ÜBER ABELSCHE KOLLINEATIONSGRUPPEN UND IRREDUZIBLE LINEARE SUBSTITUTIONSGRUPPEN.

VON

A. WIMAN

in UPSALA.

1. Bei der Darstellung einer Abelschen Kollineationsgruppe durch homogene lineare Substitutionen können wir bekanntlich immer die monomiale Gestalt voraussetzen. Wir betrachten allgemein den Fall von n homogenen Veränderlichen. Es sei $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ die Auflösung von n in ein Produkt von Primzahlpotenzen. Die Exponenten a_i zerlegen wir in irgend einer Weise in die Summe

$$a_i = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{i s_i}.$$

Es sei weiter ω_{ik} eine primitive Wurzel der Gleichung

$$x^{p_i^{a_{ik}}} = 1.$$

Jedem Gliede a_{ik} entsprechend führen wir für die Veränderlichen ein Index z_{ik} ein, der nach dem Modul $p_i^{a_{ik}}$ genommen wird, und für die Kollineationen führen wir je zwei solche Indizes t_{ik} und u_{ik} ein. Eine Variable wird mithin festgelegt durch die Werte der Indizes

$$z_{11}, \; z_{12}, \dots z_{1a_1}, \; z_{21}, \dots, \; z_{2a_2}, \dots,$$

und in gleicher Weise eine Kollineation durch

$$t_{11}, \; t_{12}, \dots t_{1a_1}, \; t_{21}, \dots t_{2a_2}, \dots; \quad u_{11}, \; u_{12}, \dots u_{1a_1}, \; u_{21}, \dots u_{2a_2}, \dots$$

Wir schreiben kurz die Variabeln $x_{z_{ik}}$ und die Kollineationen $S_{t_{ik}, u_{ik}}$. Für letztere haben wir die Darstellung durch die Substitution

$$(1) \qquad x'_{z_{ik}} = \prod_{i,k} \omega_{ik}^{t_{ik} z_{ik}} x_{z_{ik} + u_{ik}}.$$

Man ersieht unmittelbar, dass die in solcher Weise definierten n^2 Kollineationen $S_{t_{ik}, u_{ik}}$ eine Abelsche Gruppe darstellen. Sind für eine Substitution (1) nicht sämtliche Indizes t_{ik} und $u_{ik} \equiv 0$, so wird, wie leicht zu ersehen ist, der zugehörige Charakter $= 0$. Hieraus folgt aber nach bekannten Sätzen *die Irreduzibilität der durch die Substitutionen* (1) *erzeugten homogenen Gruppe.* Da die irreduzibeln Bestandteile einer Abelschen Gruppe stets in nur einer Veränderlichen auftreten, so ist es demnach unmöglich die fragliche Abelsche Kollineationsgruppe durch eine homomorphe Gruppe von homogenen linearen Substitutionen darzustellen. In der Tat findet man als Kommutator zweier Substitutionen (1) mit den Indizes t_{ik}, u_{ik} bez. t'_{ik}, u'_{ik} eine Gleichförmigkeitssubstitution mit dem Proportionalitätsfaktor

$$(2) \qquad \prod_{i,k} \omega_{ik}^{t_{ik} u'_{ik} - t'_{ik} u_{ik}}.$$

Bezeichnet bei veränderlichem Index k b_i das Maximum von den Gliedern a_{ik}, so erhält man offenbar $\prod_i p_i^{b_i}$ als Ordnung der Kommutatorgruppe.

Wir nennen zwei Kollineationen in Bezug auf einander *syzygetisch* bez. *azygetisch,* je nachdem als Kommutator die Einheitssubstitution auftritt oder nicht. Hierdurch befinden wir uns in Übereinstimmung mit einer in der Theorie der Abelschen Funktionen üblichen Bezeichnungsweise.

Als Basiselemente der Abelschen Gruppe kann man diejenigen Operationen betrachten, für welche je eine Zahl t_{ik} oder $u_{ik} \equiv 1$, sämtliche übrige aber $\equiv 0$ sind. Die Herstellung einer anderen Basis erfolgt bekanntlich durch lineare Kongruenzen in den t_{ik} und u_{ik}. Dabei müssen immer Syzygien in Syzygien übergeführt werden, falls man beim Übergange zu der neuen Basis einen Automorphismus der Abelschen Kollineationsgruppe zu erhalten wünscht. Die umfassendere Kollineationsgruppe, welche letztere Gruppe ausgezeichnet enthält, lässt sich in solcher Weise als eine lineare Kongruenzgruppe definieren.

