alpha, 0, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\left[\frac{d}{d\beta}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)}\right]_{\beta=0} = -\Psi(\gamma-\alpha-1)+\Psi(\gamma-1).$$

Mais cela est inutile; il est plus simple de se servir de la formule donnée par J. Bertrand à la page 256 de son »Calcul integral«. Cette formule est, en y mettant d'autres lettres

$$\psi(\gamma)-\psi(\gamma-\alpha) = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2\gamma(\gamma+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \cdots$$

où

$$\psi(x) = \frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = \Psi(x-1).$$

Intégrons par rapport à α de 0 à $-x$,

$$-x\psi(\gamma) + \log\frac{\Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(\gamma)} = \frac{P_2(x)}{\gamma} + \frac{P_3(x)}{\gamma(\gamma+1)} + \frac{P_4(x)}{\gamma}\cdot\frac{1\,.\,2}{(\gamma+1)(\gamma+2)} + \cdots.$$

Le second membre, où γ a une valeur entière et positive h, est la fonction introduite par M. Ser à la fin de la question 5561, p. 126 de l'Intermédiaire (loc. cit.). Mais, dans la formule que nous venons d'écrire, h est remplacé par une variable continue γ; nous désignerons la série par $S(\gamma, x)$; pour $x=1$, nous écrirons $S(\gamma)$. On a alors

$$-\psi(\gamma) + \log\gamma = S(\gamma)$$

formule qui peut servir à définir $S(\gamma)$ quand γ est positif quelconque. Pour $\gamma=1$, elle donne la formule de Fontana-Bessel. Comme $\psi(\gamma)-\psi(1)$ s'exprime sous forme finie quand γ est commensurable, d'après un théorème de Gauss et que $-\psi(1)=C$, on a une formule définissant C en fonction de x et $S(\gamma, x)$ pour toutes les valeurs commensurables de γ

$$-x\,.\,\psi(\gamma) + \log\frac{\Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(\gamma)} = S(\gamma, x).$$

Cette formule montre que, x étant quelconque, $S(\gamma, x)$ se ramène à $S(1, x)$ pour γ commensurable; elle donne en effet

$$-x \, . \, \psi(1) + \log \Gamma(x+1) = S(1, x)$$

(formule indiquée par M. Ser) d'où en retranchant

$$-x[\psi(\gamma) + C] + \log \frac{\Gamma(\gamma + x)}{\Gamma(\gamma) \, . \, \Gamma(x+1)} = S(\gamma, x) - S(1, x)$$

formule dans laquelle le coefficient de $-x$ est connu. Par exemple, en supposant $\gamma = \frac{1}{4}$

$$x\left[\frac{\pi}{3} + 3 \log 2\right] + \log \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + x\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma(x+1)} = S\left(\frac{1}{4}, x\right) - S(1, x).$$

En particulier, si l'on fait $x = 1$, $S(\gamma) - S(1)$ peut être exprimé en termes finis, si γ est commensurable.

Nous terminerons par des calculs d'intégrales définies. Notons les formules connues

$$C = \int_0^1 \left(\frac{1}{\log(1-z)} + \frac{1}{z}\right) dz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{\log z} + \frac{1}{1-z}\right) dz$$

$$\log(p+1) = \int_0^1 \frac{x^p - 1}{\log x} \, dx.$$

On peut alors donner une autre intégrale définie pour représenter

$$\lambda(k) = \frac{p_2}{k+2} + \frac{p_3}{k+3} + \cdots$$

où k n'est pas nécessairement un entier. On a en effet

$$p_2 + p_3 z + p_4 z^2 + \cdots = \frac{1}{z} + \log(1-z).$$

Multipliant par z^{k+1} et intégrant de o à I on a

$$\lambda(k) = \int_0^1 \left(z^k + \frac{z^{k+1}}{\log(1-z)}\right) dz$$

et si $k+1$ est positif

$$\lambda(k) = \frac{1}{k+1} + \int_0^1 \frac{z^{k+1}}{\log(1-z)} dz.$$

On peut remarquer que le produit $k\lambda(k)$ tend vers

$$p_2 + p_3 + \cdots = 1$$

si k croît indéfiniment. Cela revient à dire que

$$k \int_0^1 \frac{z^{k+1}}{\log(1-z)} dz$$

tend alors vers zéro.

On peut aussi exprimer la fonction $S(h)$ de M. Ser par une intégrale définie. On a, en effet, en désignant par n un entier

$$S(n+1) = \int_0^1 \left(\frac{x^n}{\log x} + \frac{x^n}{1-x}\right) dx;$$

en effet, en appelant pour le moment I cette intégrale on a

$$I - C = \int_0^1 \left(\frac{x^n - 1}{\log x} + \frac{x^n - 1}{1-x}\right) dx$$

$$I = C + \log(n+1) - H(n+1)$$

en posant

$$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}.$$

Or la fonction S de M. Ser est définie par

$$C = H(n+1) - \log(n+1) + S(n+1).$$

Donc I est bien égal à $S(n+1)$. On peut d'ailleurs retrouver l'expression de S. On a en effet:

$$\begin{aligned}
S(h) &= \int_0^1 \left(\frac{x^{h-1}}{\log x} + \frac{x^{h-1}}{1-x}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^{h-1}}{\log(1-x)} + \frac{(1-x)^{h-1}}{x}\right) dx \\
&= \sum_{n=0}^{n=\infty} p_{n+2} \int_0^1 x^n (1-x)^{h-1} dx \\
&= \sum p_{n+2} B(n+1, h) \\
&= \sum p_{n+2} \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(h)}{\Gamma(n+h+1)} \\
&= \sum p_{n+2} \frac{n!\,(h-1)!}{(n+h)!} \\
&= (h-1)! \sum \frac{p_{n+2}}{(n+1)\cdots(n+h)}.
\end{aligned}$$

D'apres l'expression de $S(h)$ on a $2S(2)-S(4)=C+\lambda(0)-3\lambda(1)+\lambda(2)$. Or l'égalité $C=H(h)-\log h+S(h)$ donne $C=2H(2)-H(4)+2S(2)-S(4)$. On a donc $\frac{1}{6}=-\lambda(0)+3\lambda(1)-\lambda(2)$, formule facile à généraliser.