SUR LES FONCTIONS SUBHARMONIQUES ET LEUR RAPPORT À LA THÉORIE DU POTENTIEL.

PAR

FRÉDÉRIC RIESZ

à SZEGED.

(Première Partie.)

Le but de ce travail est de développer d'une façon détaillée les idées dont j'ai rendu compte dans une conférence faite à Stockholm le 15 septembre 1924 et répétée quelques jours après à Copenhague et à Innsbruck.[1] Cette première partie contient les études préliminaires dont nous aurons besoin pour établir, dans la seconde partie, le lien intime qui existe entre les fonctions que nous étudions et la Théorie du potentiel. Le résultat principal auquel nous arrivons dans la présente partie est une généralisation pas évidente du théorème important de M. HARDY concernant les valeurs moyennes du module d'une fonction analytique. C'est cette généralisation qui nous ouvrira la voie à nos recherches ultérieures.

1. Définition des fonctions subharmoniques et leur propriété principale; cas des fonctions continues.

La classe de fonctions dont il sera question dans ce travail, introduite en Analyse par M. HARTOGS[2], mais dont l'idée intervient déjà dans la méthode de

---

[1] F. RIESZ, Über subharmonische Funktionen und ihre Rolle in der Funktionentheorie und in der Potentialtheorie, *Acta Univ. Franc.-Jos., Szeged,* t. 2 (1925), p. 87—100.

[2] F. HARTOGS, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen etc., *Math. Annalen,* t. 62, p. 1—88.

balayage de POINCARE[1], est une extension presque immédiate, au cas de plusieurs variables, des fonctions *convexes* d'une seule variable.

Parmi les fonctions continues d'une variable réelle, les fonctions convexes se distinguent par l'hypothèse que les arcs de leur image soient situés au-dessous des cordes joignant leurs extrémités; comme cas limite, on permet aussi que l'image soit une droite ou un segment de droite ou qu'elle contienne de tels segments. C'est-à-dire que, dans tout intervalle $a \leqq x \leqq b$ où elle est définie, la fonction convexe doit être inférieure ou égale à la fonction linéaire qui prend les mêmes valeurs en a et b ou, autrement dit, qui admet les mêmes valeurs périphériques.

La condition suffisante classique pour que la fonction continue $u(x)$ soit convexe est que $u''(x) \geqq 0$. Mais cette condition n'est pas nécessaire. Une condition à la fois nécessaire et suffisante consiste en ce que la différence seconde $u(x-h)-2u(x)+u(x+h)$ ne devienne jamais négative[2]; bien entendu, on suppose que l'intervalle $(x-h,\ x+h)$, extrémités comprises, appartienne à l'intervalle où la fonction est définie. La condition est évidemment nécessaire; rappelons brièvement comment on montre qu'elle est suffisante. Observons d'abord qu'une fonction qui satisfait à notre condition dans un intervalle $(a,\ b)$, ne peut atteindre un maximum à l'intérieur de $(a,\ b)$, sans être constante. Admettons le contraire; alors il y aura un point $x_0 (a < x_0 < b)$ pour lequel la fonction $u(x)$ atteint son maximum, sans l'atteindre partout dans le voisinage et, par conséquent, l'une au moins des différences $u(x_0-h)-u(x_0)$, $u(x_0+h)-u(x_0)$ sera négative pour certaines valeurs de h et il en sera de même pour la différence $u(x_0-h)-2u(x_0)+u(x_0+h)$. Ajoutons que si la condition est satisfaite pour $u(x)$, il en sera de même pour $d(x)=u(x)-l(x)$, $l(x)$ désignant une fonction linéaire quelconque. En particulier, on peut supposer $l(a)=u(a)$, $l(b)=u(b)$, alors $d(a)=d(b)=0$ et, par conséquent, $d(x) \leqq 0$, c'est-à-dire que $u(x) \leqq l(x)$ pour $a < x < b$, c. qu. f. d. Il vient aussi par notre raisonnement que le signe d'égalité n'aura lieu que partout ou nulle part.

---

[1] Cf. p. ex. E. PICARD, Traité d'Analyse, t. II (2. édition, 1905), p. 95 et suiv. Cf. aussi O. PERRON, Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u=0$, *Math. Zeitschrift*, t. 18 (1923), p. 42—54; R. REMAK, Über potentialkonvexe Funktionen, *Math. Zeitschrift*, t. 20 (1924), p. 126—130; T. RADÓ et F. RIESZ, Über die erste Randwertaufgabe für $\Delta u=0$, *Math. Zeitschrift*, t. 22 (1925), p. 41—44. La méthode dont il s'agit dans ces travaux et qui est voisine de la méthode de balayage, dépend essentiellement de l'idée de fonction subharmonique.

