# LA VARIATION DE LA MASSE.

PAR

J. LE ROUX

À RENNES.

1. — Parmi les résultats auxquels conduit la théorie de la relativité restreinte, l'un des plus inattendus est la variation de la masse avec la vitesse. En d'autres termes la mesure de la masse fournira des valeurs différentes suivant que le mobile sera en repos ou en mouvement par rapport à l'observateur.

On est amené ainsi à distinguer une *masse au repos*, une *masse longitudinale* et une *masse transversale*. Ces deux dernières sont relatives aux corps en mouvement. Il y a même une masse *maupertuisienne* qui se ramène d'ailleurs à la masse transversale.

Il est intéressant d'examiner si ces nouvelles conceptions sont réellement en contradiction avec les principes de la mécanique newtonienne, où l'on suppose la masse constante, ou si, au contraire, l'opposition existe seulement dans les mots, dont la signification n'est pas la même dans les deux théories.

2. — Les définitions basées sur des notions métaphysiques sont généralement vagues et imprécises, car nous n'avons aucun moyen de comparer entre elles les images mentales que deux personnes différentes font correspondre à un même mot ou à un même symbole. Ce que nous pouvons vérifier c'est l'emploi qui en est fait pour la description des faits observables. C'est pourquoi la véritable définition d'une quantité physique c'est le procédé expérimental qui sert à en déterminer la valeur numérique soit par une mesure directe, soit par un calcul approprié.

3. — Dans la mécanique classique la masse statique, pour un corps de dimensions restreintes, se mesure à l'aide de la balance. Cette mesure est fondée sur les propriétés suivantes:

1°. Deux quantités égales d'une même matière homogène se font toujours équilibre;

2°. Deux corps de matières différentes qui se font équilibre en un lieu se font aussi équilibre en tout autre lieu accessible;

3°. Si deux corps $A$ et $B$ font respectivement équilibre à deux autres $A'$ et $B'$, la réunion de $A$ et $B$ fait équilibre à la réunion de $A'$ et $B'$, quel que soit d'ailleurs le mode d'association de ces corps entre eux;

4°. Il n'y a pas de corps de poids nul.

Ces propriétés permettent de déterminer le rapport du poids d'un corps quelconque à celui d'un autre corps fixe choisi comme unité. C'est ce rapport constant qu'on appelle la masse du corps considéré.

La masse d'un corps composé est toujours égale à la somme des masses des éléments composants.

4. — Le rôle de la masse dans la dynamique classique est étroitement lié à la notion de force. Je n'ai pas la prétention de faire une discussion complète des principes de la dynamique ni de montrer comment la notion statique de force se rattache à la notion cinématique d'accélération. On sait que le résultat fondamental est le suivant.

Soit un point matériel $M$ de masse $m$ rapporté à des axes de coordonnées rectangulaires et soit $t$ le temps canonique de la gravitation, représenté approximativement par le temps solaire moyen:

Les équations du mouvement de ce mobile par rapport au trièdre de coordonnées considéré peuvent s'écrire sous la forme

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi_x,\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=\varphi_y,\qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=\varphi_z. \tag{1}$$

Les quantités $\varphi_x$, $\varphi_y$, $\varphi_z$ sont, *par définition*, les composantes de la force qui produit le mouvement. Il ne s'agit pas ici d'une loi physique d'origine expérimentale, dont on pourrait perfectionner l'expression par des observations plus précises: il s'agit d'une définition. Si l'on a mesuré la masse $m$ et observé le mouvement on en déduit la loi de force.

Un exemple très simple de problème de ce genre nous est fourni par le mouvement des projectiles dans l'air. Ici le mouvement a lieu dans un champ de forces statiques dont la loi est connue; mais le résultat est très différent de celui qui serait dû à la seule action de ces forces. C'est pourquoi on est conduit à introduire une force fonction de la vitesse et dont on cherche à déterminer la loi en faisant varier les conditions du mouvement.

5. — C'est aussi l'observation des mouvements qui permet de déterminer les rapports des masses des astres du système solaire. Il faut toutefois observer une différence entre ce problème et le précédent. Il ne s'agit pas ici d'une identité de définition. On admet, pour les forces en jeu, une expression déterminée, fournie par la loi de l'attraction newtonienne. Les masses inconnues figurent dans les expressions considérées sous forme de coefficients constants dont il reste à calculer les valeurs de manière à identifier les résultats des calculs avec ceux de l'observation. Il est évident que tout perfectionnement éventuel de la loi de Newton pourra modifier dans une certaine mesure la forme et les résultats de ces calculs.

