SUR UN GROUPE DE THÉORÈMES ET FORMULES DE LA GÉOMÉTRIE ÉNUMÉRATIVE

PAR

H. G. ZEUTHEN.

Lorsqu'on détermine le nombre de solutions d'une question algébro-géométrique, soit par les procédés de l'élimination algébrique, soit par les considérations géométriques plus expéditives qui la remplacent, celles de l'intersection des courbes ou du principe de correspondance, la difficulté principale qui se présente est la détermination de la multiplicité des solutions de différente nature. Pour surmonter cette difficulté on s'est servi parfois d'une méthode *indirecte,* en déduisant par différentes voies des expressions différentes du même nombre qui contiennent des coefficients inconnus, et en se servant de l'égalité de ces expressions pour déterminer les coefficients; ([1]) mais on a aussi des méthodes *directes.* Il serait trop long de citer tous les procédés, inventés par d'éminents géomètres ([2]) pour le dénombrement des intersections confondues de deux courbes; je me bornerai à rappeler que la plupart des méthodes reposent sur la considération des ordres des divergences infiniment petites des branches des courbes, ou bien des ordres de contact de ces branches. Des

([1]) Dans ma thèse de doctorat 1865 sur *les systèmes de coniques* j'ai fait un usage régulier de ce procédé, qui m'a été utile aussi, à côté des déterminations directes, dans beaucoup d'autres recherches. M. SCHUBERT s'en est servi aussi dans ses nombreux travaux, dans le premier sans avoir vu l'usage que j'en avais fait déjà.

([2]) M. M. CAYLEY, DE LA GOURNERIE, PAINVIN, HALPHEN, NÖTHER, STOLZ, SMITH.

considérations analogues peuvent servir au dénombrement des solutions coïncidentes résultant du principe de correspondance. ([1])

Cependant ces méthodes de dénombrement demandent toujours un certain travail. Pour déterminer le nombre de points d'intersection coïncidents entre eux de deux branches de courbes tangentes entre elles, il ne suffit pas de connaître les ordres d'infiniment petites qui sont donnés indirectement par les degrés de multiplicité de ces branches et par les nombres de leurs points d'intersection avec la tangente qui coïncident entre eux; il ne suffit pas même, que les branches soient définies par les formes des séries qui les représentent: il faut connaître aussi les coefficients de ces séries, afin de pouvoir déterminer aussi les ordres de leurs différences. De même, en appliquant le principe de correspondance, on a besoin, pour déterminer le nombre de coïncidences de points x et y qui ont lieu en un point a, de connaître, non seulement le nombre des points y qui coïncident avec a en même temps que x, et celui des points x qui coïncident avec lui en même temps que y, mais aussi les ordres des distances infiniment petites xy des points correspondants qui sont infiniment près de a.

Il est donc clair qu'il faut préférer à ces procédés, où il est possible, des formules où *les dénombrements ne demandent ni ces recherches particulières d'ordres d'infiniment petites,* ni un autre travail équivalent et aussi pénible. M. Halphen ([2]) a montré que, dans les applications de la formule contenant une extension du théorème sur la conservation du genre que j'ai donnée dans le 3^me^ vol. des Mathematische Annalen aux cas où il y a des solutions multiples, le dénombrement de celles-ci se fait immédiatement sans aucune recherche d'ordres d'infiniment petites. M. M. Halphen([3]) et Smith ([4]) ont montré qu'il existe des relations jouissant de la même

---

([1]) J'ai donné des méthodes de ce dénombrement dans les *Nouvelles Annales des Mathématiques* 1867 et à la page 47 de mon Mémoire sur *les systèmes de courbes planes,* inséré aux Mémoires de l'Académie danoise des sciences, 5^me^ série t. X.

([2]) Bulletin de la Société Mathématique de France t. V., p. 9.

([3]) »*Sur les points singuliers des courbes algébriques planes*», publié en 1877 au tome 26 des *Mémoires présentés par divers savants;* mais l'auteur avait déjà à la présentation de ce mémoire consigné les principaux résultats dans une communication publiée dans le Compte rendu du 20 avril 1874.

([4]) Proceedings of the London Mathematical Society, vol. VI.

propriété, et entre les nombres de points d'intersection confondus et de tangentes communes confondues de deux courbes, et entre ceux des points doubles confondus et des tangentes doubles confondues d'une seule courbe.

Je me propose d'établir ici entre ces différents théorèmes une connexion servant à montrer l'importance de la propriété commune dont je viens de parler. Je prendrai pour point de départ un théorème qui s'est présenté à M. Halphen dans le courant de ses recherches sur les points d'intersection et tangentes communes confondus,(1) et auquel aussi d'autres géomètres sont parvenus indépendemment de lui et très-peu après lui. (2) Je montrerai (n° 5) que, grâce à ce théorème fondamental, que je vais énoncer dans le n° 1, et dont je donnerai aussi une autre application (n^{os} 3 et 4), ma démonstration originaire de l'extension du théorème sur le genre conduit immédiatement à la propriété relative aux solutions multiples que M. Halphen a établie autrement.

Les autres théorèmes de M. M. Halphen et Smith dont je viens de parler se présenteront ensuite comme des applications de la formule contenant cette extension du théorème sur le genre (n^{os} 6—8), et serviront ainsi *d'exemples* de la portée que cette formule a obtenue par la découverte de M. Halphen.