2. Aus den verschiedenen Möglichkeiten die Exponenten a_i in Summanden zu zerfällen erhält man die verschiedenen Typen von Abelschen Kollineationsgruppen der Ordnung n^2 mit irreduzibeln homogenen Darstellungen in n Veränderlichen. Wir beschränken uns doch weiterhin auf den Fall, wo n eine Primzahlpotenz $= p^a$ ist. Will man dann noch voraussetzen, dass die Invarianten der Abelschen Gruppe sämtlich unter einander gleich sind, so erhält man die Typen aus den ganzzahligen Teilern der Exponent a.

Als Beispiel wählen wir $n = 4$. Wir haben dann eine erste Möglichkeit mit drei Paaren von Indizes z_1, z_2, t_1, t_2, u_1, u_2, für welche 0 oder 1 zu setzen ist. Die Operationen (1) bekommen jetzt die Gestalt

$$x'_{z_1,\, z_2} = (-1)^{t_1 z_1 + t_2 z_2} x_{z_1 + u_1,\, z_2 + u_2}. \tag{3}$$

Im anderen Falle haben wir nur je einen Index z, t, u, welche aber nach dem Modul 4 genommen werden. Als Substitutionen (1) erhalten wir

$$x'_z = i^{tz} x_{z+u}. \tag{4}$$

Beschränkt man hier t und u auf die Werte 0 und 2, so bekommt man eine charakteristische Untergruppe vom Typus der Vierergruppe. Untergruppen ähnlicher Art erhält man im ersteren Falle, indem man ein azygetisches Paar von Operationen (3) kombiniert. Die zugehörigen irreduzibeln Bestandteile sind in zwei Veränderlichen. Überhaupt muss ja eine Kollineationsgruppe mit irreduzibler Darstellung in n Variablen mindestens die Ordnung n^2 besitzen, was in dem von uns betrachteten Falle von keiner eigentlichen Untergruppe der Abelschen G_{n^2} der Fall sein kann. Hieraus lässt sich auch erschliessen, dass, falls die Abelsche Kollineationsgruppe eine eigentliche charakterische Untergruppe enthält, so kann dieselbe nur in *imprimitiven* Gruppen als ausgezeichnete Untergruppe auftreten.

Wir nehmen aber jetzt an, dass sämtliche Basiselemente der Abelschen Gruppe von der Ordnung p sind, wodurch also die Existenz von eigentlichen charakteristischen Untergruppen ausgeschlossen wird. Wir schreiben $n = p^r$ und führen für die Variablen r Indizes $z_1, z_2, \ldots z_r$ und in gleicher Weise für die Substitutionen $2r$ Indizes $t_1, t_2, \ldots t_r$, $u_1, u_2, \ldots u_r$ ein, welche sämtliche nach dem Modul p genommen werden. Doch sollen auch in leicht verständlicher Abkürzung die Variablen x_{z_i} und die Substitutionen S_{t_i, u_i} geschrieben werden. Bezeichnet ω eine primitive p:te Einheitswurzel, so hat man für S_{t_i, u_i}:

(5)
$$x'_{z_i} = \omega^{\sum_i t_i z_i} x_{z_i + u_i}.$$

Es ergibt sich weiter:

(6)
$$S_{t_i, u_i} S_{t'_i, u'_i} = \omega^{\sum_i t_i u'_i} S_{t_i + t'_i,\, u_i + u'_i}.$$

Als Kommutator von S_{t_i, u_i} und $S_{t'_i, u'_i}$ erhält man demnach eine Gleichförmigketssubstitution mit dem Proportionalitätsfaktor

(7)
$$\omega^{\sum_i (t_i u'_i - t'_i u_i)}.$$

Zwei Kollineationen heissen mithin syzygetisch oder azygetisch, je nachdem der zugehörige bilineare Ausdruck

(8)
$$\sum_i (t_i u'_i - t'_i u_i) \equiv 0 \pmod p$$

oder nicht.

