

SUR LES DOMAINES DE DÉTERMINATION INFINIE DES FONCTIONS ENTIÈRES.

PAR

HENRI MILLOUX

à STRASBOURG.

Introduction.

Le présent mémoire est consacré à l'application, à l'étude des domaines de détermination infinie des fonctions entières, d'une inégalité dite fondamentale, démontrée dans le chapitre I. Cette inégalité est obtenue par une combinaison du principe de la majorante harmonique et du théorème fondamental de la thèse de M. Ahlfors. Elle concerne une fonction holomorphe et assez grande en module dans un domaine simplement connexe situé dans une couronne circulaire, et fait intervenir les maxima des modules de la fonction sur 2 portions déterminées de la frontière du domaine, la valeur de la fonction (en module) en un point intérieur, ainsi que la grandeur angulaire du domaine sur chaque circonférence concentrique à la couronne (voir théorème I).

Dans le chapitre II, nous faisons intervenir, dans le seul but de simplifier les énoncés, la notion de domaine associé d'un domaine multiplement connexe; puis nous traduisons brièvement l'inégalité fondamentale, la fonction considérée étant entière, mais non astreinte à d'autres conditions.

Dans le chapitre III, nous appliquons à l'étude des fonctions entières d'ordre supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$: nous tirons de l'inégalité fondamentale des conséquences diverses, notamment de forme et de nombre des domaines de détermination infinie: le nombre de ces domaines, si ρ est l'ordre de la fonction, est au plus égal à 2ρ , comme l'a déjà montré M. Bieberbach après les travaux de M. Ahlfors sur le théorème de M. Denjoy (M. Valiron avait déjà remarqué que ce nombre

est inférieur à 5ρ). Nous sommes amenés à rechercher le nombre maximum des domaines s'étendant à l'infini, où la fonction ne croît pas plus rapidement qu'un polynôme, ou qu'une fonction d'ordre inférieur à ρ : nous montrons que ce nombre maximum est encore 2ρ , et donnons une propriété des fonctions atteignant la limite.

Le chapitre IV a trait aux fonctions entières d'ordre infini: à celles-ci s'applique encore l'inégalité fondamentale. Nous donnons une proposition générale de grandeur angulaire des domaines de détermination infinie, de même qu'une limitation simple, en fonction de r , du nombre de ces domaines intérieurs au cercle de centre origine et de rayon r . Une méthode spéciale nous permet d'examiner avec fruit une certaine classe de ces fonctions, pour lesquelles la grandeur angulaire des domaines en question est celle minimum qui est trouvée théoriquement.

Enfin, dans le chapitre V, nous étudions brièvement le cas des fonctions entières d'ordre inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Abandonnant l'inégalité fondamentale, nous établissons que le principe de la majorante harmonique suffit pour retrouver et préciser le théorème bien connu de M. Wiman. Nous faisons finalement retour à l'inégalité fondamentale pour retrouver et préciser une propriété, due à M. Valiron, sur les domaines où une fonction entière d'ordre nul reste bornée, et étendons au cas de l'ordre fini inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$.

L'inégalité fondamentale qui sert de base à ce mémoire a été citée dans une note des C. R. de l'Ac. des Sc. (15 fév. 1932, p. 587) et quelques-unes de ses conséquences pressenties.

Toutes ces propriétés s'étendent aux fonctions méromorphes possédant une valeur exceptionnelle au sens de M. Borel (valeur qu'on peut supposer être l'infini).

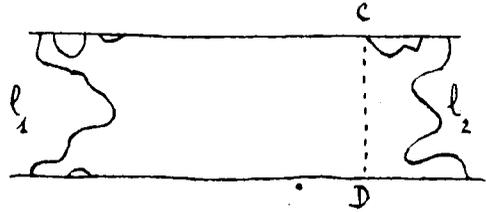
I.

Une inégalité fondamentale.

1. — *Problème préliminaire.* — Soit δ un domaine simplement connexe du plan $\zeta = \xi + i\eta$, limité, d'une part par des segments des droites $\eta = \pm \frac{\pi}{2}$, d'autre part par deux courbes l_1 et l_2 traversant la bande comprise entre les

deux droites précédentes. Il n'est pas interdit aux courbes l_1 et l_2 d'avoir chacune plusieurs arcs intérieurs à la bande, comme l'indique la figure ci-contre.

Nous supposons que le minimum α des abscisses des points de la courbe l_2 (qui est la courbe limitant à droite le domaine δ) surpasse le maximum des abscisses des points de la courbe l_1 .



Soit $\varphi(\zeta)$ une fonction holomorphe dans le domaine δ ; on désigne par m_2

une quantité supérieure ou égale aux valeurs de $|\varphi(\zeta)|$ sur la courbe l_2 , et par m_1 une quantité supérieure ou égale aux valeurs de $|\varphi(\zeta)|$ sur le reste du contour du domaine δ . On suppose m_2 supérieur à m_1 .

Ceci posé, nous nous proposons de rechercher une limite supérieure de $|\varphi(\xi + i\eta)|$ en un point $\xi + i\eta$ intérieur au domaine δ , et situé à gauche de la courbe l_2 (c'est-à-dire tel que ξ soit inférieur à α).

Ce problème est analogue à un problème traité récemment par M. G. Julia¹, et dans lequel cet auteur étudie une extension d'une inégalité de M. Carleman. La démonstration qui va suivre du problème que nous traitons ici est inspirée directement du mémoire de M. G. Julia.