Il est intéressant d'observer que toute détermination de masse en mécanique classique repose sur le phénomène général de la gravitation. C'est donc à juste titre que les auteurs modernes ont rattaché l'idée de la masse à celle des actions mutuelles.

6. — D'ailleurs le fait de la gravitation est tellement lié aux fondements de la mécanique que lorsqu'on veut l'écarter il reparaît sous une forme dissimulée. Le principe même de l'inertie n'en est pas indépendant.

Le principe de l'inertie revient à dire en effet qu'il existe un système de référence canonique $S$ tel que tout point matériel non soumis à une influence extérieure prend par rapport à $S$ un mouvement rectiligne et uniforme. Or ce n'est sans doute pas par un simple effet du hasard que les axes de référence du système $S$ sont orientés d'une manière à peu près invariable par rapport aux étoiles fixes. L'influence de l'univers extérieur intervient donc déjà dans la détermination du système $S$.

D'autre part il n'y a pas de mouvement uniforme en soi. Un mouvement est uniforme par rapport à un autre. Quand nous disons simplement qu'on mouvement est uniforme, nous sous-entendons qu'il est uniforme par rapport au mouvement type qui nous sert à repérer le temps. C'est en pratique le temps sidéral ou le temps solaire moyen. En théorie ce serait le temps canonique de la gravitation. Le concept d'uniformité contient donc implicitement une hypothèse de coordination et de solidarité entre le mouvement considéré et l'ensemble des mouvements de l'univers.

C'est précisement cette solidarité qui constitue le caractère fondamental de la gravitation.

7. — Il nous reste maintenant à examiner le point de vue de la relativité. La mécanique relativiste repose tout entière sur une certaine interprétation de la

transformation de Lorentz. Cette transformation conserve la forme de l'équation de la propagation du son, ce qui lui confère un rôle spécial très important dans l'étude des phénomènes de propagation par ondes en milieu isotrope. Elle a d'abord été envisagée à ce point de vue par Voigt dans un mémoire sur le Principe de Döppler.[1]

On sait que les formules de transformation de Lorentz peuvent se ramener à la forme réduite suivante, où $c$ désigne la vitesse de la lumière et $v$ la vitesse de l'origine mobile sur l'axe $Ox$:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x-vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t-\frac{vx}{c^2}\right). \tag{2}$$

On donne quelquefois le nom de translation à la transformation de Lorentz. Pour éviter toute équivoque il convient d'observer que la translation étudiée en mécanique classique résulte d'une autre définition tout aussi légitime. Il ne s'agit pas d'une représentation plus ou moins approchée d'un phénomène physique, d'un degré d'exactitude plus ou moins grand: il s'agit d'un fait de définition. Si l'on donne le nom de translation à la transformation de Lorentz, il faudra donner un autre nom à la translation ordinaire de la mécanique classique; nous l'appellerons la *translation euclidienne.*

Il faut faire la même observation à propos de la composition des vitesses. Pour deux vitesses de même direction, $v$ et $v'$, la considération de la translation euclidienne donne la vitesse résultante $v + v'$ et la composition des transformations de Lorentz donne la vitesse résultante $\dfrac{v+v'}{1+\dfrac{vv'}{c^2}}$. Les deux résultats sont aussi exacts et aussi légitimes l'un que l'autre, mais le mot *vitesse* n'a pas le même sens dans les deux théories.

8. — Au point de vue des applications il n'est pas vraisemblable qu'il existe un mouvement réel qui soit représenté rigoureusement par les formules de la translation euclidienne. C'est un cas limite, purement théorique, dont certains mouvements réels peuvent fournir une image plus ou moins approchée.

En ce qui concerne les formules de transformation de Lorentz la situation est différente. Ces formules ne représentent pas, même d'une façon approchée, le mouvement d'un système. Cette observation n'est pas de nature à diminuer

[1] Gött. Nach. (1887), p. 71.

la très grande importance scientifique de la transformation de Lorentz. Mais, à cause de cette importance même, il est utile d'en préciser la signification.

Pour la discussion de cette question je suis heureux de pouvoir faire état d'une communication que je dois à la très aimable obligeance de M. Mittag-Leffler.