Die durch die Substitutionen (5) erzeugte homogene Gruppe ist offenbar von der Ordnung p^{2r+1}. Der identischen Kollineation kann ja auch nur eine G_p bei der homogenen Darstellung entsprechen, da die Koeffizienten p:te Einheitswurzeln sein müssen. Einer Untergruppe G_p der Kollineationsgruppe entspricht demnach eine G_{p^2} der homogenen Substitutionsgruppe. Ist p ungerade, so ist diese G_{p^2}, die ja Abelsch sein muss, immer nicht zyklisch. Für $p = 2$ entsprechen aber einigen Kollineationen Vierergruppen und anderen zyklische G_4, je nachdem

(9)
$$\sum_i t_i u_i$$

eine gerade oder ungerade Zahl darstellt. Eine Abänderung der homogenen Darstellung, so dass die Ordnung 2^{2r+1} beibehalten wird, und sämtlichen G_2 der Kollineationsgruppe entweder Vierergruppen oder zyklische G_4 entsprechen, ist nur für $r = 1$ möglich. Der Fall von ausschliesslich Vierergruppen ist ja von vornherein ausgeschlossen, weil dann auch die homogene Gruppe eine Abelsche Gruppe sein sollte, was mit ihrer Irreduzibilität in Widerspruch wäre. Im anderen Falle von ausschliesslich zyklischen G_4 wäre die homogene Gruppe eine Hamiltonsche Gruppe. Für $r = 1$, und nur für $r = 1$, gibt es eine Hamiltonsche

Gruppe von der verlangten Struktur, und zwar die Quaternionengruppe. Dieselbe wird erzeugt durch die Substitutionen

$$x'_z = i^{t+u}(-1)^{tz} x_{z+u} \qquad (z,\ t,\ u = 0,\ 1) \tag{10}$$

und ist als binäre Gruppe sehr bekannt. Hieraus folgt, dass, falls sämtliche von der Identität verschiedenen Operationen der Kollineationsgruppe $G_{2^{2r}} (r > 1)$ in einer umfassenderen Kollineationsgruppe gleichberechtigt sind, für die homogene Darstellung der letzteren Gruppe, falls g ihre Ordnung bezeichnet, mindestens $4g$ Substitutionen erforderlich sind.

3. Als eine Gleichförmigkeitssubstitution ist jeder Kommutator mit sämtlichen linearen Substitutionen in den p^r Veränderlichen vertauschbar. Hieraus folgt, dass bei einer umfassenderen Kollineationsgruppe, welche die Abelsche $G_{p^{2r}}$ als ausgezeichnete Untergruppe enthält, der Ausdruck (8) seinen Wert (mod p) nicht ändert; dies ist eine Verschärfung der schon hervorgehobenen Tatsache, dass Syzygien in Syzygien übergehen müssen. Umgekehrt findet man, dass einer Substitution in den t_i und u_i, welche durch lineare Kongruenzen (mod p) ausgedrückt wird, ein Automorphismus der Abelschen Kollineationsgruppe in sich entspricht. Dies sieht man leicht ein, wenn man beachtet, dass eine Untergruppe der $G_{p^{2r}}$ mit lauter in Bezug auf einander syzygetischen Operationen auch homogen durch eine Abelsche Gruppe ausgedrückt wird und demnach in irreduzible Bestandteile von je einer Veränderlichen zerlegt werden kann, wie dies für die Untergruppe G_{p^r} mit sämtlichen $u_i \equiv 0$ der Fall ist. Aus der Rolle, welchen der bilineare Ausdruck (8) bei der speziellen Abelschen linearen Gruppe spielt[1], erkennt man jetzt, dass bei der fraglichen Erweiterung die Faktorgruppe in Bezug auf die ausgezeichnete Abelsche $G_{p^{2r}}$ eben mit dieser Abelschen linearen Gruppe homomorph sein muss.

In dieser Weise erschliessen wir *die Existenz einer allgemeinen Klasse von Kollineationsgruppen in p^r Veränderlichen von der Ordnung*

$$p^{2r}(p^{2r}-1)p^{2r-1}\ldots(p^2-1)p, \tag{11}$$

welche eine Abelsche $G_{p^{2r}}$ als ausgezeichnete Untergruppe enthält. Sehr bekannte

[1] Man sehe C. JORDAN, Traité des substitutions, p. 171 (1870); L. E. DICKSON, Linear groups with an exposition of the Galois field theory, p. 89 (1901). Wie der Titel angibt, handelt es sich bei der letzteren Arbeit um eine Verallgemeinerung der von C. JORDAN behandelten Aufgabe.