Sur la droite CD d'abscisse α (limitée en C et D aux droites $\eta = \pm \frac{\pi}{2}$), la borne supérieure de $|\varphi(\zeta)|$ est évidemment inférieure ou égale à m_2 ; nous pouvons donc nous contenter de traiter le problème pour le domaine δ_1 extrait du domaine δ en supprimant de celui-ci la portion comprise entre le segment de droite CD et la courbe l_2 .

Posons

$$Z = e^{\zeta - \alpha} = e^{\xi - \alpha + i\eta}.$$

A la portion $\xi \leq \alpha$ de la bande rectangulaire $|\eta| \leq \frac{\pi}{2}$ correspond le demi-cercle

$$|Z| \leq 1; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg } Z \leq \frac{\pi}{2}.$$

¹ G. Julia: *Sur quelques majorantes utiles dans la théorie des fonctions analytiques ou harmoniques* (Ann. Ec. Norm. Sup., t. XLVIII, p. 38).

Au segment CD correspond la demi-circonférence limite $C'D'$; à chacune des demi-droites $\eta = \pm \frac{\pi}{2}$ correspondent les rayons OC' et OD' . Enfin, à la frontière de gauche l_1 du domaine δ_1 correspond une courbe l'_1 limitant le domaine transformé δ'_1 .

La fonction $\varphi(\zeta)$ se transforme en une fonction $\Phi(Z)$ holomorphe dans δ'_1 . Son module est inférieur ou égal à m_2 sur la demi-circonférence $C'D'$, et à m_1 sur le reste du contour de δ'_1 . Considérons la fonction harmonique $u(Z)$ qui prend les valeurs $\log m_1$ sur le diamètre $C'D'$, et $\log m_2$ sur la demi-circonférence $C'D'$. m_2 étant supérieur à m_1 , sur la courbe l'_1 la fonction harmonique $u(Z)$ est supérieure à $\log m_1$. Il en résulte que dans tout le domaine transformé δ'_1 , on a l'inégalité

$$\log |\Phi(Z)| \leq u(Z).$$

Remarquons que l'égalité ne peut pas avoir lieu si la courbe l'_1 existe, c'est-à-dire ne se réduit pas au point o .

Tout revient donc à former cette fonction $u(Z)$. Or, la fonction

$$v = \text{Arg} \frac{Z_1 - Z}{Z_0 - Z}$$

(Z_0 et Z_1 sont les affixes des points C' et D') prend des valeurs constantes, et différentes, sur le diamètre et sur la demi-circonférence $C'D'$. Une combinaison linéaire de v donnera la fonction u :

$$u = -\frac{2v}{\pi} \log \frac{m_2}{m_1} + 2 \log m_2 - \log m_1,$$

d'où l'inégalité

$$\log |\Phi(Z)| < 2 \log m_2 - \log m_1 - \frac{2}{\pi} \log \frac{m_2}{m_1} \text{Arg} \frac{Z - Z_1}{Z - Z_0}.$$

Revenons maintenant au plan ζ ; nous avons

$$v = \text{Arg} \frac{e^{\zeta-\alpha} + i}{e^{\zeta-\alpha} - i} = \text{Arg} \frac{e^{2(\zeta-\alpha)} - 1 + 2ie^{\zeta-\alpha} \cos \eta}{e^{2(\zeta-\alpha)} + 1 - 2e^{\zeta-\alpha} \sin \eta},$$

d'où

$$\text{tg } v = \frac{2e^{\zeta-\alpha} \cos \eta}{e^{2(\zeta-\alpha)} - 1}.$$

Le numérateur du second membre est positif, car η est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; le dénominateur est négatif ($\xi < \alpha$); $\operatorname{tg} v$ est négative, et comme v est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π , il faut prendre

$$v = \pi - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{2e^{\xi-\alpha} \cos \eta}{1 - e^{2(\xi-\alpha)}}.$$

Suivant les notations habituelles, $\operatorname{Arc} \operatorname{tg}$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Portant cette valeur de v dans la limitation supérieure de $\log |\Phi(Z)|$, c'est-à-dire de $\log |\varphi(\zeta)|$, il vient la limitation suivante, qui résout la question posée dans ce problème préliminaire:

$$(1) \quad \log |\varphi(\xi + i\eta)| < \log m_1 + \frac{2}{\pi} \log \frac{m_2}{m_1} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{2e^{\xi-\alpha} \cos \eta}{1 - e^{2(\xi-\alpha)}}$$

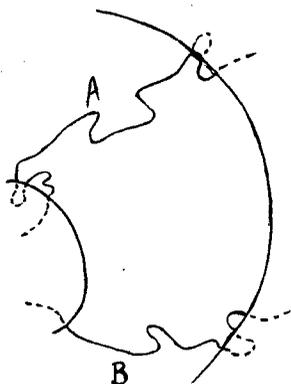
2. — Cette inégalité ne peut être améliorée si l'on ne tient pas compte de la forme du domaine δ . En effet, la méthode employée permet de construire une fonction harmonique prenant les valeurs $m_1 - \varepsilon$ sur les demi-droites $\eta = \pm \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon' \right)$, $\xi < \alpha + \varepsilon''$, et la valeur m_2 sur le segment de la droite $\xi = \alpha + \varepsilon''$ compris entre les demi-droites précédentes.

Soit $\varphi_1(\zeta)$ la fonction analytique de ζ telle que $\log \varphi_1$ admet la fonction harmonique précédente comme partie réelle. La fonction φ_1 est holomorphe dans le domaine δ ; et en choisissant convenablement les quantités positives $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, on constate que $\log |\varphi_1(\xi + i\eta)|$ est aussi voisine que l'en veut du deuxième membre de l'inégalité (1), les conditions requises dans le problème préliminaire étant réalisées pourvu que la courbe l_1 soit suffisamment éloignée à gauche.