1. Le théorème que nous avons appelé fondamental pour les recherches actuelles peut être énoncé de la manière suivante:

»Soit donné un point singulier d'une courbe algébrique ou toutes les branches ont la même tangente, et désignons par ν le degré de multiplicité ponctuelle de la courbe en ce point, c'est à dire: le nombre de points d'intersection confondus de la courbe avec une droite quelconque passant par lui, et par ν' le degré de multiplicité tangentielle, c'est à dire: le nombre de tangentes confondues qui passent par un point quelconque de la tangente donnée: alors $\nu + \nu'$ des points d'intersection de la tangente coïncident avec le point donné, et $\nu + \nu'$ des tangentes qui passent par le point coïncident avec la tangente donnée.»

On démontre sans difficulté ce théorème pour une seule branche complète en introduisant des coordonnées tangentielles dans la série qui

---

(1) Voir à la page 42 du Mémoire que nous venons de citer.

(2) M. M. Stolz et Nöther dans les t. VIII et IX des Mathematische Annalen. Le travail du premier de ces savants est daté du 16 mai 1874.

la représente dans un système de coordonnées ponctuelles.(1) L'extension au cas où plusieurs branches complètes sont tangentes entre elles se fait immédiatement.

2. Donnons une forme algébrique au théorème géométrique que nous venons d'énoncer.

Soit donnée une équation $f(x, y) = 0$ à deux variables x et y, du degré m_1 en x et du degré m_2 en y, ou, ce qui est plus commode, une équation homogène du degré m_1 en x_1 et x_2, et homogène du degré m_2 en y_1 et y_2. Si l'on détermine par les valeurs de $\frac{x_1}{x_2}$ et $\frac{y_1}{y_2}$ qui satisfont à cette équation des droites de deux faisceaux aux centres P et Q (et si l'on choisit les droites fixes $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ ainsi que la droite PQ ne corresponde pas à elle-même), l'équation, que nous écrirons toujours $f(x, y) = 0$, représentera une courbe de l'ordre $n = m_1 + m_2$ ayant un point m_1-tuple à P et un point m_2-tuple à Q.

En égalant à zéro le discriminant $\varphi(x)$ de $f(x, y)$ par rapport à y, on aura l'équation en x qui représente les tangentes passant par P, y compris les droites joignant P aux autres points multiples, à l'exception de Q, autant de fois que la courbe $\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$ — qui sera la polaire de P si la droite $y_2 = 0$ coïncide avec la droite PQ — a d'intersections confondues en ces points, et non compris les tangentes en P à moins qu'elles n'aient plus de $m_1 + 1$ intersections confondues. Le discriminant $\psi(y)$ par rapport à x représente de la même manière les tangentes passant par Q. Les ordres de ces deux discriminants $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ se trouvent par la première formule Pluckerienne.(2) Si P et Q sont les seuls points multiples de la courbe auxiliaire, celle-ci sera de la classe:

---

(1) Voir aux endroits cités, ou à la page 212 du vol. X des Mathematische Annalen. M. Cayley s'est servi en 1866 du même procédé (On the Higher Singularities of a Plane Curve. Quart. Journ. vol. VII), mais sans énoncer directement le théorème dont nous parlons ici.

(2) Remarquons, du reste, que, dans ce qui suit, on se sert seulement de la *différence* des ordres des discriminants, qu'on obtient, sans aucune application des équations Pluckeriennes, en égalant les nombres totals des tangentes à la courbe $f = 0$ qui passent par P et Q. La même observation a permis une simplification de la démonstration de M. Bertini du théorème sur la conservation du genre (Comptes rendus t. LXX p. 742), que je rappelle parce qu'elle me semble montrer qu il ne soit pas — comme dit M.

$$n' = (m_1 + m_2)(m_1 + m_2 - 1) - m_1(m_1 - 1) - m_2(m_2 - 1) = 2m_1m_2.$$

Supposant encore qu'aucune droite par P ne rencontre la courbe en plus de $m_1 + 1$ points coïncidant avec P, on aura $2m_1(m_2 - 1)$ tangentes qui passent par P sans avoir P pour point de contact. Ce nombre est donc l'ordre du discriminant $\varphi(x)$, et il ne cesse pas de l'être dans les cas où les suppositions faites ici ne sont pas en vigueur. De même, le discriminant $\psi(y)$ est de l'ordre $2m_2(m_1 - 1)$.

Considérons maintenant un point singulier ou simple M de la courbe. Si aucune tangente en M ne passe ni par P ni par Q, ce point correspond a des facteurs de la même multiplicité (zéro, si le point est simple) de tous les deux discriminants; mais si MP a ν_2 points d'intersection coïncidant avec M, et si MQ en a ν_1, et si l'on désigne par ξ le degré de multiplicité du facteur $(a_2x_1 - a_1x_2)$ du discriminant $\varphi(x)$ qui détermine PM, et par η le degré de multiplicité du facteur $(b_2y_1 - b_1y_2)$ du discriminant $\psi(y)$ qui détermine QM, il résulte du n° 1 que l'on a:

$$\xi - \eta = \nu_2 - \nu_1, \tag{1}$$

les deux membres de cette équation indiquant de combien le degré de multiplicité tangentielle de MP dépasse celui de MQ.

En appliquant la formule (1) à tous les points de la courbe, et en substituant à $\sum\xi$ et $\sum\eta$ les expressions $2m_1(m_2 - 1)$ et $2m_2(m_1 - 1)$ des ordres des discriminants, on trouve

$$2(m_2 - m_1) = \sum(\nu_2 - \nu_1), \tag{2}$$

où il suffit évidemment d'étendre la sommation aux points de la courbe qui donnent des valeurs différentes entre elles de ν_1 et ν_2.