On sait que Weierstrass s'était occupé, pendant des années, des principes de la Mécanique et qu'il avait même écrit sur ce sujet un travail développé qui a été malheureusement perdu dans les conditions que M. Mittag-Leffler a racontées dans son opuscule sur WEIERSTRASS et SONJA KOWALEWSKI. Une annotation prise par M. Mittag-Leffler à la suite d'une conversation avec Weierstrass à Wernigerode au cours de l'été de 1888 contient cette définition intéressante, extrêmement générale du mouvement:

»Bewegung ist eine Ueberführung aller Bestimmungs-Elemente eines etwas auf ein anderes etwas».

Le mouvement est un transfert de tous les éléments de détermination d'une chose sur une autre chose.

L'une des caractéristiques essentielles de l'idée de mouvement c'est la conception d'éléments mobiles qui conservent leur individualité dans le transfert d'une position à une autre.

En introduisant dans les formules de Lorentz cette condition de permanence on obtient les formules de la translation rectiligne et uniforme de la mécanique classique. Considérons un système de points invariablement liés aux axes $O'x'y'z'$. On définira ce système en attribuant aux coordonnées $x'$, $y'$, $z'$ un système de valeurs fixes et en y joignant en outre la condition $t'$ arbitraire. Prenons un point du système: $x'=a$, $y'=b$, $z'=c$, $t'$ arbitraire. En portant ces valeurs dans les formules de Lorentz on obtient

$$x-vt=a\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}};\quad y=b;\quad z=c.$$

Si l'on désigne par $x_0$, $y_0$, $z_0$ les valeurs de $x$, $y$, $z$ pour $t=0$, ces formules deviennent simplement

$$x-vt=x_0,\quad y=y_0,\quad z=z_0.$$

La quatrième formule de Lorentz, relative à la variable $t'$ disparaît, précisément à cause de la condition de permanence ($t'$ arbitraire).

On retrouve donc les formules de la translation rectiligne et uniforme de la mécanique classique. Les deux systèmes de coordonnées $x_0$, $y_0$, $z_0$ et $x$, $y$, $z$

se rapportent ici à deux états différents du système mobile, à deux objets différents au sens de Weierstrass, ces deux états étant rapportés à un même système de référence.

Au contraire dans les formules de Lorentz les systèmes de variables $x, y, z, t$, ou $x', y', z', t'$ se réfèrent à un même fait rapporté à deux systèmes différents et attribués à deux observateurs différents, en mouvement l'un par rapport à l'autre.

9. — Il est curieux de constater que le point de vue de Lorentz ne semble pas avoir de relation avec le postulat de la relativité tel qu'il avait été d'abord envisagé par Poincaré dans une conférence au Congrès des Physiciens à l'exposition de 1900.

Le postulat de Poincaré consistait en effet à admettre que, par des expériences intérieures à un système, il serait impossible de mettre en évidence le mouvement de translation uniforme de ce système par rapport à l'éther. Chaque observateur n'étudie que les phénomènes qui se passent dans le système matériel auquel il appartient.

La théorie de Lorentz, au contraire, suppose essentiellement que le même phénomène soit examiné par deux observateurs en mouvement l'un par rapport à l'autre. La distinction entre les deux points de vue a une grande importance au point de vue de la critique scientifique. Dans les deux cas il faut comparer deux systèmes de référence. Mais un système lié à un observateur correspond à des mesures effectivement faites par l'observateur considéré, tandis qu'un système non lié à un observateur correspond à une simple définition mathématique. Les coordonnées de ce second système se déduisent de celles du premier par des opérations déterminées qui servent de base à la définition.

En revenant à la transformation de Lorentz, si l'on admet que les deux systèmes correspondent à des mesures directement effectuées par des observateurs différents, étudiant un même phénomène, les relations entre les deux systèmes expriment une loi physique. Si au contraire un seul des systèmes correspond à des mesures directes, les relations considérées se réduisent à de simples identités mathématiques.

10. — Les observations qui précèdent ne permettent de rien conclure contre la validité des équations de la dynamique de la relativité. Les considérations qui ont servi à les établir ne sont pas évidemment à l'abri de la critique, mais le résultat est aussi justifié que celui de la mécanique classique. On peut raisonner sur la transformation de Lorentz comme sur la translation euclidienne. D'autre part Lorentz admet que les forces ordinaires de la mécanique sont in-

fluencées, par la transformation considérée, de la même manière que les composantes du champ électro-magnétique. Cette hypothèse est admissible, mais elle n'a aucune signification physique puisque les forces peuvent dépendre de la vitesse.