3. — Nous nous proposons de revenir plus loin sur les applications de l'inégalité (1) aux fonctions entières d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$.

4. — Soit maintenant D un domaine simplement connexe du plan $z = re^{i\theta}$, limité, d'une part par des arcs des circonférences de centre o et de rayons r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$), d'autre part par deux courbes A et B , dont chacune peut être composée de plusieurs arcs, comme l'indique la figure ci-après. On désigne

par $\theta(r)$ la somme des angles au centre déterminés par le domaine D sur la circonférence de centre o et de rayon r .



La transformation $z' = \log z$ permet de ramener le domaine précédent à un morceau de bande au sens employé par M. Ahlfors dans sa thèse.¹ Le premier théorème fondamental de ce mémoire conduit alors au résultat suivant: on peut représenter conformément le domaine D sur un domaine δ du type étudié dans le problème préliminaire, de façon que A et B correspondent respectivement aux segments des droites $\eta = \pm \frac{\pi}{2}$ limitant le domaine δ , et les arcs des circonférences de centre o et de rayons r_1 et r_2 aux courbes l_1 et l_2 . Alors, le minimum α des abscisses des points de la courbe l_2 et le

maximum β des abscisses des points de la courbe l_1 satisfont à l'inégalité fondamentale

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t\theta(t)} \leq \frac{\alpha - \beta}{\pi} + 4^2$$

(le domaine D est supposé d'une forme telle que l'intégrale du premier membre est supérieure à 4, d'où il résulte que α est supérieur à β).

D'une façon plus générale, soit z un point intérieur à D , de module r , et soit $\zeta = \xi + i\eta$ son transformé dans le domaine δ . On a l'inégalité

$$I = \int_r^{r_2} \frac{dt}{t\theta(t)} \leq \frac{\alpha - \xi}{\pi} + 4$$

si l'intégrale du premier membre surpasse 4, ce que nous supposons.

Ceci rappelé, soit maintenant $f(z)$ une fonction holomorphe dans le domaine D ; m_2 et m_1 deux quantités ($m_2 > m_1$) majorant les valeurs de $|f(z)|$, m_2 sur les arcs situés à la distance r_2 de l'origine, m_1 sur le reste du contour de D .

¹ Voir L. Ahlfors: *Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen* (Acta Soc. Sc. Fennicae, Nova Series A t. 1 n° 9, 1930). Voir aussi du même auteur le lemme 2 de: *Sur une généralisation du théorème de Picard* (C. R. Ac. des Sc., 18 janv. 1932).

² En reprenant le raisonnement de M. Ahlfors, on peut arriver à remplacer $\theta(t)$ par une quantité qui peut être plus petite, suivant les cas de figure. Mais on perd en simplicité ce que l'on gagne en précision.

Après représentation conforme, la fonction $f(z)$ devient la fonction $\varphi(\zeta)$, et nous retombons sur le problème préliminaire. La transcription de l'inégalité (1) dans le plan de la variable z fournit l'inégalité

$$(1') \quad \log |f(re^{i\theta})| < \log m_1 + \frac{2}{\pi} \log \frac{m_2}{m_1} \text{Arc tg} \frac{2e^{-\pi(I-4)} \cos \eta}{1 - e^{-2\pi(I-4)}},$$

η est l'ordonnée du point ζ du domaine δ qui correspond au point $z = re^{i\theta}$. En général, l'intérêt de la conservation de η dans la formule précédente ne peut se faire sentir que pour des valeurs de $\cos \eta$ très voisines de 0. Nous nous contenterons ici de majorer le deuxième membre de l'inégalité (1') en remplaçant $\cos \eta$ par 1. De l'inégalité ainsi simplifiée résulte alors immédiatement l'inégalité suivante:

$$(2) \quad \text{Arc cotg} \frac{e^{\pi(I-4)} - e^{-\pi(I-4)}}{2} > \frac{\pi}{2} \frac{\log \frac{|f(re^{i\theta})|}{m_1}}{\log \frac{m_2}{m_1}}.$$

Deux cas peuvent se présenter:

a. — $|f(re^{i\theta})|$ est inférieur à m_1 . Alors le deuxième membre de l'inégalité (2) est négatif. Ce cas ne présente aucun intérêt, car I a été supposé supérieur ou égal à 4, donc le premier membre est déjà compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

b. — $|f(re^{i\theta})|$ est supérieur ou égal à m_1 (mais inférieur à m_2 puisque le point $re^{i\theta}$ est intérieur au domaine D). Désignons par γ le deuxième membre de l'inégalité (2): γ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On peut écrire l'inégalité (2) sous la forme

$$e^{2\pi(I-4)} - 2e^{\pi(I-4)} \cotg \gamma - 1 < 0,$$

d'où

$$e^{\pi(I-4)} < \cotg \gamma + \sqrt{1 + \cotg^2 \gamma} = \cotg \frac{\gamma}{2}$$

et par suite

$$\int_r^{r_2} \frac{dt}{t\theta(t)} < 4 - \frac{1}{\pi} \log \text{tg} \left[\frac{\pi}{4} \frac{\log \frac{|f(re^{i\theta})|}{m_1}}{\log \frac{m_2}{m_1}} \right].$$