[2] J. L. W. V. JENSEN, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta math.*, t. 30 (1906), p. 175—193.

Il convient encore d'observer que, pour le raisonnement que nous venons de faire, il aurait suffi de supposer que notre condition soit remplie pour des valeurs assez petites de h.

Notre condition peut être aussi mise sous la forme

$$(\mathrm{A}_1) \qquad u(x_0) \leqq {}^1/_2\{u(x_0 - h) + u(x_0 + h)\}$$

et c'est sous cette forme qu'elle nous suggère l'extension au cas de deux ou de plusieurs variables que nous avions en vue.

Soit, pour fixer les idées, $u(x, y)$ une fonction continue à deux variables, définie à l'intérieur d'un domaine D. Supposons que pour chaque point (x, y) intérieur au domaine et pour chaque valeur suffisamment petite du rayon r, on ait

$$(\mathrm{A}_2) \qquad u(x_0, y_0) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi,\ y_0 + r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Dans ce cas, nous dirons que la fonction $u(x, y)$ est *subharmonique*. Cette dénomination sera justifiée de suite. Je dis que l'hypothèse (A_2) a pour conséquence le fait suivant.

Soit D' un domaine intérieur de même que sa frontière au domaine D et soit, s'il en existe, $U(x, y)$ la fonction harmonique à l'intérieur du domaine D' prenant, sur la frontière de ce domaine, les mêmes valeurs que $u(x, y)$. Dans ces conditions, on aura, à l'intérieur de D',

$$u(x, y) \leqq U(x, y),$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que partout ou nulle part.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, la différence

$$d(x, y) = u(x, y) - U(x, y)$$

devait atteindre un maximum $M \geqq 0$ à l'intérieur du domaine D'. Sauf dans le cas évident où $d(x, y) \equiv 0$, il y aura, à l'intérieur de D', des points pour lesquels le maximum n'est pas atteint et comme ces points forment un ensemble ouvert non identique à l'intérieur de D', ils admettent au moins un point frontière (x_0, y_0) intérieur à ce domaine. La fonction $d(x, y)$ ne sera constante dans aucun voisinage de (x_0, y_0). Il s'ensuit que pour r suffisamment petit, on aura

$$d(x_0, y_0) = M > \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(x_0 + r \cos\varphi,\ y_0 + r \sin\varphi)\, d\varphi.$$

Mais cela implique contradiction. En effet, on a, par la formule de Gauss,

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x_0 + r \cos\varphi,\ y_0 + r \sin\varphi)\, d\varphi;$$

par l'hypothèse (A_2), il s'en suit, pour $d(x, y)$, l'inégalité analogue à (A_2).

Ajoutons que l'hypothèse (A_2) est aussi une condition nécessaire pour que le fait dont nous venons de parler ait lieu; pour le voir, on n'aura qu'à choisir comme domaine D' les domaines circulaires et écrire la formule de Gauss.

L'extension de la définition et de ses conséquences au cas de plusieurs variables est évidente; c'est manifestement toujours aux fonctions harmoniques que l'on fera jouer le rôle qui appartient aux fonctions linéaires lorsqu'il s'agit d'une seule variable. L'hypothèse analogue à (A_1) et (A_2) sera désignée, d'une façon générale, comme hypothèse (A).

2. Passage aux fonctions discontinues.

Nous allons voir, dans la seconde partie de ce travail, que les fonctions subharmoniques donnent lieu à certaines distributions de masses négatives dont elles sont, à une fonction harmonique additive près, le potentiel logarithmique ou celui de Newton, suivant le nombre des variables. Inversement, le potentiel d'une distribution de masses négatives remplit notre hypothèse (A). Mais le potentiel n'est pas nécessairement une fonction continue; en général, ce sera une fonction *semi-continue supérieurement*, c'est-à-dire la limite d'une suite décroissante de fonctions continues. De plus, cette fonction pourra admettre des *infinis négatifs*, comme par exemple dans le cas d'une distribution ponctuelle. Nous parlerons encore de ces questions d'une façon plus précise; pour le moment, il s'agissait seulement de faire observer que si l'on tient à établir, entre les fonctions subharmoniques et les potentiels, une réciprocité aussi complète que possible, il faudra se passer de l'hypothèse de la continuité, en la remplaçant par celle de la semicontinuité supérieure.