SCHUBERT dans les Mathematische Annalen t. XVI p. 180 — une »*berechtigte Forderung*» à la simplicité géométrique de la démonstration de ce théorème qu'elle repose seulement sur le principe de correspondance. On verra du présent article que je ne regarde pas même, dans ce cas, l'usage de ce principe comme avantageux s'il y a des singularités supérieures, ni non plus pour l'extension du théorème. Je saisis l'occasion pour faire observer que la faute, montrée par M. SCHUBERT, d'une démonstration qui porte mon nom dans le livre de Clebsch-Lindemann (p. 681) n'appartient pas à moi, ce que montre aussi la note de M. Lindemann en bas de la page citée.

Pour donner un sens purement algébrique aux formules (1) et (2) nous avons seulement à remarquer encore que ν_1 *(ou ν_2) est le degré de multiplicité du facteur $a_2x_1 - a_1x_2$ (ou $b_2y_1 - b_1y_2$) qu'obtient $f(x, y)$ pour* $\frac{y_1}{y_2} = \frac{b_1}{b_2}\left(ou\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}\right)$.

3. Appliquons premièrement la formule (1) au cas où $m_1 = m_2 = 2$, c'est à dire à une forme binaire et du second ordre en deux couples de variables. Alors les deux discriminants seront des formes binaires quartiques.

Supposons maintenant que le discriminant $\varphi(x)$ contient le facteur quadratique $(a_2x_1 - a_1x_2)^2$. En égalant ce facteur à zéro, on rendra la forme donnée égale à un carré $(b_2y_1 - b_1y_2)^2$.

Aux valeurs $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}$ et $\frac{y_1}{y_2} = \frac{b_1}{b_2}$ correspond ici, dans la formule (1), $\xi = 2$, $\nu_2 = 2$, et on a évidemment $\nu_1 \geqq 1$. Il en résulte que $\eta \geqq 1$, mais alors il faut que pour $b_2y_1 - b_1y_2 = 0$ la forme donnée ait le facteur $(a_2x_1 - a_1x_2)^2$, ou bien que $\nu_1 = 2$, $\eta = 2$.

Les deux discriminants auront donc en même temps deux facteurs égaux ou bien, leurs discriminants doivent s'évanouir en même temps. Ces discriminants de $\varphi(x)$ et $\psi(y)$, qui sont des fonctions rationnelles des coefficients de la forme donnée, sont donc égaux, à un facteur numérique près, qui doit être, à cause de la symétrie, égal à ± 1; en choisissant un simple exemple(¹) on voit qu'il a la valeur de $+1$. La forme donnée représente, dans le cas où le discriminant commun aux deux discriminants $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ est égal à zéro, une courbe à un *nouveau* point double (à côté de P et Q).

Note. Il en sera autrement dans les cas où m_1 ou m_2 est > 2. Si $m_2 > 2$ il devient possible que $\nu_2 = 3$, et si $m_2 > 3$ il sera possible qu'en égalant à zéro deux facteurs égaux entre eux du discriminant $\varphi(x)$ on réduise la forme donnée à contenir deux couples de facteurs égaux entre eux. En faisant usage de faits connus de la théorie des systèmes de courbes,(²) on trouve que les discriminants des deux discriminants $\varphi(x)$

(¹) Si la forme est $(a_1x_1^2 + a_2x_2^2)y_1y_2 + (b_1y_1^2 + b_2y_2^2)x_1x_2$ le discriminant des deux discriminants sera, à un constant numérique près, égal à $a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2(a_1a_2 - b_1b_2)^2$ — ce qu'on peut voir sans le calculer.

(²) Voir mon article sur les systèmes de courbes planes dans le vol. X des Mémoires de l'Académie Danoise des Sciences (5^me série).

et $\psi(y)$ ont en général *un facteur simple commun* correspondant aux cas où la courbe représentée par la forme donnée a un point double, et que chacun d'eux contient encore *deux fois* un facteur correspondant aux cas où une tangente double, et *trois fois* un facteur correspondant aux cas où une tangente stationnaire, passe par P ou Q.

4. Nous déduirons des conséquences ultérieures du fait que nous venons de trouver, que les deux discriminants d'une forme binaire et du second ordre en deux couples de variables ont le même discriminant. Désignons les invariants des deux discriminants du quatrième ordre $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ par i_1, j_1; i_2, j_2, les lettres ayant les mêmes significations que dans les Leçons de CLEBSCH-LINDEMANN. Alors on a identiquement

$$i_1^3 - 6j_1^2 = i_2^3 - 6j_2^2,$$

ou bien

$$(i_1 - i_2)(i_1^2 + i_1 i_2 + i_2^2) = 6(j_1 - j_2)(j_1 + j_2),$$

où i_1 et i_2 sont des fonctions rationnelles du quatrième degré, j_1 et j_2 des fonctions rationnelles du sixième degré, des coefficients de la forme donnée $f(x, y)$; car les coefficients de ses deux discriminants sont du second degré. Le second facteur du premier membre ne peut être décomposé en des facteurs rationnels, à moins que ceux-ci ne soient aussi des facteurs de i_1 et i_2, et par conséquent aussi de $i_1 - i_2$. Il s'ensuit, que chacun des deux facteurs du sixième degré du second membre soit aussi facteur de $i_1 - i_2$, qui n'est que du quatrième degré. $i_1 - i_2$ est donc égal à zéro, et par conséquent aussi $j_1 - j_2$ ou $j_1 + j_2$. On a donc identiquement $i_1 = i_2$, $j_1 = \pm j_2$. Un exemple (1) montre qu'il faut prendre le premier signe.