Cette inégalité peut être remplacée par une inégalité plus simple; l'argument de la tg figurant dans le deuxième membre est compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, et lorsque α est compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, le rapport $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$ est compris entre 1 et $\frac{4}{\pi}$. D'où l'inégalité

$$\int_r^{r_2} \frac{dt}{t\theta(t)} < 4 + \frac{1}{\pi} \log \frac{4}{\pi} + \frac{1}{\pi} \log \frac{\log \frac{m_2}{m_1}}{\log |f(re^{i\theta})|}.$$

En résumé, nous avons démontré le

Theorem I. — Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le domaine simplement connexe D limité, d'une part par des arcs des circonférences de centre 0 et de rayons r_1 et r_2 , d'autre part par des courbes A et B , chacune de ces courbes pouvant être composée de plusieurs arcs continus. On désigne par $t\theta(t)$ la somme des arcs de la circonférence de centre 0 et de rayon t intérieurs au domaine D ; soit m_2 et m_1 deux quantités majorant les valeurs de $|f(z)|$, la première sur les arcs situés à la distance r_2 de l'origine, la deuxième sur le reste du contour de D . On suppose m_2 supérieure à m_1 . Soit enfin $z = re^{i\theta}$ un point intérieur à D . Dans le cas où $|f(re^{i\theta})|$ est supérieur à m_1 , on a l'inégalité

$$(3) \quad \int_r^{r_2} \frac{dt}{t\theta(t)} < O(1) + \frac{1}{\pi} \log \frac{\log \frac{m_2}{m_1}}{\log |f(re^{i\theta})|}$$

Remarque. — Dans la démonstration, nous avons supposé l'intégrale du premier membre de l'inégalité (3) supérieure à 4. Il est évident que si l'intégrale était inférieure ou égale à 4, l'inégalité (3) serait a fortiori vérifiée car la constante numérique $O(1)$ qui y figure est un peu supérieure à 4, et le terme complémentaire est positif.

II.

Application générale aux fonctions entières.

5. -- Soit $f(z)$ une fonction entière et soit M un point où son module est supérieur à une constante positive C . L'ensemble des points où $|f(z)|$ est

supérieur à C comprend un domaine connexe ouvert contenant M , s'étendant à l'infini, et sur la frontière duquel $|f(z)|$ est égal à C . Ceci ne prouve pas qu'il existe une courbe frontière s'éloignant indéfiniment (et continue): D'après le théorème de M. Wiřan, cette courbe frontière ne peut exister pour aucune fonction entière d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$.

C'est l'étude de la forme des domaines qui précèdent que nous entreprenons ici; il nous sera utile auparavant de définir une notion nouvelle:

6. — *Domaine associé D d'un domaine borné multiplement connexe \mathcal{A} et grandeur angulaire.* — Adjoignons au domaine \mathcal{A} les domaines intérieurs ne faisant pas partie de \mathcal{A} . Nous constituons ainsi un domaine simplement connexe D que nous appellerons *associé de \mathcal{A}* .

Coupons D par la circonférence $|z| = t$; soit $t\theta(t)$ la somme des longueurs des arcs intérieurs à D . $\theta(t)$ sera appelé *grandeur angulaire du domaine D sur la circonférence $|z| = t$* .

Dans la suite, nous n'aurons à examiner presque uniquement que le cas où $\theta(t)$ n'est jamais égal à 2π , c'est-à-dire le cas où aucune circonférence de centre o n'est intérieure au domaine D .

7. — Cette notion une fois posée, il nous est maintenant possible d'énoncer le théorème suivant:

Theorème II. — *Soit $f(z)$ une fonction entière, dont la valeur en un point M de module r est au moins égale en module à une quantité positive m , et soit m_1 une quantité positive inférieure à m . L'ensemble des points où $|f(z)|$ est supérieure à m_1 comprend un domaine ouvert \mathcal{A} contenant le point M . Limitons ce domaine \mathcal{A} à la circonférence $|z| = r_2$ ($r_2 > r$), et désignons par m_2 une quantité au moins égale aux valeurs de $|f(z)|$ sur les arcs de la circonférence $|z| = r_2$ limitant \mathcal{A} . $\theta(t)$ désignant la grandeur angulaire du domaine associé D de \mathcal{A} sur la circonférence $|z| = t$, on a l'inégalité*

$$(4) \quad \int_r^{r_2} \frac{dt}{t\theta(t)} < O(1) + \frac{1}{\pi} \log \left[\frac{\log m_2 - \log m_1}{\log m - \log m_1} \right]$$

dans le cas où $\theta(t)$ n'est jamais égal à 2π .

Ce théorème n'est que la transcription du théorème I au domaine D , en remarquant que la condition :

$$\log |f(re^{i\theta})| > m_1$$

est réalisée au point M , et que l'on peut remplacer $\log |f(re^{i\theta})|$ par une quantité plus petite: l'inégalité (3) étant a fortiori vérifiée.

III.

Cas des fonctions entières d'ordre fini supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.

8. — Une conséquence immédiate du théorème II est la suivante:

Théorème III (complément du théorème II). — Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini ρ supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. ε étant une petite quantité positive, on peut trouver un point M de module r tel que $\log m$ soit égal à $r^{\rho(1-\varepsilon)}$; $\log m_2$ est inférieur à $r_2^{\rho(1+\varepsilon)}$; enfin, choisissons $m_1 = \sqrt{m}$. On a l'inégalité

$$(5) \quad \int_r^{r_2} \frac{dt}{t\theta(t)} < O(1) + \frac{\rho}{\pi} \log \frac{r_2}{r} + \frac{\rho\varepsilon}{\pi} \log rr_2$$

si $\theta(t)$ n'atteint pas la valeur 2π dans le domaine D .