Quant aux infinis négatifs que l'on admettra, il est manifeste que la fonction ne devra pas devenir »très infinie». J'entends par là l'hypothèse évidente que les points où la fonction est infinie, ne couvrent pas toute une aire, c'est-à-dire que l'ensemble des points où la fonction est finie, soit partout dense dans le domaine envisagé.

Pour définir ce que l'on entendra par fonction subharmonique dans ce cas plus général, observons d'abord que le résultat principal du paragraphe précédent peut être énoncé sous une forme ne faisant plus intervenir le problème de Dirichlet. Au lieu d'exiger que l'on ait précisément $U=u$ sur la frontière de D', contentons-nous de supposer, d'une façon plus générale, que $u \leqq U$ sur cette frontière; il s'ensuivra a fortiori la même inégalité pour l'intérieur de D'. C'est ce fait qui nous suggère notre nouvelle définition, ne faisant appel ni au problème de Dirichlet, ni même à la question d'intégrabilité. Voilà cette définition. Une fonction définie à l'intérieur d'un domaine D, semicontinue supérieurement, c'est-à-dire limite d'une suite décroissante de fonctions continues et qui ne devient pas »très infinie», sera dite subharmonique si pour tout domaine D' intérieur de même que sa frontière au domaine D et pour toute fonction $U(x, y)$ harmonique en D', continue sur la frontière de D' et telle que $u \leqq U$ sur cette frontière, la même inégalité a lieu à l'intérieur du domaine.

Comme nous l'avons déjà dit, cette définition ne fait appel ni au problème de Dirichlet, ni à la question d'intégrabilité. Reprenons maintenant ces questions. Soit $g_1, g_2, \ldots$ une suite de fonctions continues à l'intérieur du domaine D, tendant en décroissant vers la fonction subharmonique u, continue ou non. Soit D' un domaine intérieur, de même que sa frontière, au domaine D et supposons qu'en cas que les données sont continues, le problème de Dirichlet puisse être résolu pour le domaine D'. Soient $U_1, U_2, \ldots$ les fonctions harmoniques à l'intérieur de D' et égales respectivement à $g_1, g_2, \ldots$ sur sa frontière; cette suite de fonctions harmoniques allant en décroissant, sa limite sera, d'après un théorème bien connu, partout finie ou partout infinie. Or, ce second cas est impossible; en effet, comme on a $u \leqq g_n = U_n$ sur la frontière de D', on aura aussi $u \leqq U_n$ à l'intérieur de ce domaine; et dans le second cas, il s'ensuivrait que $u = -\infty$ partout dans D'. Par conséquent, il ne peut se présenter que le premier cas, c'est-à-dire que les U_n tendent vers une fonction harmonique U^*. Cette fonction est entièrement déterminée quand on a donné la fonction u et le domaine D' et ne dépend pas du choix de la suite $\{g_n\}$, comme on le voit par un raisonnement connu que je vais rappeler. Soit $\{\bar{g}_n\}$ une seconde suite de fonctions continues tendant en décroissant vers u; soient $\{\overline{U}_n\}$ les fonctions harmoniques correspondantes et soit $\overline{U}^*$ leur limite. Supposons de plus que les suites $\{g_n\}$ et $\{\overline{g}_n\}$ soient décroissantes au sens étroit, c'est-à-dire que $g_{n+1} < g_n$, $\overline{g}_{n+1} < \overline{g}_n$; dans le cas contraire, on modifierait les deux suites en remplaçant g_n et $\overline{g}_n$ respectivement par $g_n + \frac{1}{n}$, $\overline{g}_n + \frac{1}{n}$; cette modification n'altère pas les fonctions U^* et $\overline{U}^*$. Cela étant, considérons un élément g_m de la première suite; comme les $\overline{g}_n$ vont en décroissant au delà de $g_{m+1} < g_m$, on aura, d'après un théorème bien connu de Dini, $\overline{g}_n < g_m$ pour n suffisamment grand. Donc on aura aussi $\overline{U}_n < U_m$ et en passant à la limite, il vient que $\overline{U}^* \leqq U^*$. Or, par les mêmes raisons, on aura aussi $U^* \leqq \overline{U}^*$; il s'ensuit que $U^* = \overline{U}^*$.

On montre par le même raisonnement que si U est une fonction harmonique à l'intérieur de D' et continue sur sa frontière ou limite d'une suite décroissante de telles fonctions et si de plus on a, à l'intérieur de D', $u \leqq U$, on y aura aussi $U^* \leqq U$. Nous exprimerons ce fait brièvement en disant que, pour le domaine D', U^* est la *meilleure majorante harmonique* de la fonction u.[1]

Observons que U^* ne dépend que des valeurs périphériques que prend u sur la frontière de D' et que, dans le cas où la fonction u est continue, U^* n'est que la solution du problème de Dirichlet correspondant.