Beispiele hierzu sind im binären Gebiete die Oktaedergruppe von der Ordnung 24 und die ternäre sog. Hessesche Gruppe von der Ordnung 216. Auch der Fall $n=4$ ist von verschiedenen Verfassern eingehend untersucht worden. Die zugehörige Kollineationsgruppe wurde zuerst von F. Klein vermittelst liniengeometrischer Betrachtungen entdeckt. Ihre Ordnung ist 11520. In Übereinstimmung mit einer soeben von uns gemachten Bemerkung sind aber für ihre homogene Darstellung $4 \cdot 11520$ Substitutionen erforderlich. Auch der allgemeine Fall $n=p$ mit der Ordnung $p^2(p^2-1)p$ ist der Gegenstand für besondere Untersuchungen gewesen. Die Existenz letzterer Gruppen wurde von F. Klein aus der elliptischen Transformationstheorie erschlossen. Durch entsprechende Überlegungen im hyperelliptischen Falle (beim Geschlechte 2) hat im Falle $n=p^2$ derselbe Verfasser die fraglichen Kollineationsgruppen von der Ordnung $p^4(p^4-1)p^3(p^2-1)p$ gefunden.[1]

Man darf wohl als wahrscheinlich annehmen, dass die Existenz dieser Gruppen auch im allgemeinsten Falle dem zitierten Verfasser nicht entgangen ist, obgleich hierüber mir keinerlei Veröffentlichung bekannt ist. Den fraglichen allgemeinen Typus von Kollineationsgruppen finde ich nur in einer kleinen Note von H. H. Mitchell behandelt[2], der insbesondere die erzeugenden Substitutionen der Gruppen angegeben hat. Wie die Quelle der Gruppen eigentlich in den ausgezeichneten Abelschen Untergruppen mit irreduziblen homogenen Darstellungen liegt, haben wir hier hervorheben wollen.

Die Darstellung der Gruppe als nicht homogene und der Faktorgruppe als homogene lineare Kongruenzgruppe lehrt, dass die Gruppe mit der Faktorgruppe homomorphe Untergruppen enthält. Wir betrachten den besonderen Fall $p=2$. Die Faktorgruppe enthält als Untergruppen mit der symmetrischen Gruppe von $2r+2$ Dingen homomorphe Gruppen, was mit dem hyperelliptischen Falle des Geschlechtes r in Zusammenhange steht. Auf diese Darstellung der symmetrischen Gruppe von $2r+1$ und $2r+2$ Dingen in 2^r Veränderlichen hatte ich zuerst aufmerksam gemacht.[3] Dieselbe ist von I. Schur in seiner grossen Arbeit[4], wo er das Problem, die symmetrischen und alternierenden Vertauschungs-

---

[1] Behufs Litteraturnachweise verweise ich auf mein Referat »Endliche Gruppen linearer Substitutionen» in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

[2] Mitchell, On some systems of collineation groups, Bulletin of the American Mathematical Society XX, p. 134—138 (1913).

[3] Math. Ann. 52, p. 243 (1899).

[4] Schur, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen, Journal für Mathematik 139, p. 156 (1911).

gruppen durch irreduzible lineare Substitutionsgruppen darzustellen, vollständig löst, als »besonders interessant» charakterisiert. Für die symmetrische Gruppe von n Dingen ist in der Tat, wie SCHUR nachweist, $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ die niedrigste Gradzahl für eine Darstellungsgruppe durch *nicht homogene* lineare Substitutionen der Art, dass die homogene Gruppe mindestens doppelt so viele Substitutionen erfordert. Dass trotzdem diese Darstellung der symmetrischen Gruppe als Untergruppe in einer viel mehr umfassenden Kollineationsgruppe auftritt, muss doch das zugehörige Interesse wesentlich erhöhen.

Bemerkungswert ist weiter, dass bei der in Rede stehenden Darstellung der symmetrischen Gruppe von $2r+1$ Dingen die entsprechende der alternierenden reduzibel wird, so dass man für die alternierende Gruppe von $2r+1$ Dingen eine Darstellungsgruppe in 2^{r-1} Veränderlichen erhält. Wichtige und bekannte Beispiele hierzu sind die binäre Ikosaedergruppe und eine mit der alternierenden Gruppe von 7 Dingen homomorphe quaternäre Kollineationsgruppe. Es ist wohl zu vermuten, dass, wie in den erwähnten Beispielen, diese Darstellungen der alternierenden Gruppe nicht zu umfassenderen endlichen Kollineationsgruppen mit Beibehaltung der Anzahl 2^{r-1} der Veränderlichen erweitert werden können.

