

GRENZPERIODISCHE FUNKTIONEN.

(Aus einem Brief an die Herausgeber.)

Von

HARALD BOHR

in KOPENHAGEN.

In seiner soeben in Acta (Bd. 50, p. 359—379) erschienenen schönen Abhandlung »On the periodic motions of dynamical systems» hat Professor Birkhoff in sehr interessanter Weise gezeigt, dass in dynamischen Problemen von zwei Freiheitsgraden Bewegungen von *fastperiodischem*¹ Charakter auftreten. Die von Birkhoff entdeckten Bewegungstypen sind jedoch nicht von dem allgemeinen fastperiodischen Charakter, sondern gehören dem speziellen Typus an, den ich *grenzperiodisch* genannt habe. Die Definition einer grenzperiodischen Funktion lautet (II, p. 141):

Eine für $-\infty < x < \infty$ definierte Funktion $G(x)$ soll »grenzperiodisch« heissen, falls sie durch reinperiodische stetige Funktionen $P(x)$ gleichmässig für alle x approximiert werden kann.

Die *grenzperiodischen* Funktionen lassen sich (II, p. 141 u. f.) als diejenige Unterklasse der fastperiodischen Funktionen charakterisieren, deren Fourierexponenten λ_n sämtlich *rationale Multipla* einer festen Grösse sind, ebenso wie die *reinperiodischen* Funktionen die (noch viel engere) Unterklasse bilden, deren Fourierexponenten *ganze Multipla* einer festen Zahl sind.

Diese Charakterisierung der grenzperiodischen Funktionen — sowie die entsprechende der reinperiodischen — liegt recht tief; in der Tat ist zu ihrer Herleitung die Heranziehung des Fundamentalsatzes der Theorie der fastperio-

¹ H. BOHR, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I (Acta Bd. 45), II (Acta Bd. 46), III (Acta Bd. 47). Für das Folgende kommt wesentlich nur die zweite Abhandlung in Betracht; ich werde sie einfach als II zitieren.

dischen Funktionen nötig. Wenn es sich aber nur darum handelt, die Klasse der grenzperiodischen Funktionen *für sich* zu untersuchen — d. h. wenn man davon absieht, die grenzperiodischen Funktionen in den Rahmen der allgemeinen Theorie der fastperiodischen Funktionen einzuordnen — lässt sich eine Theorie dieser Funktionen beinahe ebenso einfach aufbauen wie die der reinperiodischen (stetigen) Funktionen. Man kann sich eigentlich darüber wundern, dass der einfache und naheliegende Begriff der grenzperiodischen Funktionen nicht längst (ganz unabhängig von den fastperiodischen Funktionen) aufgestellt, und eine Theorie der »Fourierreihen« dieser Funktionen entwickelt wurde. Da nach den Birkhoff'schen Ergebnissen den grenzperiodischen Funktionen eine gewisse Bedeutung für die Dynamik zuzukommen scheint, mag es vielleicht gestattet sein, in den folgenden Zeilen die Grundlagen einer independenten Theorie dieser Funktionen kurz und möglichst einfach auseinanderzusetzen.

1°. In der obigen Definition der grenzperiodischen Funktionen war von »Perioden« nicht die Rede. Es ergibt sich aber leicht die wichtige Tatsache, dass bei dem Grenzübergang, der von den reinperiodischen zu den grenzperiodischen Funktionen führt, der Begriff der Periode nicht völlig verloren geht. In der Tat lässt sich leicht zeigen (II, p. 142), dass zu jeder grenzperiodischen Funktion $G(x)$ eine *Periode* p existiert in dem Sinne, dass jede reinperiodische Funktion, welche $G(x)$ bis auf einem hinreichend kleinem Fehler $\varepsilon (< \varepsilon_0)$ approximiert, eine Periode besitzt, die ein *rationales Multiplum* von p ist. [Hierbei ist die »Periode« p von $G(x)$ offenbar nur bis auf einem rationalen Faktor $r \neq 0$ bestimmt.] Ohne den Umfang unserer Funktionenklasse einzuschränken können wir daher den Begriff der Grenzperiodizität auch so definieren:

Eine Funktion $G(x)$ ($-\infty < x < \infty$) soll »grenzperiodisch mit der Periode p « heissen, falls sie gleichmässig für alle x durch reinperiodische stetige Funktionen $P(x)$ angenähert werden kann, deren Perioden rationale Multipla von p sind.

