EXTENSION D'UN THÉORÈME DE LIOUVILLE.

PAR

TORSTEN CARLEMAN

à STOCKHOLM.

C'est l'étude de certaines fonctions entières intimément liées aux recherches de M. MITTAG-LEFFLER sur le prolongement analytique qui m'a conduit à l'extension suivante d'un théorème bien connu de LIOUVILLE.

Soit $\omega(\varphi)$ *une fonction positive (finie ou infinie) telle que l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} \omega(\varphi)\, d\varphi \tag{1}$$

existe. Toute fonction entière $f(z)$ *qui satisfait à l'inégalité*

$$|f(z)| < e^{e^{\omega(\varphi)}}, \qquad (z = r e^{i\varphi}) \tag{2}$$

se réduit nécessairement à une constante.

Supposons par impossible l'existence d'une fonction entière $f(z)$ non constante satisfaisant à la condition (2) et considérons la fonction

$$\log |f(r e^{i\varphi})| = U(r, \varphi).$$

Soit $M(r) = e^{v(r)}$ le module maximum de $f(z)$ sur la circonférence C_r de rayon r autour de l'origine, et désignons par ζ_r un point où cette valeure maximum est atteinte. On peut toujours choisir les points ζ_r de manière qu'on ait

$$\lim_{\delta=0} \zeta_{r-\delta} = \zeta_r, \qquad (\delta > 0).$$

Parmi les domaines connexes (à l'intérieur de C_r) où l'on a $U(\varrho, \varphi) > \frac{v(r)}{2}$ il en existe un (D) qui contient le point ζ_r sur sa frontière. Le contour total $\gamma + L$ de D est composé 1) par un ensemble (γ) de segments de C_r, 2) par un ensemble L de lignes à l'intérieur de C_r. Il est visible qu'on a

$$U(\varrho, \varphi) \geq \frac{v(r)}{2} \quad \text{sur } \gamma,$$

$$U(\varrho, \varphi) = \frac{v(r)}{2} \quad \text{sur } L.$$

Désignons par $W(\varrho, \varphi)$ la fonction harmonique

$$W(\varrho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma} \frac{r^2 - \varrho^2}{r^2 - 2r\varrho \cos(\varphi - \psi) + \varrho^2} d\psi,$$

qui est égale à un sur les segments γ et égale à zéro sur le reste de C_r. Si l'on suppose r assez grand pour que $v(r)$ soit positif il est clair que la fonction

$$U(\varrho, \varphi) - \frac{v(r)}{2} - \frac{v(r)}{2} W(\varrho, \varphi)$$

est négative ou nulle sur toute la frontière de D. Il s'ensuit (si δ est suffisamment petit)

$$v(r-\delta) - \frac{v(r)}{2} - \frac{v(r)}{2} W(r-\delta, \varphi_\delta) \leq 0$$

$$\zeta_{r-\delta} = (r-\delta) e^{i\varphi_\delta}.$$

Or il est facile de voir que

$$W(\varrho, \varphi) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-r\theta}^{r\theta} \frac{r^2 - \varrho^2}{r^2 - 2r\varrho \cos\psi + \varrho^2} d\psi = h(\varrho),$$

où $2r\theta$ est la longeur totale des segments γ. On a donc

$$v(r-\delta) - \frac{v(r)}{2} - \frac{v(r)}{2} h(r-\delta) \leq 0,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{v(r)-v(r-\delta)}{\delta} \geq \frac{v(r)}{2} \frac{1-h(r-\delta)}{\delta}.$$

Par un passage à la limite il viendra donc en tout point où $v'(r)$ existe

$$v'(r) \geq \frac{v(r)}{2} h'(r) = \frac{v(r)}{2\pi r} \cot \frac{\theta}{2}.$$

En posant

$$\log r = s, \ \log \frac{v(r)}{2} = g(s)$$

on en déduit

$$\frac{dg(s)}{ds} > \frac{k}{\lambda}, \tag{3}$$

où k est une constante positive et λ la mesure de l'ensemble des points (φ) où l'on a $\omega(\varphi) > g(s)$. Il s'ensuit

$$\int_{g_0}^{g} \lambda \, dg > k(s-s_0),$$

ce qui entraîne la divergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \lambda \, dg.$$

Or l'hypothèse que

$$\int_0^{2\pi} \omega(\varphi) \, d\varphi$$

converge donne un résultat contraire. On a, en effet,

$$\int_0^\infty \lambda dg = -\int_0^\infty g \, d\lambda = \int_0^{2\pi} \omega(\varphi) \, d\varphi.$$

Notre théorème est donc démontré.

Dans l'énoncé que nous venons de prouver on ne peut pas remplacer l'intégrale (1) par

$$\int_0^{2\pi} \omega(\varphi)^{1-\varepsilon}\, d\varphi \qquad \varepsilon > 0.$$

C'est ce qu'on constate en considérant la fonction entière[1]

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{z}{\log \nu}\right)^{\nu},$$

fonction qui admet une majorante de la forme

$$|f(re^{i\varphi})| < e^{e^{\frac{k}{|\varphi(2\pi-\varphi)|}}}$$

k étant une constante.

Ajoutons finalement la proposition suivante: Chaque fonction analytique $f(z)$, regulière dans un angle $-\alpha < \varphi < \alpha$ et y satisfaisant à une condition de la forme

$$|f(re^{i\varphi})| < e^{e^{\omega(\varphi)}},$$

où $\omega(\varphi)$ désigne une fonction positive telle que $\int_{-\alpha}^{\alpha} \omega(\varphi)\, d\varphi$ existe, est bornée dans le domaine $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$ si $\omega(\alpha)$ et $\omega(-\alpha)$ sont des quantités finies.

[1] Cf. E. LINDELÖF: Le calcul des résidus, p. 121.