4. Es bezeichne jetzt H die Abelsche Kollineationsgruppe $G_{p^{2r}}$, G die Erweiterung und $G/_H$ die Faktorgruppe. Ist p ungerade, was wir in dieser Nummer annehmen wollen, so besitzt $G/_H$ eine invariante Operation von der Ordnung 2, der Substitution

$$t'_i = -t_i; \quad u'_i = -u_i \qquad (i=1, 2, \ldots r) \tag{12}$$

entsprechend. G enthält dann mithin eine ausgezeichnete Untergruppe H_1 von der Ordnung $2p^{2r}$, welche H umfasst. Wenn man den Fall $r=1$, $p=3$ ausnimmt, ist die Faktorgruppe $G/_{H_1}$ eine einfache Gruppe. Bei einer irreduziblen Darstellung von $G/_H$ durch homogene lineare Substitutionen kann der invarianten Operation (12) nur entweder die Identität oder eine Gleichförmigkeitsubstitution mit dem Faktor -1 entsprechen. Im ersten Falle ist die Darstellungsgruppe mit $G/_{H_1}$ homomorph. Nun kennt man aber solche irreduzible Darstellungen sowohl in $\frac{p^r-1}{2}$ als $\frac{p^r+1}{2}$ Veränderlichen. Dabei ist in beiden Fällen die Kollineationsgruppe mit $G/_{H_1}$ und ebenso die homogene Substitutionsgruppe bei der Darstellung mit ungerader Gradzahl, dagegen die andere homogene Substitutionsgruppe mit $G/_H$

homomorph. Für $r=1, 2$ sind diese Kollineationsgruppen durch F. Klein längst bekannt. Für den allgemeinen Fall hat Mitchell in der schon zitierten Note die Existenz auch dieser beiden Typen von Gruppen nachgewiesen. Dies gelingt sehr einfach, indem zunächst, wie wir schon hervorgehoben haben, G Untergruppen vom Typus $G/_H$ enthält. Eine solche enthält ihrerseits eine ausgezeichnete Operation von der Ordnung 2, wobei die Variablen sich in zwei Systeme von je $\frac{p^r+1}{2}$ und $\frac{p^r-1}{2}$ anordnen lassen, so dass die zugehörigen Multiplikatoren sich als ± 1 bez. ∓ 1 erweisen. Diesen beiden Systemen von Variabeln entsprechend muss sich die mit $G/_H$ homomorphe Untergruppe von G in zwei irreduzible Bestandteile zerlegen.

In dieser Weise erhält man die Mehrzahl der mehr eingehend behandelten Kollineationsgruppen, welche nicht schon den in der vorigen Nummer besprochenen Typen angehören. Wenn man $r>1$ annimmt, ist hier besonders der Fall $r=2, p=3$ zu bemerken, wobei es sich um Darstellungen im quaternären und quinären Gebiete von einer einfachen Gruppe von der Ordnung 25920 handelt.[1]

5. Die Untergruppen der Abelschen Gruppe H von gegebener Ordnung p^ν zerlegen sich nun in verschiedene Typen je nach den Eigenschaften von Syzygie oder Azygie, welche ihre Operationen in Bezug auf einander besitzen. Diesen Typen entsprechen, wie sofort zu ersehen ist, verschiedene Systeme von unter sich gleichberechtigten Untergruppen der Faktorgruppe $G/_H$ oder $G/_{H_1}$. Eine Syzygie wird ja durch die Bedingung

$$\sum_i (t_i u'_i - t'_i u_i) \equiv 0 \tag{13}$$

charakterisiert. Wenn hier t_i, u_i eine G_{p^ν} durchläuft, so muss offenbar t'_i, u'_i einer $G_{p^{2r-\nu}}$ angehören. Die Untergruppen G_{p^ν} und $G_{p^{2r-\nu}}$ sind also paarweise einander zugeordnet, so dass die Operationen der einen Gruppe in syzygetischem Verhältniss zu denjenigen der anderen stehen. Hierbei kann es aber verschiedene Möglichkeiten bezüglich der gemeinsamen Untergruppe geben. Ist $\nu \leqq r$, so erhält man hierdurch $\left[\frac{\nu+1}{2}\right]$ Typen von G_{p^ν} und $G_{p^{2r-\nu}}$. Zunächst können nämlich sämtliche Paare von Operationen der G_{p^ν} in gegenseitigem syzygetischen

[1] Man sehe die grosse Abhandlung von H. Burkhardt, Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunktionen, Math. Ann. 36, 38, 41.