9. — Désignons par θ le maximum de $\theta(t)$ lorsque t varie de r à r_2 . De l'inégalité précédente découle l'inégalité

$$(5') \quad \frac{1}{\theta} < \frac{\rho}{\pi} + \frac{O(1) + \frac{\rho\varepsilon}{\pi} \log rr_2}{\log \frac{r_2}{r}}$$

si $\theta(t)$ est inférieur à 2π , d'où le

Corollaire I. — Le maximum θ de la grandeur angulaire $\theta(t)$ du domaine D associé de \mathcal{A} lorsque t est compris entre r et r_2 est au moins égal à une quantité d'autant plus voisine de $\frac{\pi}{\rho}$ que le rapport $\frac{r}{r_2}$ et le quantité ε sont plus petits.

Ceci suppose que $\theta(t)$ n'est jamais égal à 2π .

10. — Si la fonction entière $f(z)$ ne possède qu'un seul domaine de détermination infinie, le corollaire précédent s'applique pour une suite de sections de ce domaine s'éloignant indéfiniment. On peut alors affirmer que *le maximum θ de la grandeur angulaire du domaine associé au domaine de détermination infinie est au moins égal à $\frac{\pi}{\varrho}$* .

Supposons que la fonction $f(z)$ possède plus d'un domaine de détermination infinie, et soit δ l'un de ces domaines. Les domaines de détermination infinie contigus de δ sont séparés de δ par des bandes où la fonction entière reste bornée. Il en résulte que la grandeur angulaire $\theta(t)$ du domaine associé de δ n'est jamais égale à 2π . Soit ϱ' l'ordre de la fonction entière dans le domaine δ ($\varrho' \leq \varrho$); l'application de l'inégalité (5) montre que le maximum θ de la grandeur angulaire du domaine associé de δ est au moins égal à $\frac{\pi}{\varrho'}$ [d'où la constatation, fait en passant, que ϱ' est au moins égal à $\frac{1}{2}$ ¹]. La remarque faite pour le cas d'un seul domaine de détermination infinie s'étend donc, d'où le:

Corollaire II. — *Le maximum θ de la grandeur angulaire de chacun des domaines associés aux domaines de détermination infinie d'une fonction entière $f(z)$ d'ordre fini ϱ supérieur à $\frac{1}{2}$ est au moins égal à $\frac{\pi}{\varrho}$.*

Ce corollaire s'applique encore au cas de $\varrho = \frac{1}{2}$.

La limite $\frac{\pi}{\varrho}$ est atteinte pour les fonctions de Mittag-Leffler, fonctions qui restent bornées à l'extérieur d'un angle d'ouverture $\frac{\pi}{\varrho}$.

11. — Introduisons quelques précisions et posons la définition suivante: *Un domaine A sera dit d'ordre au moins $\varrho(1 - \eta)$ si la fonction entière $f(z)$ satis-*

¹ Autrement dit, aucune fonction entière d'ordre fini ϱ supérieur à $\frac{1}{2}$ n'admet de domaine de détermination infinie où elle est d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$.

En effet, d'après l'inégalité (4) qui ne peut être vérifiée, le domaine associé d'un tel domaine contient nécessairement une suite de circonférences de centre o s'éloignant indéfiniment; il n'y aurait donc dans ce cas qu'un seul domaine de détermination infinie, d'où la contradiction, puisque l'ordre de la fonction y serait nécessairement ϱ .

fait en tout point de ce domaine à l'inégalité

$$\log |f(z)| \geq |z|^{q(1-\eta)}.$$

Cette inégalité se trouve précisément vérifiée en tous les points du domaine \mathcal{A} du théorème III si r_2 n'est pas trop grand; d'une façon précise, si

$$r^{1-\varepsilon} \geq r_2^{1-\eta}$$

(bien entendu, η est supérieur à ε). Nous choisirons r_2 de façon que l'égalité soit vérifiée.¹

L'inégalité (5') donne alors

$$\frac{1}{\theta} < \frac{q}{\pi} + \frac{O(1) + \frac{q\varepsilon(2-\varepsilon-\eta)\log r}{\pi(1-\eta)}}{(\eta-\varepsilon)\log r} \cdot \frac{1}{1-\eta}.$$

η étant donné, nous pouvons choisir ε , puisqu'à chaque valeur de ε correspondent une infinité de points M . Prenons $\varepsilon = \eta^2$ (d'où $r_2 = r^{1+\eta}$). Le deuxième terme du deuxième membre de l'inégalité précédente est alors de l'ordre de grandeur de

$$\frac{O(1)}{\eta \log r} + \frac{2q\eta}{\pi}$$

quantité petite si r est assez grand. D'où le

Corollaire III. — *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini q supérieur à $\frac{1}{2}$. La fonction $f(z)$ est au moins d'ordre $q(1-\eta)$ dans une suite de domaines \mathcal{A}_i s'éloignant indéfiniment, chacun de ces domaines étant compris entre deux circonférences*

$$r_i^{1-3\eta} < |z| < r_i^{1+\eta}.$$

Le maximum de la grandeur angulaire du domaine associé au domaine \mathcal{A}_i est au moins égal à une quantité très voisine de $\frac{\pi}{q}$.

On peut choisir une valeur de η dépendant de l'indice i , de façon que η_i tende vers 0, mais que $\eta_i \log r_i$ tende vers l'infini lorsque i augmente indéfini-

¹ r_1 est alors supérieur à $r^{1-2\varepsilon}$, car $\log m_1 = \frac{1}{2} r^{q(1-\varepsilon)}$ et $\log M(r_1, f)$ est inférieur à $r_1^{q(1+\varepsilon)}$.

ment. Alors θ_i maximum de la grandeur angulaire du domaine associé de \mathcal{A}_i est au moins égal à une quantité qui tend vers $\frac{\pi}{\rho}$ lorsque i augmente indéfiniment.