Diese letzte Definition werden wir als den Ausgangspunkt unserer Ausführungen nehmen.

Beispiel. Ist die Reihe $\sum |a_n|$ konvergent, stellt die für $-\infty < x < \infty$ gleichmässig konvergente Reihe

$$\sum a_n e^{\frac{2\pi i}{n} x}$$

durch ihre Summe $G(x)$ eine grenzperiodische Funktion mit der Periode 1 dar. In der Tat ist der n^{te} Abschnitt der Reihe eine reinperiodische Funktion der Periode $n!$.

2°. Unter der *abgeschlossenen Hülle* einer Menge Φ von Funktionen $F(x)$ ($-\infty < x < \infty$) wollen wir diejenige Funktionenmenge $H(\Phi)$ verstehen, welche aus der gegebenen Menge Φ entsteht, wenn diese durch Hinzufügung aller solchen Funktionen erweitert wird, die *gleichmässig für alle x* durch Funktionen der Menge Φ approximiert werden können.

Nach dem Weierstrass'schen Approximationssatze kann die Menge aller stetigen reinperiodischen Funktionen mit der Periode p als die abgeschlossene Hülle aller endlichen Summen der Form

$$(1) \quad \sum_{\nu=-n}^n a_{\nu} e^{i\nu\alpha x} \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{p} \right)$$

charakterisiert werden.

Ebenso ist die Menge aller grenzperiodischen Funktionen mit der Periode p einfach die abgeschlossene Hülle aller endlichen Summen der Form

$$(2) \quad s(x) = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} e^{ir_{\nu}\alpha x} \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{p} \right),$$

wo die r_{ν} *rationale* Zahlen sind. In der Tat ist einerseits jede endliche Summe (2) eine reinperiodische Funktion mit einer Periode rp , also jede durch solche Summen approximierbare Funktion grenzperiodisch mit der Periode p , und andererseits ist jede grenzperiodische Funktion der Periode p durch Summen (2) approximierbar, weil sie durch (stetige) reinperiodische Funktionen mit Perioden rp approximierbar sind, und diese wieder — nach dem Weierstrass'schen Satze — durch endliche Summen der Form (2) approximiert werden können.

3°. Aus diesem gleichmässigen Approximationssatze folgt sofort, dass bei jedem reellen λ der Mittelwert

$$a(\lambda) = M_x \{ G(x) e^{-i\lambda x} \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T G(x) e^{-i\lambda x} dx$$

existiert, und dass er für jedes λ , welches kein rationales Multiplum von $\alpha = \frac{2\pi}{p}$ ist, gleich 0 ausfällt. Denn dies gilt ja für jede der (gleichmässig approximierenden) Summen (2), wo

$$M_x \{ s(x) e^{-i\lambda x} \} = \begin{cases} a_{\nu} & \text{für } \lambda = r_{\nu}\alpha \quad (\nu = 1, \dots, n) \\ 0 & \text{für } \lambda \neq \text{alle } r_{\nu}\alpha. \end{cases}$$

Wir setzen (bei jedem rationalen r) $a(r\alpha) = A_r$ und ordnen der grenzperiodischen Funktion $G(x)$ die Fourierreihe

$$G(x) \sim \sum A_r e^{ir\alpha x}$$

zu, wo die Summation über *alle rationalen* r zu erstrecken ist.

4°. Nach einem berühmten Satz von Fejér kann man für jede reinperiodische stetige Funktion $P(x)$ der Periode p eine Folge von gleichmässig approximierenden Summen (1) einfach dadurch erhalten, dass man auf die Fourierreihe $\sum A_n e^{in\alpha x}$ von $P(x)$ das folgende Summationsverfahren ausübt. Man bildet den Kern

$$K_n(t) = \sum_{\nu=-n}^n \left(1 - \frac{|\nu|}{n}\right) e^{-i\nu t}$$

(wo $K_n(t) \geq 0$ für alle t , und $M_t\{K_n(t)\} = 1$ ist),

und mit Hilfe dieses Kernes die Mittelsumme

$$S_n(x) = \sum_{\nu=-n}^n \left(1 - \frac{|\nu|}{n}\right) A_\nu e^{i\nu\alpha x} = M_t\{P(x+t) K_n(\alpha t)\};$$

dann strebt $S_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmässig gegen $P(x)$. In der Tat zeigt man sofort, nach Fejér, dass die Differenz

$$S_n(x) - P(x) = M_t\{(P(x+t) - P(x)) K_n(\alpha t)\}$$

für $n \rightarrow \infty$ gleichmässig gegen 0 strebt.

