SUR UN THÉORÈME DE M. HERMITE.

Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite

PAR

E. GOURSAT

à TOULOUSE.

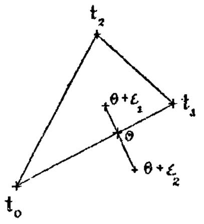
Le théorème sur les intégrales définies affectées de coupures que vous avez démontré dans votre lettre à M. Mittag-Leffler, publiée par le journal de Borchardt, et dans votre cours à la Sorbonne, peut se démontrer facilement par la considération des intégrales curvilignes et l'application du théorème de Cauchy. Voici en quelques mots la démonstration.

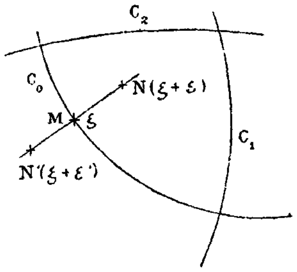
Soient $F(t, z)$, $G(t, z)$ deux fonctions holomorphes des deux variables indéfinies t et z, et t_0, t_1 deux valeurs quelconques, réelles ou imaginaires. Considérons l'intégrale définie $\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt$, prise suivant le chemin rectiligne qui joint le point t_0 au point t_1. Cette intégrale a une valeur unique et finie pour tous les points du plan, que je désignerai par $\Phi(z)$, à l'exception de ceux qu'on détermine par la condition $G(t, z) = 0$, en donnant à t les valeurs comprises dans la formule

$$t_0 + \lambda(t_1 - t_0)$$

où λ prend toutes les valeurs réelles de 0 à 1. On détermine ainsi un nombre fini ou infini de portions de courbes ou de courbes complètes pour lesquelles la fonction $\Phi(z)$ cesse d'avoir un sens.

Soit C_0 l'une de ces courbes, et un point M sur cette courbe d'affixe ζ, auquel correspond sur le chemin rectiligne $t_0 t_1$ un point θ. Sur la normale en M à la courbe C_0 et de part et d'autre de ce point prenons deux points N et N', à des distances infiniment petites de ce point; nous désignerons les affixes par $\zeta + \varepsilon$, et $\zeta + \varepsilon'$. L'équation $G(t, z) = 0$ fait correspondre aux valeurs $\zeta + \varepsilon$, $\zeta + \varepsilon'$ deux valeurs $\theta + \varepsilon_1$, $\theta + \varepsilon_2$, voisines de θ et figurées par des points situés de part





et d'autre du chemin rectiligne $t_0 t_1$. Supposons, par exemple, qu'à la valeur $\zeta + \varepsilon$ corresponde pour t la valeur $\theta + \varepsilon_1$, et admettons en outre qu'à la valeur ζ l'équation $G(t, z) = 0$ ne fasse correspondre qu'une valeur θ sur le chemin rectiligne $t_0 t_1$. On pourra alors trouver un point t_2 tel qu'à l'intérieur du triangle $t_0 t_1 t_2$ l'équation $G(t, \zeta + \varepsilon) = 0$ n'ait d'autre racine que la racine $\theta + \varepsilon_1$. La fonction $\frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)}$ n'aura alors à l'intérieur de ce triangle qu'un seul point critique, le point $\theta + \varepsilon_1$, et l'application du théorème de Cauchy nous donne immédiatement

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)} dt + \int_{t_2}^{t_0} \frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)} dt = 2i\pi A$$

A désignant le résidu de la fonction $\frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)}$ relative au pôle $\theta + \varepsilon_1$:

$$A = R(\theta + \varepsilon_1, \zeta + \varepsilon).$$

Chacune des intégrales $\int_{t_1}^{t_2}$, $\int_{t_2}^{t_0}$ est supposée prise comme la première suivant le chemin rectiligne. A chacune de ces intégrales est affecté un système de coupure différent, et différent du premier. Posons

$$\Phi_1(z) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{F(t,\ z)}{G(t,\ z)}\,dt,$$

$$\Phi_2(z) = \int_{t_2}^{t_0} \frac{F(t,\ z)}{G(t,\ z)}\,dt;$$

l'égalite précédente pourra s'écrire

$$(1) \qquad \Phi(\zeta + \varepsilon) + \Phi_1(\zeta + \varepsilon) + \Phi_2(\zeta + \varepsilon) = 2i\pi R(\theta + \varepsilon_1,\ \zeta + \varepsilon)$$