Passons maintenant au cas d'un domaine D' circulaire ou sphérique. Dans ce cas, en conservant les notations, les fonctions harmoniques U_n se calculent en appliquant aux valeurs périphériques des fonctions g_n la formule de Poisson et comme les suites monotones peuvent être intégrées terme à terme, la fontion U^* sera fournie par la même formule en y introduisant les valeurs périphériques de u et en donnant à l'intégrale un sens convenable, p. ex. en la prenant au sens de M. Lebesgue. En particulier, on aura, pour un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon r,

$$u(x_0, y_0) \leqq U^*(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi,\ y_0 + r\sin\varphi)\, d\varphi$$

et une formule analogue aura lieu dans le cas de plusieurs variables. Cette

[1] En réalité, pour légitimer cette dénomination, on aurait à prouver que la fonction U^* est plus petite ou égale à toute fonction harmonique qui surpasse la fonction u à l'intérieur de D', indépendamment de l'allure de ces fonctions sur la frontière de D'. Dans bien des cas, ce fait se déduit aisément de nos résultats ultérieurs, mais je n'ai pas encore réussi à le démontrer dans toute sa généralité.

formule met en évidence les deux faits suivants: 1) *la fonction u est intégrable sur toutes les circonférences respectivement sur toutes les sphères en question;* 2) *l'hypothèse* (A), *posée primitivement pour les fonctions continues, est satisfaite aussi dans le cas actuel plus général.*

Inversement, lorsque l'hypothèse (A) est satisfaite pour une fonction semicontinue u, cette fonction est subharmonique dans le sens que nous avons adopté dans ce paragraphe. Pour le voir, on n'aura qu'à répéter presque mot à mot le raisonnement du paragraphe précédent.

3. Exemples.

Les exemples les plus connus de fonctions subharmoniques sont les fonctions u satisfaisant à une équation aux dérivées partielles

$$\Delta u = f,$$

f étant une fonction non négative. Le cas où $f \equiv 0$ correspond aux fonctions harmoniques qui constituent un cas limite séparant les fonctions subharmoniques de celles que l'on pourrait appeler *superharmoniques* et que l'on obtient p. ex. en changeant le signe des fonctions subharmoniques. Les fonctions harmoniques qui deviennent infinies négatives en des points isolés, comme p. ex. les potentiels élémentaires $\log r$, $-1/r$, etc., sont essentiellement subharmoniques, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent être regardées en même temps comme superharmoniques.

Il y a trois principes très simples pour construire des fonctions subharmoniques. Le premier, c'est que *toute combinaison linéaire de fonctions subharmoniques à coefficients positifs est une fonction subharmonique.* Le second, c'est que *l'enveloppe supérieure, c'est-à-dire la fonction égale partout à la plus grande d'un nombre fini de fonctions subharmoniques l'est également.* Le troisième principe dit que *la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions subharmoniques est elle-même subharmonique.* En effet, on voit sans peine que ces trois algorithmes conservent la semicontinuité inférieure et l'hypothèse (A).

Voilà un quatrième principe, permettant de passer des fonctions continues à des fonctions discontinues. *Soit $u_1, u_2, \ldots$ une suite décroissante de fonctions subharmoniques dans un domaine D, tendant vers une fonction limite u^* qui ne devient pas »très infinie».* En raisonnant comme dans le paragraphe précédent, il vient que, pour la fonction u^*, les intégrales figurant dans l'hypothèse (A) existent et que cette hypothèse est remplie; comme de plus la limite d'une suite décroissante de fonctions continues ou semicontinues supérieurement est elle-même semicontinue supérieurement, *la fonction* u^* *sera subharmonique.*

En nous servant de ces principes, nous allons construire une fonction subharmonique bornée et discontinue. C'est seulement pour fixer les idées que nous nous plaçons dans le cas de deux variables; on sait aussi que, parmi les fonctions convexes d'une seule variable, il n'en existe pas d'analogue.

Soit $\{P_n\}$ une suite de points situés dans le plan des x, y tendant vers un point P^*. Désignons les coordonnés de ces points respectivement par x_n, y_n et x^*, y^* et posons

$$r_n = [(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2]^{1/2}.$$

Soit $-m_1$, $-m_2, \ldots$ des masses négatives placées respectivement en P_1, $P_2, \ldots$ et telles que $\sum m_n$ converge. Nous supposons de plus que le potentiel logarithmique

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n \log r_n \tag{1}$$

ait une valeur finie au point P^*, c'est-à-dire que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n \log P^* P_n$$

soit convergente. Alors la série (1) définira une fonction $u_1(x, y)$ subharmonique dans tout le plan et la valeur de cette fonction au point P^* sera finie. Comme fonction $u_2(x, y)$ choisissons une constante inférieure à cette valeur; alors l'enveloppe supérieure $u(x, y)$ de ces deux fonctions sera une fonction subharmonique bornée dans tout domaine fini et discontinue au point P^*.