Mit Hinblick auf eine weiter unten folgende Anwendung fügen wir noch die folgende Bemerkung hinzu. Eine reinperiodische Funktion $P_0(x)$ mit der Periode p_0 kann natürlich auch als eine reinperiodische Funktion mit *der Periode* mp_0 aufgefasst werden, wo m eine beliebige feste positive ganze Zahl ist. Daher wird, nach dem Fejér'schen Satze, auch der Mittelwert

$$M_t\left\{(P_0(x+t) - P_0(x)) K_n\left(\frac{\alpha_0}{m} t\right)\right\} \quad \left(\alpha_0 = \frac{2\pi}{p_0}\right)$$

bei jedem festen m für $n \rightarrow \infty$ gleichmässig gegen 0 streben. Durch eine einfache

Abschätzung des Fejér-Kernes $K_n(t)$ zeigt man nun leicht die folgende *Gleichmässigkeits-Eigenschaft*: Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ besteht die Ungleichung

$$(3) \quad \left| M_t \left\{ (P_0(x+t) - P_0(x)) K_n \left(\frac{\alpha_0}{m} t \right) \right\} \right| < \varepsilon$$

wenn nur $\frac{n}{m}$ hinreichend gross ist, d. h. sie gilt für alle positiven ganzen n und m , wenn nur $\frac{n}{m} > k_0 = k_0(\varepsilon)$ ist.

Fast ebenso einfach lässt sich die Fourierreihe $\sum A_r e^{ir\alpha x}$ einer beliebigen grenzperiodischen Funktion $G(x)$ der Periode p »summieren«. [Spezialfall des Bochnerschen Summationssatzes¹ für allgemeine fastperiodische Funktionen; bei dem Beweis des allgemeinen Satzes ist die Heranziehung des Fundamentalsatzes nötig.] Man gewinnt dadurch einen einfachen *Algorithmus*, welcher von der Fourierreihe der Funktion $G(x)$ aus zu Approximationssummen (2) führt. Das Summationsverfahren ist eine natürliche Verallgemeinerung des von Fejér für den Fall einer reinperiodischen Funktion angegebenen. Wir bilden bei festen positiven ganzen n und N den Kern

$$K_n \left(\frac{\alpha}{N!} t \right) = \sum_{\nu=-n}^n \left(1 - \frac{|\nu|}{n} \right) e^{-\frac{i\nu\alpha t}{N!}} \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{p} \right)$$

und mit seiner Hülfe den Mittelwert

$$S_n^{(N)}(x) = M_t \left\{ G(x+t) K_n \left(\frac{\alpha}{N!} t \right) \right\} = \sum_{\nu=-n}^n \left(1 - \frac{|\nu|}{n} \right) A_{\frac{\nu}{N!}} e^{\frac{i\nu\alpha x}{N!}}.$$

Rechts steht eine Summe über Schwingungen $e^{ir\alpha x}$, wo r alle rationalen Zahlen von der Form $\frac{\nu}{N!}$ ($-n \leq \nu \leq n$) durchläuft. Wir wollen nun einen Grenzübergang ausführen und zwar natürlich so, dass nach und nach *alle* Schwingungen $e^{ir\alpha x}$ mit rationalen r herangezogen werden. Hierzu ist offenbar nötig, dass $N \rightarrow \infty$ (damit die rationalen Zahlen r mit »sehr grossen« Nennern berücksichtigt werden) und dass $\frac{n}{N!} \rightarrow \infty$ (damit die numerisch »sehr grossen« Zahlen r nicht

¹ S. BOCHNER, Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I, Math. Ann. 96.

entkommen). Der Summationssatz besagt nun, dass diese beiden Forderungen $N \rightarrow \infty$ und $\frac{n}{N!} \rightarrow \infty$ tatsächlich genügen, damit die obige Summe $S_n^{(N)}(x)$ gleichmässig für alle x gegen die gegebene grenzperiodische Funktion $G(x)$ strebt, d. h. dass die Ungleichung

$$(4) \quad |S_n^{(N)}(x) - G(x)| < \varepsilon$$

für alle $N > N_0(\varepsilon)$ und $\frac{n}{N!} > c_0(\varepsilon)$ erfüllt ist.