Donnons maintenant à z la valeur $\zeta + \varepsilon'$; la fonction sous le signe d'intégration sera holomorphe à l'intérieur du triangle $t_0 t_1 t_2$, et le théorème de Cauchy nous donnera

$$(2) \qquad \Phi(\zeta + \varepsilon') + \Phi_1(\zeta + \varepsilon') + \Phi_2(\zeta + \varepsilon') = 0.$$

Retranchant membre à membre les égalités (1) et (2), il vient:

$$\Phi(\zeta + \varepsilon) - \Phi(\zeta + \varepsilon') = [\Phi_1(\zeta + \varepsilon') - \Phi_1(\zeta + \varepsilon)] + [\Phi_2(\zeta + \varepsilon') - \Phi_2(\zeta + \varepsilon)] + 2i\pi R(\theta + \varepsilon_1,\ \zeta + \varepsilon)$$

Si maintenant on fait tendre ε et ε' vers zéro, chacune des fonctions $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ étant holomorphe pour $z = \zeta$, les deux différences contenues dans le second membre tendent vers zéro et il vient pour la différence cherchée

$$\Phi(N) - \Phi(N') = 2i\pi R(\theta,\ \zeta),$$

$R(\theta,\ \zeta)$ désignant le résidu de la fonction $\frac{F(t,\ \zeta)}{F(t,\ \zeta)}$ relatif au pôle $t = \theta$. On voit aussi de quelle manière doivent être supposés pris les points N et N', sans qu'il soit besoin d'insister là-dessus; le point $N(\zeta + \varepsilon)$ doit être tel qu'un observateur parcourant le chemin rectiligne $t_0 t_1$ laisse à sa gauche le point $\theta + \varepsilon_1$ correspondant.

La démonstration précédente n'a pas l'avantage, comme celle que vous avez donnée, de n'exiger que des considérations élémentaires sur les intégrales définies. Cependant, en raison meme de sa généralité et de ses rapports avec le théorème de CAUCHY, il m'a semblé qu'elle n'était pas dépourvue d'intérêt.

Fig. 1.

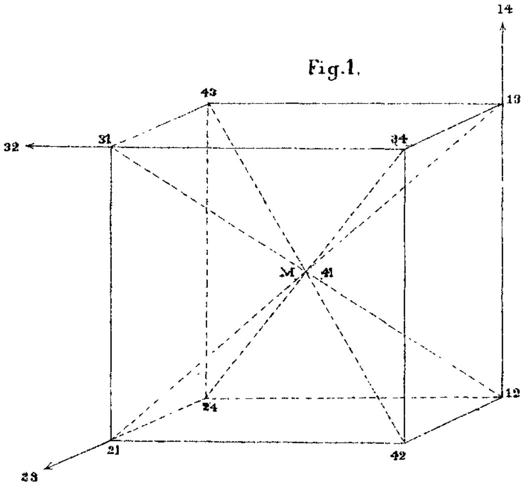


Fig. 2.

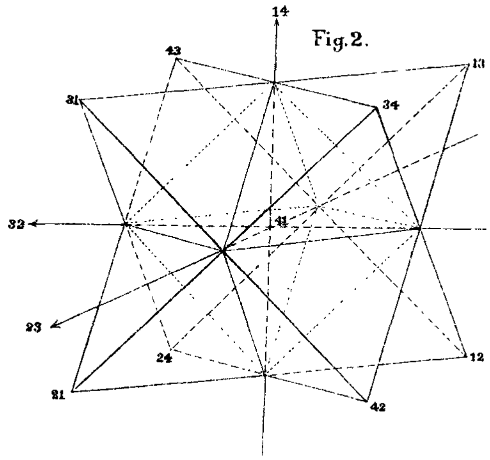


Fig. 3.