Ici encore, la limite $\frac{\pi}{\rho}$ est atteinte pour les fonctions de Mittag-Leffler.

12. — *Comparaison avec des résultats déjà connus.* — Diverses applications du principe de Phragmén-Lindelöf aux fonctions entières d'ordre fini ρ supérieur à $\frac{1}{2}$ se retrouvent comme conséquences particulières du théorème III ou de ses corollaires. C'est ainsi qu'une fonction holomorphe et d'ordre au plus égal à ρ dans un angle d'ouverture inférieure à $\frac{\pi}{\rho}$ ne peut manifestement pas être bornée sur les deux côtés de l'angle sans être bornée à l'intérieur. (Ici, la propriété est aussi immédiate pour des angles dont les côtés sont curvilignes ou même pour des domaines plus généraux.)

Les résultats plus précis que j'ai donnés au chapitre III de mon mémoire: *Les cercles de remplissage des fonctions méromorphes ou entières et le théorème de Picard-Borel* (Acta math., t. 52) chapitre ayant trait à l'étude angulaire des domaines où une fonction entière est très grande, sont également dépassés par les propriétés qui viennent d'être établies.

A un autre point de vue, on comparera le corollaire III à une propriété obtenue par M. Valiron¹, et qui s'énonce ainsi:

Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini ρ supérieur à $\frac{1}{2}$ et à croissance régulière. Il existe une suite de circonférences dont les rayons r_i tendent vers l'infini, et sur chacune desquelles les points où la fonction $f(z)$ est d'ordre au moins $\rho - \varepsilon$ forment des arcs dont la longueur totale est au moins $\frac{2\pi r_i}{q}$; q est le plus grand entier contenu dans 2ρ .

Enfin, on pourra comparer aussi à quelques-uns des résultats d'un mémoire récent de M. Shimizu.²

¹ G. Valiron. — *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (C. R. de l'Ac. des Sc., t. 185, p. 1439).

² T. Shimizu. — *On the paths of determination and indetermination of Integral Functions* (Proc. of the Phys. Math. Soc. of Japan, 3^e Ser., Vol. 12 n^o 9, Oct. 1930). Voir par ex. p. 181—184.

13. — *Extension des corollaires précédents.* — Nous avons introduit, dans ces corollaires, le maximum θ de la grandeur angulaire des domaines D . On peut remplacer θ par une autre quantité donnant plus de précision à ces corollaires.

Posons: $\tau = \log t$; la fonction $\theta(t)$ devient une fonction $\theta_1(\tau)$, et l'on a:

$$I = \int_r^{r_2} \frac{dt}{t\theta(t)} = \int_{\log r}^{\log r_2} \frac{d\tau}{\theta_1(\tau)}$$

D'après l'inégalité de Schwarz, on a:

$$\int_a^b \frac{d\tau}{\theta_1(\tau)} \int_a^b \theta_1(\tau) d\tau \geq (b-a)^2$$

(l'égalité ne peut être vérifiée que si $\theta_1(\tau)$ est constant.)

Or, l'expression $\frac{\int_a^b \theta_1(\tau) d\tau}{b-a}$ est la valeur moyenne θ_1 de la fonction $\theta_1(\tau)$ dans l'intervalle ab . On a donc:

$$I \geq \frac{\log \frac{r_2}{r}}{\theta_1},$$

d'où la proposition suivante:

Les corollaires du théorème III sont encore exacts lorsque l'on substitue au maximum θ de la grandeur angulaire du domaine associé D la valeur moyenne θ_1 de la fonction $\theta_1(\tau)$ [$\tau = \log t$; $\theta_1(\tau) \equiv \theta(t)$] lorsque t est compris entre les limites envisagées.

14. — Les fonctions entières que nous avons citées, pour lesquelles le maximum (ou la valeur moyenne au sens du n° 13) de la grandeur angulaire des domaines associés aux domaines de détermination infinie, est égal exactement à la limite $\frac{\pi}{\rho}$, sont des fonctions à croissance régulière au sens de M. Borel.

15. — Cette remarque suggère la question suivante: *Certaines fonctions à croissance régulière sont-elles les seules à atteindre la limite minimum $\frac{\pi}{\rho}$?*

Comme nous allons le voir, *la réponse est affirmative.*

Nous supposons d'abord l'existence d'un seul domaine de détermination infinie.

D'une façon générale, supposons que la valeur moyenne θ_1 relative à la grandeur angulaire $\theta(t)$ du domaine associé au domaine de détermination infinie, ne soit pas supérieure à $\frac{\pi}{\varrho'}$ à partir d'une certaine valeur de t (ϱ' ne peut être supérieur à ϱ ; mais il peut lui être inférieur). On suppose que ϱ' est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$, et que $\theta(t)$ n'est jamais égal à 2π . Le premier membre de l'inégalité (3) est alors supérieur à $\frac{\varrho'}{\pi} \log \frac{r_2}{r}$ et l'on a, en reprenant les notations du théorème II,

$$\frac{\log \frac{m_2}{m_1}}{\log \frac{m}{m_1}} > O(1) \left(\frac{r_2}{r} \right)^{\varrho'}$$

On peut prendre pour valeur de m_2 le maximum $M(r_2, f)$ de $|f(z)|$ sur le cercle $|z| = r_2$. On pourra prendre m assez grand pour que $\log \frac{m}{m_1}$ soit supérieur à 1. On déduit alors de l'inégalité qui précède la suivante:

$$\log M(r_2, f) > O(1) \left(\frac{r_2}{r} \right)^{\varrho'}$$

Laisant r fixe, et faisant tendre r_2 vers l'infini, on constate que $\log M(r_2, f)$ ne peut descendre en dessous de $r^{\varrho' - \varepsilon}$.