On peut varier cet exemple en supposant que la suite $\{P_n\}$, au lieu d'être convergente, soit partout dense sur un certain ensemble ou aussi dans tout le plan.

L'exemple le plus simple illustrant notre second principe est fourni par l'enveloppe supérieure d'un nombre fini de fonctions harmoniques; on y reconnait la généralisation immédiate des lignes polygonales convexes.

D'autres exemples de fonctions subharmoniques sont fournis par la Théorie des fonctions. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur d'un domaine D, alors en écrivant $z=x+iy$, les fonctions $|f(z)|^\alpha$ où α est un nombre positif quelconque, sont des fonctions subharmoniques des variables x, y. En effet, ces fonctions sont continues et tout revient à voir si l'hypothèse (A_2) est satisfaite. Il faut distinguer deux cas. Dans le cas où $f(x_0+iy_0)=0$, la formule (A_2) est évidente. Dans le cas contraire, désignons par $f^\alpha(z)$ une détermination uniforme de cette fonction au voisinage du point $z_0=x_0+iy_0$. Pour r suffisamment petit on peut appliquer la formule de Cauchy qui donne

$$f^\alpha(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^\alpha(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi;$$

en passant aux modules, on en conclut l'inégalité requise.

La fonction $\log|f(z)|$ est harmonique sauf pour les zéros de $f(z)$ où elle devient infinie négative; donc elle est subharmonique. Par notre second principe, on en déduit une autre fonction subharmonique, jouant un rôle important dans la Théorie des fonctions, comme le montrent les dernières recherches de MM. F. et R. NEVANLINNA et de M. OSTROWSKI[1]; c'est la fonction $\overset{+}{\log}|f(z)|$ où $\overset{+}{\log}\, a$ désigne la partie positive de $\log a$, c'est-à-dire $\log a$ lorsque $a \geqq 1$ et zéro dans le cas contraire.

4. Le théorème de Hardy et sa généralisation.

Parmi les nombreuses applications des fonctions subharmoniques à la Théorie des fonctions je ne parlerai ici que de celles qui m'ont suggéré les idées dont je rends compte dans le présent travail.

On doit à M. HARDY le théorème suivant, datant de l'année 1915:

Soient $f(z)$ une fonction holomorphe pour $|z| < R$, α un nombre positif quelconque et

$$M_\alpha(r)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\alpha d\varphi\right\}^{1/\alpha} \qquad (r < R).$$

[1] F. et R. NEVANLINNA, Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, *Acta Soc. sc. Fennicae*, t. 50, n:o 5 (1922), p. 3—40; A. OSTROWSKI, Über die Bedeutung der Jensenschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie, *Acta Univ. Franc.-Jos. Szeged*, t. 1 (1922), p. 80—87); R. NEVANLINNA, Zur Theorie der meromorphen Funktionen, *Acta math.*, t. 46 (1925), p. 1—99, où l'on trouve encore d'autres indications bibliographiques.

Alors 1) $M_\alpha(r)$ *est une fonction croissante de* r; 2) $\log M_\alpha(r)$ *est une fonction convexe de* $\log r$.[1]

Ce théorème est contenu dans le théorème sur les fonctions subharmoniques que voici:

Soit $u(x, y)$ *une fonction subharmonique à l'intérieur d'un domaine* D. *Alors la valeur moyenne*

$$I(r) = I(r, u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi,\ y_0 + r\sin\varphi)\,d\varphi$$

où (x_0, y_0) *est un point appartenant au domaine, est une fonction croissante de* r *pendant que* r *varie de sorte que le cercle correspondant, avec son intérieur, restent compris dans le domaine.*

De plus, $I(r)$ *est une fonction convexe de* $\log r$ *et cela même dans le cas plus général où, le point* (x_0, y_0) *appartenant ou non au domaine, le rayon* r *varie de façon que les circonférences correspondantes forment un anneau circulaire intérieur au domaine.*[2]

Démontrons d'abord ce dernier théorème. Quant à la croissance de $I(r)$, soient r_1 et $r_2\,(r_1 < r_2)$ deux des rayons considérés et envisageons les deux circonférences qui y correspondent. Soit $U(x, y)$ la meilleure majorante harmonique de $u(x, y)$ pour la plus grande des deux circonférences. Alors on aura, sur l'autre circonférence, $u \leqq U$ et par conséquent $I(r_1, u) \leqq I(r_1, U) = I(r_2, U) = I(r_2, u)$, c. qu. f. d.