Verhältniss stehen. Ist dies nicht der Fall, so hat man in der G_{p^ν} eine Untergruppe von der Ordnung p^2 mit in Bezug auf einander azygetischen zyklischen Untergruppen. In der G_{p^ν} ist dieser G_{p^2} eine $G_{p^{\nu-2}}$ zugeordnet, welche, von der Identität abgesehen, ganz ausserhalb der G_{p^2} liegt. Sind nun nicht sämtliche Operationen der $G_{p^{\nu-2}}$ mit sämtlichen Operationen der G_{p^ν} syzygetisch, so kann man jetzt in der ersteren Gruppe eine G_{p^2} bestimmen, welche in Bezug auf einander azygetische zyklische Untergruppen enthält u. s. w. Die Möglichkeiten sind mithin, dass die Operationen der G_{p^ν}, welche sich in dieser Gruppe durchaus syzygetisch verhalten, entweder die G_{p^ν} selbst oder eine $G_{p^{\nu-2r}}$ $\left(r=1,\ldots\left[\frac{\nu}{2}\right]\right)$ erfüllen.

Die Anzahl der Untergruppen lässt sich in den verschiedenen Fällen ohne Schwierigkeit berechnen. Für Gruppen G_{p^ν}, deren Operationen sich durchgehends in Bezug auf einander syzygetisch verhalten, bekommt man die Anzahl

$$\frac{p^{2r}-1}{p-1}\cdot\frac{p^{2r-2}-1}{p^2-1}\cdots\frac{p^{2r-2\nu+2}-1}{p^\nu-1}, \tag{14}$$

also für $\nu=r$

$$(p^r+1)(p^{r-1}+1)\cdots(p+1). \tag{15}$$

Für $\nu=r=2$ erhält man

$$(p^2+1)(p+1)=\frac{p^4-1}{p-1} \tag{16}$$

oder die gleiche Anzahl wie diejenige der Untergruppen G_p. Setzt man hier noch $p=3$, so bekommt man zwei verschiedene Systeme von Untergruppen der in der vorigen Nummer besprochenen einfachen G_{25920} vom Index 40.

Für $r=2$ treten die G_{p^2} vom azygetischen Typus paarweise auf, indem die Operationen der einen Gruppe sich in Bezug auf diejenigen der anderen syzygetisch verhalten. Man erhält $p^2(p^2+1)$ Untergruppen G_{p^2} von diesem Typus, also

$$\frac{1}{2}p^2(p^2+1) \tag{17}$$

einander zugeordnete Paare. Für $p=3$ ist letztere Zahl $=45$. Dies ergibt einen dritten Typus von Untergruppen der einfachen G_{25920}, und zwar vom Index

45.[1] Diese drei Systeme von Untergruppen der G_{25920} waren schon C. Jordan bekannt.

Für $p=2$, $r=3$ werden die 63 von der Identität verschiedenen Operationen der Abelschen Gruppe H durch die 63 Steinerschen Komplexe von Berührungskegelschnitten einer allgemeinen ebenen Kurve vierter Ordnung veranschaulicht. In Übereinstimmung mit (14) hat man auch 315 syzygetische Tripel und 135 syzygetische Septupel solcher Komplexe. Als allgemeine Formel für die Anzahl azygetischer G_{p^2} erhält man

$$p^{2r-2}\frac{p^{2r}-1}{p^2-1}; \tag{18}$$

die Anzahl azygetischer Tripel von Steinerschen Komplexen ist auch, dem entsprechend, 336.