Autrement dit, en désignant par $r^{\varrho(r)}$ la quantité $\log M(r, f)$, on a:

$$\underline{\lim} \varrho(r) \geq \varrho'$$

Il résulte de cette inégalité que, seules, les fonctions à croissance régulière peuvent atteindre la limite $\frac{\pi}{\varrho}$ que leur impose le corollaire III.

Nous avons supposé l'existence d'un seul domaine de détermination infinie. S'il en existe plusieurs, la démonstration est analogue pour chacun d'eux.

16. — *Limitation du nombre des domaines de détermination infinie.* — Soit

$f(z)$ une fonction entière d'ordre fini ρ supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Supposons l'existence d'au moins n domaines de détermination infinie. Soit δ_i l'un de ces domaines. Il est séparé des domaines de détermination contigus par des bandes où la fonction reste bornée, de sorte que $\theta_i(t)$, grandeur angulaire du domaine associé de δ_i est constamment inférieur à 2π . L'inégalité (4) est donc applicable à chaque section du domaine δ_i . On supposera r assez grand pour que dans chaque domaine δ_i il existe un point de module r en lequel $|f(z)|$ est assez grand. On peut toujours choisir m_1 de façon que $\log m - \log m_1$ soit supérieur à 1; enfin, $\log m_2$ est inférieur à $r_2^{\rho+\varepsilon}$. L'inégalité (4) entraîne la suivante:

$$\int_r^{r_2} \frac{dt}{t\theta_i(t)} < O(1) + \frac{\rho + \varepsilon}{\pi} \log r_2.$$

Sommons l'inégalité précédente pour les n domaines δ_i : les domaines associés aux sections étudiées des domaines δ_i n'ont évidemment aucun point commun entre eux, de sorte que $\sum \theta_i(t)$ est inférieur à 2π ; donc $\sum \frac{1}{\theta_i(t)}$ est supérieur à $\frac{n^2}{2\pi}$; par suite, on a:

$$\frac{n^2}{2\pi} \int_r^{r_2} \frac{dt}{t} < nO(1) + \frac{n(\rho + \varepsilon)}{\pi} \log r_2,$$

ou:

$$(6) \quad n < \frac{O(1)}{\log \frac{r_2}{r}} + \frac{2(\rho + \varepsilon)}{1 - \frac{\log r}{\log r_2}},$$

ε peut être pris aussi petit que l'on veut, de même que $\frac{r}{r_2}$. n ne peut donc surpasser 2ρ , d'où le

Théorème IV (Bieberbach). — *Le nombre des domaines de détermination infinie des fonctions entières d'ordre fini ρ supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$ est au plus égal à 2ρ .*

17. — Ce théorème, déjà déduit par M. Bieberbach de la thèse de M. Ahlfors¹, est une extension du théorème de Denjoy-Ahlfors limitant à 2ρ le nombre maximum des valeurs asymptotiques de la fonction entière d'ordre fini ρ . En effet, pour retrouver ce théorème, il suffit de remarquer, avec M. Lindelöf, qu'entre 2 chemins asymptotiques contigus (correspondant à des valeurs asymptotiques différentes) il existe nécessairement un domaine de détermination infinie.²

Il convient d'ailleurs de noter que la première inégalité fondamentale de la thèse de M. Ahlfors joue également ici un rôle important, et qu'un raisonnement analogue à celui du n° 16 se trouve également dans cette thèse.

18. — Pour les fonctions entières d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$, il résulte du théorème de M. Wiman qu'il n'existe qu'un seul domaine de détermination infinie.

19. — Les exemples cités par M. Denjoy, de fonctions entières d'ordre fini ρ admettant 2ρ valeurs asymptotiques (2ρ est entier) peuvent aussi bien servir ici pour montrer que la borne supérieure 2ρ du nombre des domaines de détermination infinie est atteinte. Il en est plus simplement de même, lorsque ρ est entier, de la fonction

$$f(z) = \cos z^\rho.$$

Sur les rayons:

$$\text{Arg } z = \frac{k\pi}{\rho} \quad (k = 1, 2, \dots, 2\rho)$$

la fonction est bornée, et entre chacun de ces rayons existe un domaine de détermination infinie. D'autre part, $\cos z^\rho$ ne possède pas de valeur asymptotique finie.

Il en est de même lorsque ρ est égal à la moitié d'un entier ($f(z)$ est toujours entière).

¹ Bieberbach: *Lehrbuch der Funktionentheorie*, II, 2^e éd., p. 287—288.

² Cette manière de scinder en deux la démonstration du théorème de Denjoy-Ahlfors a déjà été utilisée par M. G. Valiron, qui avait remarqué, dès 1923, dans son livre: *Lectures on the general theory of Integral functions*, que la démonstration de M. Carleman, limitant à $\frac{\pi^2}{2}\rho$ le nombre des valeurs asymptotiques d'une fonction entière, n'utilisait pas directement le fait que la fonction tendait vers une valeur finie le long d'un chemin s'éloignant indéfiniment. M. Valiron limitait ainsi à $\frac{\pi^2}{2}\rho$ le nombre des domaines de détermination infinie (Voir le livre cité, p. 138—145).