Nous avons donc démontré que *les deux discriminants d'une forme binaire et du second ordre en deux couples de variables ont les mêmes invariants.*

Nous avons énuméré ailleurs (2) les principales applications géomé-

---

(1) Dans l'exemple de la première note au n° 3 on aura

$$j_1 = j_2 = \frac{8}{9}(a_1 a_2 + b_1 b_2)(a_1 a_2 - 2b_1 b_2)(2a_1 a_2 - b_1 b_2)$$

(2) Proceedings of the London Mathematical Society vol. X p. 196.

triques de ce théorème, qui se présente déjà dans la transformation d'Euler de la première intégrale elliptique.

5. Revenons au cas général. La formule (2) du n° 2 s'applique immédiatement à la correspondance de deux courbes unicursales dont les points correspondants sont déterminés par les valeurs de $\frac{x_1}{x_2}$ et $\frac{y_1}{y_2}$ qui satisfont à $f(x, y) = 0$.

A un point x de l'une correspondent m_2 points y de l'autre, et à un point y correspondent m_1 points x. Pour une couple de points correspondants a et b, ν_1 désigne le nombre des points x qui coïncident avec a lorsque y coïncide avec b, et ν_2 le nombre des points y qui coïncident avec b, lorsque x coïncide avec a.

La généralisation de la même formule qui la rend applicable à la correspondance des points de deux courbes quelconques se fait par une application très-simple de la formule trouvée elle-même. Soit donnée une relation entre les points x et y de deux courbes algébriques des ordres n_1 et n_2, des classes n'_1 et n'_2 etc., telle qu'à un point x correspondent μ_2 points y, et à un point y, μ_1 points x. Joignons le point mobile x de la première courbe à un point fixe P, et les points correspondants y à un point fixe Q: alors il existe entre les faisceaux Px et Qy une relation — représentée de la manière indiquée dans le n° 2 par le lieu des points d'intersection des droites Px et Qy — telle qu'à toute droite Px correspondent $m_2 = n_1 \, . \, \mu_2$ droites Qy, et à toute droite Qy correspondent $m_1 = n_2 \, . \, \mu_1$ droites Px. Cherchons, pour faire usage de la formule (2), les droites Px, telles que deux ou plusieurs des droites correspondantes Qy coïncident entre elles, et les droites Qy, telles que deux ou plusieurs des droites correspondantes Px coïncident entre elles.

Des droites Qy correspondant à une droite Px peuvent coïncider des trois manières suivantes:

1° La droite Px rencontre la première courbe en des points $x', x'' \ldots . x^{(r)}$ correspondant *respectivement* à des points $y', y'' \ldots . y^{(r)}$ d'une droite passant par Q. Alors on aura entre cette droite et Px une correspondance représentée, dans le second membre de l'équation (2), par les nombres $\nu_1 = \nu_2 = r$, de façon que cette correspondance n'y ait aucune influence.

2° La droite Px rencontre la première courbe en plusieurs points x coïncidant avec un point O. Alors il n'est pas nécessaire que les groupes des μ_2 points correspondants coïncident entre eux; mais cette coïncidence a lieu toujours si les points x appartiennent à la même branche complète. En effet, les coordonnées des points voisins de O sur cette branche s'expriment par une variable t au moyen de séries à puissances entières et croissantes, le point O correspondant à la valeur $t = 0$; car telle est la définition d'une branche complète. Le groupe des μ_2 points y qui correspondent à un point mobile x de la branche, dépend d'une manière uniforme des coordonnées du point x, par conséquent aussi de la variable t. Il ne correspond donc aussi qu'un seul groupe à $t = 0$, et à deux points coïncidant avec O deux groupes coïncidant entre eux. Il est évident de plus qu'en même temps que x parcourt la première courbe d'une manière continue, les μ_2 points y qui y correspondent se mouvront d'une manière continue sur l'autre courbe. Aucun d'eux ne peut passer d'une branche complète d'un point singulier à une autre; car on peut faire correspondre d'une manière uniforme à la seconde courbe une nouvelle courbe où les différentes branches complètes sont remplacées par des points distincts, et par conséquent un passage d'une branche à une autre par un mouvement discontinu. Il s'ensuit qu'on peut regarder, dans la recherche actuelle, les points de l'une ou l'autre des deux courbes qui coïncident *sans* appartenir à la même branche complète comme des points distincts.

3° La droite Px passe par un point x auquel correspond un groupe de points y dont plusieurs coïncident entre eux.

Nous voyons ainsi que, pour avoir tous les termes différents de zéro du second membre de l'équation (2), il suffit de considérer la correspondance d'une droite par P rencontrant une seule branche de la première courbe en ρ_1 points x coïncidant avec un point fixe a, et d'une droite par Q rencontrant une seule branche de la seconde courbe en ρ_2 points y coïncidant avec un point fixe b, et de supposer que ν_2 des μ_2 points y qui correspondent à a coïncident avec b, et ν_1 des μ_1 points x qui correspondent à b coïncident avec a. Alors on obtient

$$(3) \qquad 2(n_1\mu_2 - n_2\mu_1) = \sum (\rho_1\nu_2 - \rho_2\nu_1),$$

où la somme $\sum$ est étendue à toutes les couples de points correspondants des deux courbes qui donnent des termes différents de zéro — et à autant d'autres qu'on veut. Afin d'y distinguer l'influence des singularités des courbes de celle de la nature de la correspondance, nous ferons usage de la transcription suivante

$$\rho_1\nu_2 - \rho_2\nu_1 = (\rho_1 - 1)\nu_2 - (\rho_2 - 1)\nu_1 + (\nu_2 - \nu_1). \tag{4}$$