Beweis. Unter Benutzung von $M\left\{K_n\left(\frac{\alpha}{N!}t\right)\right\} = 1$ schreiben wir die Differenz $S_n^{(N)}(x) - G(x)$ in die Form

$$(5) \quad M_t\left\{(G(x+t) - G(x))K_n\left(\frac{\alpha}{N!}t\right)\right\}.$$

Nach der Definition der Grenzperiodizität können wir $G(x)$ mit einem Fehler $< \frac{\varepsilon}{3}$ durch eine stetige reinperiodische Funktion $P_0(x)$ der Periode $r_0 p$ approximieren, wobei wir die rationale Zahl r_0 als eine ganze Zahl der Form $r_0 = N_0!$ annehmen können (indem wir sonst nur r_0 durch ein passendes ganzes Multiplum von r_0 ersetzen). Aus der Positivität des Kernes folgt, dass der Mittelwert (5) bei jedem x von dem entsprechenden Mittelwert

$$(6) \quad M_t\left\{(P_0(x+t) - P_0(x))K_n\left(\frac{\alpha}{N!}t\right)\right\}$$

um weniger als $\frac{2\varepsilon}{3}$ abweicht. Es sei nunmehr N eine beliebige Zahl $> N_0$.

Indem wir die Periode $N_0! p$ von $P_0(x)$ mit p_0 bezeichnen, $\frac{2\pi}{p_0} \left(= \frac{\alpha}{N_0!} \right) = \alpha_0$ setzen und die ganze Zahl $N! : N_0!$ mit m bezeichnen, wird

$$\frac{\alpha}{N!} = \frac{\alpha_0}{m},$$

und (6) nimmt somit die Form

$$(7) \quad M_t\left\{(P_0(x+t) - P_0(x))K_n\left(\frac{\alpha_0}{m}t\right)\right\} \quad \left(\alpha_0 = \frac{2\pi}{p_0}\right)$$

an. Dieser letzte Ausdruck (7) ist aber gerade derjenige, dem wir oben (siehe (3)) bei der Summation der Fourierreihe einer reinperiodischen Funktion $P_0(x)$ mit der Periode p_0 begegnet sind; von ihm wissen wir, dass er beliebig klein wird, etwa $< \frac{\varepsilon}{3}$, wenn nur die Zahl $\frac{n}{m}$ hinreichend gross, etwa $> k_0(\varepsilon)$ ist, d. h. wenn nur $\frac{n}{N!} > \frac{k_0(\varepsilon)}{N_0!} = c_0(\varepsilon)$ ist. Also ist die Ungleichung (4) für $N > N_0$, $\frac{n}{N!} > c_0$ erfüllt q. e. d.

Aus dem Summationssatz folgt unmittelbar der *Eindeutigkeitssatz*, dass eine grenzperiodische Funktion $G(x)$ durch ihre Fourierreihe $\sum A_r e^{ira x}$ eindeutig bestimmt ist [Spezialfall des Eindeutigkeitssatzes für allgemeine fastperiodische Funktionen]. Ferner folgt in üblicher Weise die *Parsevalsche Gleichung*

$$\sum |A_r|^2 = M\{|f(x)|^2\}.$$

5°. Wir fügen noch hinzu, dass Bochner in seiner interessanten Habilitationsschrift (Math. Zeitsch. Bd. 27) die *Konvergenzeigenschaften* von Fourierreihen grenzperiodischer Funktionen untersucht hat. Auch hier ergeben sich Resultate, die in vieler Hinsicht den bekannten Sätzen über Fourierreihen reinperiodischer Funktionen entsprechen. So hat Bochner z. B. gezeigt, dass die Fourierreihe einer grenzperiodischen Funktion (in einer gewissen angegebenen Ordnung ihrer Glieder) für alle x gleichmässig konvergiert, wenn die Funktion einer einfachen Lipschitz-Bedingung genügt.