Pour vérifier la seconde partie du théorème, on se servira de la même idée, mais en l'appliquant, au lieu d'un cercle, à un anneau circulaire $r_1 \leqq r \leqq r_2$ compris dans le domaine D. Soit $U_1(x, y)$ la meilleure majorante harmonique correspondant à notre anneau; alors, d'après la théorie des fonctions harmoniques, la valeur moyenne $I(r, U_1)$ est, pour $r_1 \leqq r \leqq r_2$, une fonction linéaire de $\log r$, et pour $r = r_1$ et $r = r_2$ cette fonction linéaire prend des valeurs égales respectivement à $I(r_1, u)$ et $I(r_2, u)$. D'autre part, comme on a, dans l'anneau, $u \leqq U_1$, il s'ensuit que $I(r, u) \leqq I(r, U_1)$. On en conclut immédiatement la convexité de $I(r)$ comme fonction de $\log r$.

Quant au théorème de M. Hardy, comme $|f(z)|^\alpha$ est une fonction subhar-

[1] G. H. Hardy, On the mean value of the modulus of an analytic function, *Proc. London Math. Soc.*, 2. série, t. 14 (1915), p. 269—277.

[2] F. Riesz, Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques, *Acta Univ. Franc.-Jos. Szeged*, t. 1 (1922), p. 27—32.

monique de $x, y\,(z=x+iy)$, la première partie du théorème est évidemment contenue dans notre théorème général. Pour en déduire la seconde partie, il faudra seulement observer que, par les mêmes raisons que $|f(z)|^\alpha$, la fonction $|z|^\beta |f(z)|^\alpha$ est subharmonique pour $0 < |z| < R$ quelque soit β, et que par conséquent $r^\beta M_\alpha(r)$ est une fonction convexe de $\log r$ et cela pour chaque valeur de l'exposant β; la convexité de $\log M_\alpha(r)$ s'ensuit par un artifice connu.

Observons encore que l'extension de notre théorème embrassant celui de M. Hardy au cas de plusieurs variables est immédiate; seulement, on ne devra pas oublier que le rôle de $\log r$ reviendra toujours au potentiel élémentaire correspondant au nombre des variables, p. ex. à $1/r$ dans le cas de l'espace.

Pour aller plus loin, rappelons qu'il y a peu de temps que M. Littlewood avait réussi à généraliser la première partie du théorème de M. Hardy d'une manière inattendue et il a su tirer de cette généralisation des conséquences importantes appartenant à l'ordre d'idées du théorème de M. Picard et à la théorie de la représentation conforme.[1] Poussé par cette découverte, intimement liée, comme je l'ai montré, à l'idée de fonction subharmonique[2], j'ai tâché d'étendre la seconde partie du dit théorème ou plutôt celle de mon théorème correspondant de façon que, au lieu des anneaux circulaires, il s'y agisse des anneaux formés par des courbes quelconques.[3] Dans ce but, j'ai tout d'abord mis cette seconde partie sous une forme nouvelle. Soit $u(x, y)$ une fonction subharmonique dans un domaine D et supposons que les anneaux formés par les cercles de centre (x_0, y_0) et de rayons $r_1 < r_2 < r_3$ soient intérieurs à ce domaine. Alors la valeur moyenne $I(r)$ étant une fonction convexe de $\log r$, on a

---

[1] J. E. Littlewood, On inequalities in the theory of functions, *Proc. London Math. Soc.*, 2. série, t. 22 (1923), *Records*, November 8th, 1923; t. 23 (1925), p. 481—519.

[2] F. Riesz, Sur une inégalité de M. Littlewood dans la théorie des fonctions, *Proc. London Math. Soc.*, 2. série, t. 23 (1924), *Records*, March 13th, 1924.