Pour le premier terme $(\rho_1 - 1)\nu_2$ il suffit d'étendre la sommation à tous les points a de la première courbe où une seule branche est rencontrée par une droite passant par P en plus d'un point ($\rho_1 > 1$), et à tous les points de la seconde courbe qui y correspondent. Or la somme des valeurs des multiplicités ν_2 des points b correspondant à chacun de ces points a est égale à μ_2. On obtient ainsi, dans la formule (3), le terme

$$\mu_2 \cdot \sum\nolimits_1 (\rho_1 - 1),$$

la sommation $\sum_1$ étant étendue ici, et dans ce qui suit, à tous les points de la courbe (x) qui donnent des termes différents de zéro.

On obtient de la même manière le terme

$$-\mu_1 \cdot \sum\nolimits_2 (\rho_2 - 1),$$

la sommation $\sum_2$ étant étendue à tous les points de la courbe (y) qui donnent des termes différents de zéro.

Il restera encore le terme

$$\sum (\nu_2 - \nu_1)$$

où la sommation — exactement comme dans le cas de deux courbes unicursales — peut être étendue à tous les cas où deux ou plusieurs points correspondant à un seul point coïncident entre eux.

On parvient ainsi à la formule suivante

$$\sum (\nu_2 - \nu_1) = \mu_1 \left[\sum\nolimits_2 (\rho_2 - 1) - 2n_2\right] - \mu_2 \left[\sum\nolimits_1 (\rho_1 - 1) - 2n_1\right], \tag{5}$$

où le facteur de μ_1 (ou μ_2) dépend seulement de la courbe (y) (ou (x)).

Le point P pouvant être un point quelconque du plan, on peut supposer qu'il ne se trouve ni sur une tangente singulière ni sur la tangente en un point singulier de la courbe (x). $\sum_1(\rho_1 - 1)$ est donc la somme de la classe n'_1 de la courbe (x) et de $\sum_1(\sigma_1 - 1)$ où σ_1 est le degré de multiplicité d'une branche complète quelconque de la courbe (x).

On pose

$$n'_1 + \sum_1(\sigma_1 - 1) - 2n_1 = 2(p_1 - 1),$$

où p_1 est appelé le *genre* de la courbe (x). En faisant de même pour la courbe (y), on aura la formule

$$\sum(\nu_2 - \nu_1) = 2\mu_1(p_2 - 1) - 2\mu_2(p_1 - 1). \tag{6}$$

Dans le cas où toutes les valeurs de ν_1 et ν_2 restent < 3 on peut substituer au premier membre de cette équation la différence du nombre des cas où deux points y correspondant à un seul point x coïncident entre eux, et de celui où deux points x correspondant à un seul point y coïncident, et on obtiendrait ainsi mon extension originaire du théorème sur la conservation du genre. La formule qu'on trouve alors est encore applicable au cas général si l'on regarde comme solutions multiples les couples de points correspondants où ν_1 ou ν_2 est > 2; mais il est évidemment le plus simple d'employer alors immédiatement la formule (6), qui est due à M. Halphen.

6. A cause de la circonstance que l'application de la formule (6) ne demande aucune détermination de coefficients inconnus dépendant des ordres de quantités infiniment petites, elle est à préférer — quand il est possible d'en faire usage — aux applications du principe de correspondance. Nous donnerons quelques exemples servant à montrer cet avantage.

On sait que deux courbes des ordres n_1 et n_2 se rencontrent en $n_1 . n_2$ points. La détermination de ces points dépendant d'une élimination, et le nombre de ceux qui coïncident avec un point de contact de branches des deux courbes dépendant des ordres de distances infiniment petites, il ne sera pas possible de déterminer ce dernier nombre par la formule (6). De même il sera impossible de déterminer immédiatement par la formule (6) le nombre des tangentes communes à deux courbes qui coïncident entre elles. Mais après avoir déterminé l'un de ces nombres, il sera possible d'en déduire l'autre par la formule (6), appliquée à la recherche d'une expression de la différence $n'_1 n'_2 - n_1 n_2$ des nombres des tangentes communes et des points d'intersection des deux courbes.

Etablissons, à cet effet, la correspondance suivante: la tangente à la première courbe (x) en un point x passe par les points correspondants y de l'autre. Alors on a, en faisant usage des notations du n° 5,

$$\mu_1 = n'_1, \qquad \mu_2 = n_2. \tag{7}$$

En substituant, dans la formule (6), ces valeurs, ainsi que

$$2(p_1 - 1) = n_1 + \sum\nolimits_1 (\sigma'_1 - 1) - 2n'_1,$$

où σ'_1 est le degré de multiplicité tangentielle d'une branche complète quelconque de la courbe (x), et qui résulte de l'expression déjà donnée du genre, si l'on observe que deux courbes qui sont des polaires réciproques doivent être du même genre, et

$$2(p_2 - 1) = n'_2 + \sum\nolimits_2 (o_2 - 1) - 2n_2,$$

on la réduira à

$$n'_1 n'_2 - n_1 n_2 = \sum(\nu_2 - \nu_1) - n'_1 \sum\nolimits_2 (\sigma_2 - 1) + n_2 \sum\nolimits_1 (\sigma'_1 - 1). \tag{8}$$