6. Mit dem Falle $p=r=2$, also der quaternären G_{11520}, wollen wir uns etwas mehr eingehend beschäftigen und dabei auch die zugehörige geometrische Konfiguration in Betracht nehmen, welche in der Tat, ebenso wie die Oktaederkonfiguration oder diejenige der neun Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung, besondere Beachtung zu verdienen scheint. Die von der Identität verschiedenen 15 Operationen der Abelschen Gruppe H lassen die Punkte je zweier windschiefen Geraden invariant, und es handelt sich demnach im wesentlichen um *die Konfiguration dieser 15 Geradenpaare.* Zwei in Bezug auf einander syzygetische Linienpaare schneiden einander, so dass ein geschlossenes Vierseit gebildet wird, und zwei azygetische verlaufen windschief. Den 15 syzygetischen G_4 entsprechen 15 syzygetische Tripel von Geradenpaaren, und ein solches Tripel wird von den Kanten des Koordinatentetraeders gebildet. Das einzelne Linienpaar wird von 6 anderen getroffen, so dass dasselbe in drei Koordinatentetraedern Teil nimmt, und ist in Bezug auf die 8 übrigen windschief. Ebenso entsprechen den 20 azygetischen G_4 eben so viele windschiefe Tripel von Linienpaaren. Letztere sind einander paarweise zugeordnet, so dass die 6 Geraden des einen Tripels von denjenigen des anderen getroffen werden. Dies bedeutet, dass die beiden Tripel von Linienparen den Erzeugendensystemen einer Fläche zweiter Ordnung angehören müssen. Den 10 Paaren von azygetischen G_4 sind mithin 10 Flächen

[1] Bei der Fläche dritter Ordnung wird dies System von Untergruppen durch die 45 Ebenen durch drei gerade Linien illustriert. Mit dem obigen Ausgangspunkte sind die beiden Systeme von Untergruppen, welche den 27 geraden Linien bez. 36 Doppelsechsen der Fläche entsprechen, nicht so unmittelbar zu definieren. Man vergleiche hierüber die zitierte Arbeit von Burkhardt.

zweiter Ordnung zugeordnet. Eine bekannte Eigenschaft dieses Systems von Flächen zweiter Ordnung ist, dass je zwei von denselben einander immer in 4 gerade Linien schneiden. Dies hat seinen Grund in der leicht erkennbaren Tatsache, dass bei zwei verschiedenen Paaren azygetischer G_4, immer je eine G_4 des einen Paares mit je einer G_4 des anderen Paares eine G_2 gemein hat. In der Tat hat man auch, den 9 anderen Paaren von Tripeln entsprechend, 9 Möglichkeiten ein Paar des einen Tripels mit einem Paare des anderen Tripels bei einem bestimmten Paare azygetischer Tripel zu kombinieren.

Bekanntlich ist die Faktorgruppe der G_{11520} in Bezug auf die Abelsche G_{16} mit der symmetrischen Gruppe von 6 Dingen homomorph, und dies, auf Grund einer besonderen Eigenschaft dieser Gruppe, in zwei Weisen. Nach den verschiedenen Zerfällungen von 6 Dingen in $2+4$ bekommt man zweierlei Möglichkeiten von Untergruppen dieser Gruppe vom Index 15. Diese lassen ihre Spur bei der ausgezeichneten G_{16} in den 15 von der Identität verschiedenen Operationen, bez. den 15 syzygetischen Tripel. Es ist in der Tat auch möglich die fraglichen 15 Operationen in der folgenden Weise je durch zwei Indizes α und β zu bezeichnen:

1. α und β sind von einander verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots 6$, und es ist $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$.

2. Zwei Operationen $s_{\alpha\beta}$ und $s_{\alpha_1\beta_1}$ sind syzygetisch, wenn beide Indizes α, β von beiden Indizes α_1, β_1 verschieden sind, im anderen Falle azygetisch.

3. Das Produkt von zwei syzygetischen Operationen $s_{\alpha\beta}$ und $s_{\alpha_1\beta_1}$ ist $s_{\alpha_2\beta_2}$, wo α_2 und β_2 die noch übrigen Indizes bedeuten, und das Produkt von zwei azygetischen Operationen $s_{\alpha\beta}$ und $s_{\alpha\beta_1}$ ist $s_{\beta\beta_1}$.

Nach diesen Vorschriften finden wir für ein beliebiges Produkt $s_{\alpha\beta} s_{\alpha_1\beta_1} \ldots s_{\alpha_\varrho\beta_\varrho}$ die Identität, falls sämtliche Indizes $1, 2, \ldots 6$ entweder eine gerade oder ungerade Anzahl von Malen vorkommen, sonst aber $s_{\gamma\delta}$, wenn γ und δ eine gerade bez. ungerade Anzahl von Malen auftreten, und die übrigen 4 Indizes sich in der entgegengesetzten Weise verhalten. Als Beispiel von einem syzygetischen Tripel hat man dann:

$$s_{12},\ s_{34},\ s_{56}$$

und von einem Paare azygetischer Tripel:

$$s_{12},\ s_{13},\ s_{23};\ s_{45},\ s_{46},\ s_{56}.$$

In dieser Bezeichungsweise ist unmittelbar ersichtlich, dass man in 6 Weisen azygetische Quintupel, wie

$$s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}$$

erhält. *Geometrisch wird also das eine System von 6 gleichberechtigten Untergruppen der Faktorgruppe durch diese 6 Systeme von je 5 in Bezug auf einander windschiefen Geradenpaaren veranschaulicht.*[1]