[3] Indiquons en quelques mots une généralisation plus évidente, à laquelle on arrive par représentation conforme en partant de notre première généralisation du théorème de M. Hardy. Considérons une aire simplement connexe, formons la fonction de Green par rapport à un point intérieur O et désignons par C_λ la ligne de niveau sur laquelle cette fonction prend constamment la valeur λ. Supposons que l'aire comprise entre C_{λ_1} et C_{λ_2} appartienne à notre domaine D et formons, pour toute valeur de λ comprise entre λ_1 et λ_2, la meilleure majorante harmonique correspondant à notre fonction subharmonique $u(x, y)$ et au domaine simplement connexe limité par C_λ. Soit $u(\lambda)$ la valeur que prend cette fonction au point O. *Alors $u(\lambda)$ sera une fonction convexe de la variable λ.*

Ce théorème s'étend au cas de plusieurs variables; dans ce cas, comme on ne peut plus se servir de la représentation conforme, on le démontre en partant de la formule de Green.

$$\frac{I(r_1)-I(r_2)}{\log r_1-\log r_2} \leqq \frac{I(r_1)-I(r_3)}{\log r_1-\log r_3} \leqq \frac{I(r_2)-I(r_3)}{\log r_2-\log r_3}.$$

Ces trois rapports peuvent être interprétés de la manière suivante. Construisons, pour la fonction $u(x, y)$ et pour nos anneaux, les meilleures majorantes harmoniques que nous désignerons respectivement par U_{12}, U_{13}, U_{23}. Alors nos rapports seront égaux à l'intégrale correspondante

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \frac{d\,U_{ik}}{d n_e}\,ds \qquad (i, k=1, 2, 3),$$

où l'intégration se fait, au sens positif, le long d'une courbe fermée arbitraire Γ découpant l'anneau correspondant en deux anneaux et la dérivée est prise suivant la normale extérieure; pour éviter des difficultés accessoires, on peut supposer p. ex. que la courbe Γ est composée d'un nombre fini d'arcs dont la tangente varie d'une manière continue. On connaît le rôle que joue cette intégrale dans diverses parties de la Mécanique et de la Physique mathématique; on sait aussi que, grâce à la formule de Green, elle ne dépend pas du choix de la courbe Γ et qu'elle reste invariante par représentation conforme; ce dernier fait vient de ce que, pour ainsi dire, le rapport des infiniment petits ds et dn ne change pas. Comme de plus, la représentation conforme transporte les fonctions harmoniques en des fonctions analogues et que, par conséquent, il en est de même pour les fonctions subharmoniques, on est conduit tout naturellement à formuler le théorème suivant qu'il s'agira de démontrer.

Soit $u(x, y)$ une fonction subharmonique à l'intérieur d'un domaine D et soient C_1, C_2, C_3 trois courbes fermées, chacune entourée par la suivante et formant deux à deux les trois anneaux 12, 13, 23 *intérieurs à D. Soient, pour ces anneaux, U_{12}, U_{13}, U_{23} les meilleures majorantes harmoniques de $u(x, y)$ et soit*

$$I_{ik} = \int \frac{d\,U_{ik}}{d n_e}\,ds \qquad (i, k=1, 2, 3),$$

où l'intégration se fait, au sens positif, le long d'une courbe fermée, composée d'un nombre fini d'arcs dont la tangente varie d'une manière continue et découpant l'anneau $i\,k$ en deux anneaux, d'ailleurs quelconque.

Alors on aura

$$I_{12} \leqq I_{13} \leqq I_{23}.$$

Pour démontrer ce théorème, nous nous servirons du lemme suivant:

Soit $U(x, y)$ une fonction harmonique non négative dans un anneau, s'annulant d'une façon continue sur le contour intérieur (extérieur). Alors on aura

$$\int \frac{dU}{dn_e} ds \geqq 0 \qquad (\leqq 0),$$

cette intégrale ayant un sens analogue à celle qui figure dans le théorème.

Supposons ce lemme établi; alors, dans le cas où la fonction subharmonique $u(x, y)$ est continue, notre théorème viendra immédiatement en appliquant le lemme aux différences des U_{ik}. Ce raisonnement tiendra aussi pour $u(x, y)$ discontinue, mais il faudra d'abord démontrer que les différences des U_{ik} s'annulent sur le contour commun aux anneaux respectifs. Soit $\{g_n(x, y)\}$ une suite décroissante de fonctions continues, tendant vers $u(x, y)$ et désignons par $U_{ik}^{(n)}$ la fonction harmonique dans l'anneau ik et prenant les mêmes valeurs périphériques que $g_n(x, y)$. Rappelons que l'on a, par définition, $U_{ik}^{(n)} \to U_{ik}$ et que la convergence est uniforme à l'intérieur des anneaux respectifs. Soit C_4 une courbe fermée auxiliaire intercalée entre C_1 et C_2; alors les différences $U_{13}^{(n)} - U_{12}^{(n)}$ qui sont des fonctions harmoniques dans l'anneau 14, sont continues sur les courbes C_1 et C_4; de plus, elles s'annulent sur la première et convergent uniformément sur la seconde. Il s'ensuit que la convergence de la suite de ces différences est uniforme dans l'anneau fermé 14; donc la limite $U_{13} - U_{12}$ s'annulera d'une façon continue sur la courbe C_1. Un raisonnement analogue tient pour l'allure de la différence $U_{13} - U_{23}$ sur la courbe C_3.