Pour trouver les termes de la somme $\sum(\nu_2 - \nu_1)$ qui sont différents de zéro, il faut distinguer les quatres espèces suivantes pour la correspondance de x et y:

1° Ni le point x ne coïncide avec y, ni la tangente en x avec la tangente en y: alors on a

$$\nu_1 = \sigma'_1, \qquad \nu_2 = \sigma_2.$$

2° Le point x coïncide avec y; les tangentes aux branches auxquelles appartiennent ces points sont différentes entre elles: alors on a (n° 1)

$$\nu_1 = \sigma_1 + \sigma'_1, \qquad \nu_2 = \sigma_2.$$

3° La tangente à la branche à laquelle appartient x coïncide avec la tangente à la branche à laquelle appartient y; mais ces deux points de contact sont distincts entre eux; alors on a

$$\nu_1 = \sigma'_1, \qquad \nu_2 = \sigma_2 + \sigma'_2.$$

4° Les branches auxquelles appartiennent x et y sont tangentes entre elles, x et y coïncidant avec le point de contact; alors on a

$$\nu_1 = \sigma_1 + \sigma'_1, \qquad \nu_2 = \sigma_2 + \sigma'_2.$$

Pour trouver une expression plus simple du second membre de l'équation (8), il est le plus commode de réunir, pour toute couple de points correspondants x et y où, du moins, une des différences $\nu_2 - \nu_1$, $\sigma_2 - 1$ ou $\sigma'_1 - 1$ est différente de zéro, la valeur de $\nu_2 - \nu_1$ aux termes correspondants de $-n'_1 \sum_2 (\sigma_2 - 1) + n_2 \sum_1 (\sigma'_1 - 1)$, c'est à dire à la valeur de $(\sigma_2 - 1)$ qui appartient à y multipliée par le nombre pour lequel compte la tangente en x dans celui des n'_1 tangentes à la courbe (x) qui passent par y — et prise au signe *moins* — et à la valeur de $(\sigma'_1 - 1)$ qui appartient à x multipliée par le nombre pour lequel compte y dans celui des n_2 intersections de la tangente en x avec la courbe y.(¹)

En appliquant successivement ce procédé aux quatre espèces de correspondance on trouve (en donnant aux cas respectifs les mêmes n^{os} que tout à l'heure)

1° $\sigma_2 - \sigma'_1 - \sigma'_1(\sigma_2 - 1) + \sigma_2(\sigma'_1 - 1) = 0$

2° $\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma'_1 - (\sigma_1 + \sigma'_1)(\sigma_2 - 1) + \sigma_2(\sigma'_1 - 1) = -\sigma_1\sigma_2$

3° $\sigma_2 + \sigma'_2 - \sigma'_1 - \sigma'_1(\sigma_2 - 1) + (\sigma_2 + \sigma'_2)(\sigma'_1 - 1) = \sigma'_1\sigma'_2$

4° $\sigma_2 + \sigma'_2 - \sigma_1 - \sigma'_1 - (\sigma_1 + \sigma'_1)(\sigma_2 - 1) + (\sigma_2 + \sigma'_2)(\sigma'_1 - 1) = \sigma'_1\sigma'_2 - \sigma_1\sigma_2$

La sommation des termes de la seconde espèce devant être étendue à tous les points d'intersection de branches complètes des deux courbes qui ne sont pas des points de contact, celle des termes de la troisième espèce à toutes les tangentes communes qui ont des points de contact distincts, et celle de la quatrième espèce à tous les points de contact, la somme totale sera égale à $S'(\sigma'_1\sigma'_2) - S(\sigma_1\sigma_2)$, où la somme S est

(¹) Dans les cas où la position des courbes n'a rien de particulier, on trouve seulement que la différence des nombres des tangentes communes et des points d'intersection est égale à $n'_1 n'_2 - n_1 n_2$. Il suffirait de considérer ici, à côté de ce cas général, celui où deux branches complètes sont tangentes entre elles. Voulant montrer avant tout la méthode, nous ne nous y sommes pas bornés.

étendue à tous les cas où des branches complètes ont un point commun, S' à tous ceux où elles ont une tangente commune. En commençant par n'exécuter la première de ces sommations que pour les branches passant par un seul point, on aura pour somme $\alpha_1\alpha_2$, *où* α_1 *et* α_2 *sont les multiplicités totales de ce point appartenant aux deux courbes,* de façon que $S(\sigma_1\sigma_2) = \boldsymbol{S}(\alpha_1\alpha_2)$, où aussi la somme $\boldsymbol{S}$ est étendue à tous les points communs aux deux courbes. On obtient de même $S'(\sigma_1'\sigma'_2) = \boldsymbol{S}'(\alpha'_1\alpha'_2)$ *où* α'_1 *et* α'_2 *sont les degrés totals de multiplicité d'une tangente commune aux deux courbes,* et ou la somme $\boldsymbol{S}'$ s'étend à toutes ces tangentes. On trouve ainsi

$$n'_1n'_2 - n_1n_2 = \boldsymbol{S}'(\alpha'_1\alpha'_2) - \boldsymbol{S}(\alpha_1\alpha_2). \tag{9}$$

Le seul résultat contenu à cette formule qui ne soit pas évident immédiatement, celui que la différence du nombre des tangentes communes à deux courbes qui coïncident avec la tangente à deux branches complètes tangentes entre elles, et du nombre des points d'intersection coïncidant avec leur point de contact, est égale à $\sigma'_1\sigma'_2 - \sigma_1\sigma_2$, est dû à M. Halphen (1) dont la démonstration — de même que celle de M. Smith (2) — diffère entièrement de celle que nous venons d'en donner.