Der anderen Möglichkeit von 6 gleichberechtigten Untergruppen entsprechend, hat man zwei verschiedene Arten von Beziehungen zwischen zwei syzygetischen Tripeln, welche als syzygetisch und azygetisch bezeichnet werden können. Dabei wird jedesmal durch zwei gegebene ein dritter Tripel eindeutig bestimmt, so dass es sich auch hier um syzygetische und azygetische *Tripel* handelt. In syzygetischer Beziehung stehen zwei Tripel zu einander, wenn sie ein Geradenpaar gemein haben, wie

$$s_{12}, s_{34}, s_{56}; \quad s_{12}, s_{35}, s_{46}.$$

Dieses Geradenpaar gehört dann noch zu einem dritten Tripel, wie im gegebenen Beispiele

$$s_{12}, s_{36}, s_{45}.$$

Ein syzygetisches Tripel von Tetraedern hat also ein Geradenpaar gemein und ist mithin einer einzelnen Operation der G_{16} zugeordnet.

Bei zwei azygetischen Tetraedern wird jedes Linienpaar des einen Tetraeders durch ein Linienpaar des anderen getroffen, und in dieser Weise erhält man drei geschlossene Vierseite. Als drittes Tetraeder im azygetischen Tripel tritt nun dasjenige auf, welches diese drei Vierseite zu Tetraedern vervollständigt, welche ein beigeordnetes azygetisches Tripel bilden, wie es ja auch zu erwarten war. Als Beispiel gehen wir aus von

$$s_{12}, s_{34}, s_{56}; \quad s_{13}, s_{25}, s_{46}.$$

Die Vervollständigung geschieht durch

$$s_{16}, s_{24}, s_{35}.$$

Als beigeordnetes azygetisches Tripel erhält man

$$s_{12}, s_{46}, s_{35}; \quad s_{34}, s_{25}, s_{16}; \quad s_{56}, s_{13}, s_{24}.$$ [2]

[1] Diese Systeme gehören je zu den 6 nach F. KLEIN im Zusammenhange mit der G_{11520} stehenden linearen Komplexe.

[2] Man bemerke, dass die hier nicht eingehenden Oparationen $s_{14}, s_{15}, s_{45}; s_{23}, s_{26}, s_{36}$ ein azygetisches Tripelpaar bilden, dass also eine Zuordnung zwischen den beiden Arten von azygetischen Tripelpaaren besteht.

Offenbar hätten wir hier auch wie im vorigen Fall den einzelnen Tripeln zwei Indizes α, β beilegen und daraus die Existenz von 6 azygetischen Quintupeln erschliessen können. Als ein solches System geben wir:

$$s_{12}, s_{34}, s_{56};\ s_{13}, s_{25}, s_{46};\ s_{14}, s_{26}, s_{35};\ s_{15}, s_{24}, s_{36};\ s_{16}, s_{23}, s_{45},$$

und die 5 übrigen erhält man, wenn man etwa 1 der Reihe nach mit den 5 anderen Indizes transponiert. *Mit den 6 Möglichkeiten die 15 Geradenpaare in 5 Tetraeder zu zerlegen hängt also die andere Klasse von Untergruppen vom Index 6 zusammen.*

Wir möchten noch auf die Eigentümlichkeit aufmerksam machen, dass, falls man ein azygetisches Quintupel nebst der Identität mit einer ausserhalb derselben befindlichen Operation kombiniert, so resultiert ein azygetisches Tripelpaar. Da man mit 10 Operationen kombinieren kann, so erhält man in dieser Weise aus einem Quintupel sämtliche 10 Tripelpaare. Geht man z. B. vom Quintupel

$$s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}$$

aus und kombiniert mit s_{23}, so ergibt sich das Paar

$$s_{23}, s_{13}, s_{12};\ s_{56}, s_{46}, s_{45}.$$

Dies steht mit Verhältnissen bei beliebigem r und $p=2$ in Zusammenhang, auf welche wir doch hier nicht eingehen wollen.