En fait, dans la mécanique relativiste, comme dans la mécanique classique, les équations du mouvement constituent de véritables identités de définition des forces.

Soit $m_0$ la masse statique d'un point mobile, $v$ sa vitesse par rapport à un système de référence $x, y, z, t$; $F_x, F_y, F_z$ les composantes de la force qui produit le mouvement; les équations fondamentales de la dynamique relativiste s'écrivent de la manière suivante

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0 \dfrac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right) = F_x, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0 \dfrac{dy}{dt}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right) = F_y, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0 \dfrac{dz}{dt}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right) = F_z. \end{cases}$$

La masse étant considérée comme le coefficient de proportionnalité de la force à l'accéleration, on est amené à envisager deux masses, la masse longitudinale correspondant au cas où la force agit dans le sens de la vitesse et la masse transversale correspondant à la force perpendiculaire à la vitesse.

Ces masses ont les expressions suivantes:

$$\text{masse longitudinale } m_L = \frac{m_0}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{masse transversale } m_P = \frac{m_0}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

11. — Ces formules donnent lieu à une remarque immédiate:

Si l'on considère deux points mobiles, dans les mêmes conditions de vitesse, le rapport de leurs masses homologues est indépendant de cette vitesse commune. Les masses respectives étant désignées par les lettres $m$ et $m'$ affectées des mêmes indices, on a:

$$\frac{m_0}{m_0{}'} = \frac{m_L}{m_L{}'} = \frac{m_P}{m_P{}'}.$$

Cette remarque a une importance capitale. Elle montre que, même dans la dynamique de la relativité, la masse, considérée comme quantité physique mesurable, exprimée par le rapport de deux quantités homologues, a une valeur constante.

A cet égard il n'y a aucune opposition avec la mécanique classique.

L'opposition, au contraire, paraît se manifester dans l'action supposée de la force sur un point mobile. Mais nous allons reconnaître qu'il y a là une simple apparence.

Les équations (3) peuvent être en effet résolues par rapport aux dérivées secondes et ramenées à la forme suivante:

$$m_0 \frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_x \ldots \ldots,$$

en posant

$$\varphi_x = \left[F_x - \frac{1}{c^2}\frac{dx}{dt}\left(F_x\frac{dx}{dt} + F_y\frac{dy}{dt} + F_z\frac{dz}{dt}\right)\right]\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ce sont les équations de la mécanique classique: $\varphi_x$, $\varphi_y$, $\varphi_z$ seraient les composantes de la force au sens de la mécanique newtonienne, tandis que $F_x$, $F_y$, $F_z$ seraient les composantes de la force relativiste.

Pour $v=0$, on a identiquement $\varphi_x = F_x$.

12. — La conséquence de ces résultats est immédiate.

Les équations de la mécanique classique et celles de la mécanique relativiste se ramènent les unes aux autres; elles ne diffèrent entre elles que par le sens des mots *force* et *masse* pour les corps en mouvement.

Or les seules forces mesurables sont les forces statiques, dont le point d'application est lié invariablement aux instruments de mesure. Pour ces forces statiques l'expression est exactement la même dans les deux théories.

Pour les forces agissant sur les corps en mouvement aucune mesure directe ne peut être effectuée. La force n'est plus qu'un objet de définition et ce sont précisément les équations du mouvement qui précisent cette définition. Suivant qu'on prend les équations de la mécanique classique ou celles de la mécanique relativiste on obtient la force newtonienne ou la force relativiste. L'une et l'autre peuvent être envisagées et aucune expérience ne peut trancher un différend basé sur une simple définition de mots.

Chercher à résoudre expérimentalement la question équivaudrait à chercher laquelle est la plus exacte des deux équations suivantes

$$\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{dv}{dt} = F = \frac{\varphi}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$m_0\frac{dv}{dt} = F\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \varphi,$$

$F$ et $\varphi$ étant des fonctions qui peuvent dépendre de la vitesse.

Il faut donc chercher une autre interprétation aux travaux qui ont eu pour objet d'établir un départ entre la mécanique classique et la mécanique relativiste. Ce ne sont que des langages différents pouvant également servir à décrire les mêmes phénomènes.