7. Pour déduire les *formules de Plücker* on se sert ordinairement, soit d'intersections de la courbe donnée avec ses courbes polaires et avec sa courbe Hessienne, soit du principe de correspondance. Pour déterminer, par cette déduction, l'influence de singularités supérieures on a besoin de connaître les ordres des divergences infiniment petites des branches totales et partielles entre elles. Aussi l'abaissement de la classe, ou de l'ordre, dû à un point singulier, ou à une tangente singulière, dépend-il nécessairement de ces ordres d'infiniment petites; mais indépendemment de ceux-ci il existe une relation entre les deux abaissements, ce qui se montrera par la circonstance qu'il suffit d'appliquer les procédés dont nous venons de parler à la déduction d'une *seule* des formules Plückériennes — par exemple de celle qui indique la classe d'une courbe d'ordre

(1) Points singuliers des courbes algébriques planes. (Mémoires prés. par divers Savants XXVI, 2). Le théorème ressort de la combinaison de l'Art. I Théor. II Cor., et de l'Art. IV Théor. V.

(2) Proceedings of the London Mathematical Society, vol. VI p. 167.

donné — pendant que les autres peuvent être démontrées par une application de la formule (6) ou du théorème sur le genre. L'influence des singularités supérieures sur ces dernières formules se présentera alors d'elle-même, sans aucune étude particulière des ordres d'infiniment petits.

Premièrement on a, en faisant usage de l'expression du genre et de l'identité des genres de la courbe donnée et de sa polaire réciproque, les équations déjà mentionnées

$$(10) \qquad 2(p-1) = n' + \sum(\sigma - 1) - 2n = n + \sum(\sigma' - 1) - 2n',$$

les notations étant les mêmes que dans le n° 5, et les sommations étant étendues à tous les termes différents de zéro, et, évidemment, à autant de termes égaux à zéro qu'on veut. Il est donc permis d'étendre toutes les deux sommations aux mêmes points de la courbe. On déduit ainsi de (10)

$$(11) \qquad 3(n' - n) = \sum(\sigma' - \sigma),$$

où la sommation s'étend encore à tous les termes différents de zéro.

On obtient une autre formule par l'application à une seule courbe d'une correspondance, semblable à celle du n° 6. On fait correspondre à chaque point x de la courbe les $n-2$ points y où la tangente en x rencontre encore la courbe. Pour appliquer la formule (6) à cette correspondance il faut substituer

$$\mu_1 = n' - 2, \qquad \mu_2 = n - 2,$$

et il sera le plus commode de substituer à $2(p_1 - 1)$ la seconde, et à $2(p_2 - 1)$ la première des expressions (10). On trouve alors

$$(12) \quad n'^2 - 6n' - n^2 + 6n = \sum(\nu_2 - \nu_1) - (n' - 2)\sum(\sigma - 1) + (n - 2)\sum(\sigma' - 1),$$

où toutes les sommes sont étendues à tous les termes différents de zéro.

En abordant la détermination de $\sum(\nu_2 - \nu_1)$, on rencontre premièrement les mêmes quatre correspondances de points de branches complètes distinctes que dans le cas où x et y appartiennent à des courbes différentes, et chacune de ces correspondances sera représentée, dans tout le second membre de l'équation (12), par exactement les mêmes termes que dans le second membre de l'équation (8). En observant encore que chaque combinaison de deux branches qui ont un point commun ou une tangente commune se présente ici deux fois, parce que l'une ou l'autre des deux branches peut contenir le point x de la correspondance, on voit que la somme de ces termes sera égale à $2(S'(\sigma'_1\sigma'_2) - S(\sigma_1\sigma_2))$, où les sommes S et S' s'étendent à toutes les combinaisons de l'une ou l'autre de ces deux espèces.

A côté de ces correspondances de points x et y de branches différentes entre elles on a à considérer, dans le cas actuel, celles où les points correspondants x et y coïncident entre elles sur une seule branche. Alors on a

$$\nu_1 = \nu_2 = \sigma + \sigma' - 2.$$

$\nu_2 - \nu_1$ devient donc égal à zéro, de façon que ces correspondances ne seront représentées, dans le second membre de (12), que par les termes contenus dans

$$-(n'-2)\sum(\sigma-1) + (n-2)\sum(\sigma'-1),$$

qui ont la valeur de

$$-(\sigma+\sigma'-2)(\sigma-1) + (\sigma+\sigma'-2)(\sigma'-1) = (\sigma+\sigma'-2)(\sigma'-\sigma).$$

La formule (12) se réduit donc à

$$(13)\quad n'^2 - 6n' - n^2 + 6n = 2S'(\sigma'_1\sigma'_2) - 2S(\sigma_1\sigma_2) + \sum(\sigma'^2 - 2\sigma' - \sigma^2 + 2\sigma),$$

où la dernière sommation s'étend à tous les points de la courbe qui donnent des termes différents de zéro.