Il faut encore établir le lemme dont nous nous sommes servis. Pour cela, faisons la représentation conforme de notre anneau circulaire. À la fonction harmonique U, il y correspondra une nouvelle fonction harmonique U_1, les deux fonctions prenant les mêmes valeurs en des points correspondants. Comme l'intégrale en question est invariante par représentation conforme, le cas général d'un anneau quelconque est ramené au cas d'un anneau circulaire. Or, dans ce cas, le lemme est presque évident; il vient p. ex. en observant que les dérivées restent continues sur la circonférence sur laquelle la fonction s'annule et que, par conséquent, au lieu d'intégrer le long d'une courbe arbitraire, on pourra le faire le long de cette circonférence et profiter de ce que, pour cette circonférence, le signe de la dérivée normale est évident.

Voilà une seconde démonstration de notre lemme, valable aussi au cas de plusieurs variables, tandis que celle qui précède ne peut être généralisée. Supposons d'abord que celle des deux courbes formant l'anneau sur laquelle la fonction U s'annule, soit suffisamment régulière, p. ex. à courbure continue. Alors un pourra raisonner comme dans le cas de l'anneau circulaire. Supposons que U, non négative à l'intérieur de l'anneau, s'annule sur le contour intérieur. Comme, grâce à l'hypothèse faite, les dérivées de U admettent des valeurs limites continues sur ce contour, on pourra, au lieu d'intégrer sur une courbe arbitraire découpant l'anneau, le faire le long du contour-même. Comme, de plus, la dérivée normale y est évidemment non négative l'intégrale le sera également. Le même raisonnement s'applique — mutatis mutandis — au cas où la fonction s'annule sur le contour extérieur.

Cela étant, considérons le cas général où l'anneau est formé par deux courbes fermées quelconques; soit C_1 la courbe intérieure, C_2 l'extérieure. Supposons que la fonction U, harmonique et non négative à l'intérieur de l'anneau, s'annule sur C_1. Traçons deux courbes auxiliaires C_0 et C_4, suffisamment régulières et telles que chacune des courbes C_0, C_1, C_4, C_2 soit entourée par la suivante. Soit U_{04} la fonction harmonique dans l'anneau 04, s'annulant sur C_0 est égale à U sur C_4. Alors notre hypothèse particulière étant satisfaite par la fonction U_{04} dans l'anneau 04 et par $U_{04}-U$ dans l'anneau 14 et ces fonctions s'annulant, la première sur le contour intérieur, la seconde sur le contour extérieur des anneaux respectifs, il s'ensuit que, pour l'anneau 14, on a

$$\int_\Gamma \frac{d\,U_{04}}{d n_e}\,ds \leqq 0, \qquad \int_\Gamma \frac{d(U_{04}-U)}{d n_e}\,ds \geqq 0,$$

les intégrales ayant le sens adopté et enfin, par soustraction, il vient que

$$\int_\Gamma \frac{d\,U}{d n_e} \leqq 0.$$

Un raisonnement analogue tient pour le contour extérieur et le lemme est démontré.

Ajoutons une remarque généralisant la première partie du théorème de M. Hardy. Lorsque les courbes C_1 et C_2 appartiennent à une partie simplement connexe du domaine D, C_1 étant intérieure à C_2, on peut comparer l'intégrale relative à la fonction U_{12} à celle relative à la meilleure majorante harmonique U_2 correspondant à l'intérieur de C_2. Or, la fonction U_2 étant harmonique dans un domaine simplement connexe, l'intégrale correspondante s'annule; il s'ensuit que $I_{12} \geqq 0$.

La même méthode s'applique aussi au cas suivant dans lequel on considère plusieurs anneaux à la fois. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des anneaux compris dans le domaine D et extérieurs l'un à l'autre et soit A_0 un anneau intérieur au domaine D et entourant les autres anneaux de sorte que l'aire limitée par le contour intérieur de A_0 et les contours extérieurs des autres anneaux appartiennent aussi au domaine D. Alors on aura, avec une notation évidente,

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n \leqq I_0.$$

Observons enfin que, au lieu des anneaux, on pourrait aussi considérer des aires à connexion multiple.

Nos résultats s'étendent immédiatement au cas de plusieurs variables.