8. Il est possible de déduire des équations (11) et (13) une nouvelle relation qui ne dépend plus des multiplicités des différentes branches, mais, de même que la formule (9), seulement des multiplicités totales des points et tangentes singuliers. En ajoutant, à cet effet, l'équation (11) à l'équation (13), où il est permis d'étendre la sommation $\sum$ aux mêmes termes, on trouve

$$(14)\quad n'^2 - 3n' - n^2 + 3n = 2S'(\sigma'_1\sigma'_2) - 2S(\sigma_1\sigma_2) + \sum(\sigma'^2 - \sigma' - \sigma^2 + \sigma).$$

Réunissons ici les termes du second membre qui sont formés des degrés de multiplicité σ des branches d'un seul point σ-tuple. On trouve

$$-\sigma_1^2-\sigma_2^2-\ldots-\sigma_\gamma^2-2\sigma_1\sigma_2-\ldots-2\sigma_{\gamma-1}\sigma_\gamma+\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_\gamma=-a^2+a.$$

En faisant de même pour tous les points où passe une ou plusieurs branches représentées dans le second membre de (14), et en réunissant d'une manière semblable les termes appartenant aux différents contacts de toute tangente singulière, on trouve

$$n'^2-3n'-n^2+3n=\sum(a'^2-a')-\sum(a^2-a), \tag{15}$$

où α et α' sont les degrés de multiplicité totale de tous les points singuliers et tangentes singulières.[1]

Si la courbe n'a que des singularités ordinaires, les formules trouvées (10), (11), (13) et (15), dont trois sont indépendentes entre elles, se réduisent à un système de deux relations PLÜCKÉRIENNES augmenté d'une formule servant à exprimer le genre p par les nombres PLÜCKÉRIENS. On a en effet, dans ce cas, en désignant par d et e les nombres des points doubles et cuspidaux, et par d' et e' les nombres des tangentes doubles et tangentes d'inflexion:

$$\sum(\sigma-1)=e,\quad \sum(\sigma'-1)=e',\quad \sum(\sigma'-\sigma)=e'-e$$

$$S'(\sigma'_1\sigma'_2)=d',\quad S(\sigma_1\sigma_2)=d,\quad \sum(\sigma'^2-2\sigma'-\sigma^2+2\sigma)=e'-e$$

$$\sum(a'^2-a')=2d'+2e',\quad \sum(a^2-a)=2d+2e.$$

On sait qu'il est possible d'appliquer les formules PLÜCKÉRIENNES aussi aux cas, où la courbe a des singularités supérieures, en représentant chacune de celles-ci par les équivalents PLÜCKÉRIENS introduits par M. CAYLEY,[2] que nous désignerons par δ, ε, δ', ε'. Les conditions imposées à ces équivalents par les formules qui nous occupent — auxquelles il

---

[1] La substitution de l'équation (14) à (13) permettait d'éviter d'introduire un nombre infini de termes par la séparation des termes qui contiennent σ de ceux qui contiennent σ'. — Notre formule (15) se distingue d'une formule tout-à-fait semblable de M. NÖTHER par les significations des lettres: ses k ne désignent pas comme nos α les *multiplicités immédiates* des points singuliers, mais celles des points multiples qui en résultent par une décomposition; et la même différence a lieu entre les significations de ses $k^{(1)}$ et de nos α.

[2] On the Higher Singularities of a Plane Curve. Quarterly Journal of Mathematics, vol. VII.

faut ajouter celle que leur impose la première formule PLÜCKÉRIENNE — se présentent d'elles-mêmes. Les formules (10) donnent pour représenter une singularité supérieure [1]

$$\varepsilon = \sum(\sigma - 1), \qquad \varepsilon' = \sum(\sigma' - 1), \tag{16}$$

et la différence $\delta' - \delta$ peut être déterminée par l'une ou l'autre des équations

$$2(\delta' - \delta) + (\varepsilon' - \varepsilon) = 2S'(\sigma'_1\sigma'_2) - 2S(\sigma_1\sigma_2) + \sum(\sigma'^2 - 2\sigma' - \sigma^2 + 2\sigma) \tag{17}$$

ou

$$2(\delta' + \varepsilon' - \delta - \varepsilon) = \sum(\alpha'^2 - \alpha') - \sum(\alpha^2 - \alpha), \tag{18}$$

qu'on obtient de (13) et (15), les sommes étant étendues à toutes les branches et combinaisons appartenant à la singularité.

Cherchons par exemple la représentation de la singularité formée par γ branches complètes tangentes entre elles.

Ayant alors

$$\alpha = \sum(\sigma), \qquad \alpha' = \sum{}'(\sigma'),$$

on trouve (16) et (18)

$$\varepsilon = \alpha - \gamma, \qquad \varepsilon' = \alpha' - \gamma$$

$$2(\delta' + \varepsilon' - \delta - \varepsilon) = (\alpha' - \alpha)(\alpha' + \alpha - 1),$$

d'où

$$2(\delta' - \delta) = (\varepsilon' - \varepsilon)(\varepsilon' + \varepsilon + 2\gamma - 3). \tag{19}$$

Dans le cas où $\gamma = 1$, c'est à dire pour une seule branche complète, on trouve

$$2(\delta' - \delta) = (\varepsilon' - \varepsilon)(\varepsilon' + \varepsilon - 1). \tag{20}$$

Cette relation est due à M. SMITH; [2] il n'est pas difficile d'en revenir à l'équation (19), si l'on applique en même temps l'équation (9) aux combinaisons des branches.

---

[1] Il peut être commode de se servir des équivalents, remplaçant les singularités seulement dans les équations PLÜCKÉRIENNES propres, et non pas dans celle qui exprime le genre. Alors il faut remplacer (16) par

$$\varepsilon' - \varepsilon = \sum(\sigma' - \sigma).$$

[2] Proceedings of the London Mathematical Society VI p. 166.