M. Bieberbach redémontrait la même propriété dans un article de la *Mathematische Zeitschrift* (Asymptotische Werte ganzer Funktionen, 22. Band, 1925, p. 33—40). Je dois à l'obligeance de M. Valiron ces divers renseignements bibliographiques.

20. — *Extension du théorème IV.* — L'existence de n domaines distincts de détermination infinie entraîne l'existence, entre ces domaines, de n bandes où la fonction reste bornée. C'est à cette condition que le théorème IV s'applique, pour affirmer que n est au plus égal à 2ρ .

On peut un peu généraliser cette condition: soit \mathcal{A} un domaine s'étendant à l'infini, tel que le domaine associé D ne contienne aucune circonférence de centre o , et soit C la courbe limitant D . Désignons par $m(t)$ le maximum de $|f(z)|$ sur la portion du cercle $|z|=t$ intérieure à D , par $\theta(t)$ la grandeur angulaire de cette portion, par $m_1(t)$ une borne supérieure de $|f(z)|$ sur la partie de C située à une distance de l'origine inférieure à t . Si $m_1(r_2)$ est inférieur à $m(r) - 1$, l'inégalité (3) s'applique, et l'existence de n domaines du genre de \mathcal{A} conduit, en employant la même méthode que plus haut, à la même limitation (6) pour n .

Au lieu de faire tendre r_2 vers l'infini, faisons:

$$r_2 = r^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Il vient l'extension suivante:

Soit n domaines \mathcal{A} , s'étendant à l'infini, n'ayant aucun point commun entre eux; soit C la frontière du domaine D associé de \mathcal{A} . On désigne par $m_1(t)$ une quantité supérieure ou égale aux valeurs de $|f(z)|$ sur la partie de C intérieure au cercle $|z|=t$, par $m(r)$ le maximum de $|f(z)|$ sur la portion du cercle $|z|=r$ intérieure au domaine D . On suppose que pour chaque valeur de r , on a:

$$m_1\left(r^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) \leq m(r) - 1$$

et ceci pour chaque domaine \mathcal{A} .

Alors n est inférieur à $2\rho[1 + \varepsilon O(1)]$.

On déduit en particulier de cette extension le:

Théorème V. — *Le nombre des domaines, s'étendant à l'infini, où une fonction entière d'ordre fini ρ supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$ ne croît pas plus rapidement qu'un polynôme, est au plus égal à 2ρ .*

21. — *Remarque sur les fonctions entières d'ordre ρ admettant 2ρ bandes où elles restent bornées* (ces bandes étant séparées par des domaines de détermination infinie). — Conservons les notations précédentes. A chaque section du domaine \mathcal{A}_i on peut appliquer l'inégalité (3) qui donne a fortiori

$$\int_r^{r_2} \frac{dt}{t\theta(t)} < O(1) + \frac{1}{\pi} \log_2 m_i(r_2)$$

$\log \log m_i(r_2)$ est inférieur à $(\rho_i + \varepsilon) \log r_2$; ρ_i désigne l'ordre de la fonction $f(z)$ dans le domaine \mathcal{A}_i ($\rho_i \leq \rho$).

En sommant, on obtient l'inégalité

$$\frac{4\rho^2}{2\pi} \log \frac{r_2}{r} < \rho O(1) + \frac{1}{\pi} \sum (\rho_i + \varepsilon) \log r_2.$$

Il résulte de cette inégalité que dans aucun domaine \mathcal{A} la fonction $f(z)$ ne peut être d'ordre inférieur à ρ .

En outre, la fonction $f(z)$ est, dans chacun de ces domaines \mathcal{A}_i , à croissance régulière au sens de M. Borel: c'est ce qui résulte de la démonstration.

22. — Autre extension du théorème IV. — Supposons que la fonction $f(z)$ possède n domaines distincts \mathcal{A}_i s'étendant à l'infini, tels que sur la portion du cercle $|z|=r$ intérieure à \mathcal{A}_i , il existe au moins un point en lequel $\log |f(z)|$ est supérieur à $r^{\varepsilon(r)}$, $\varepsilon(r)$ étant une quantité tendant vers 0 lorsque r tend vers l'infini.¹ Alors n est au plus égal à 2ρ .

La démonstration est analogue à celle qui a été faite au n° 20: il existe en effet n bandes distinctes, s'étendant à l'infini, dans chacune desquelles $\log |f(z)|$ croît moins rapidement que $|z|^{\rho_1}$, ρ_1 étant inférieur à ρ ; on choisira: $r_2 = r^{1+\eta}$, η étant suffisamment petit, et on achèvera comme plus haut.

IV.

Cas des fonctions entières d'ordre infini.

23. — Existence de domaines assez larges, où la fonction entière est très grande. — Soit $f(z)$ une fonction entière dont le maximum du module sur le cercle $|z|=r$, désigné par $M(r, f)$, est obtenu en un point M . Appliquons l'inégalité (3) en prenant: $m_1 = \sqrt{m}$, $m = M(r, f)$, et $m_2 = M(r_2, f)$; soit \mathcal{A} le domaine correspondant à ce choix, et D le domaine associé, de grandeur angulaire $\theta(t)$. On a l'inégalité:

¹ Autrement dit: la fonction $f(z)$ est d'ordre ρ et à croissance régulière dans chaque domaine \mathcal{A}_i .

$$\int_r^{r_2} \frac{dt}{t\theta(t)} < O(1) + \frac{1}{\pi} [\log \log M(r_2, f) - \log \log M(r, f)] \\ < \frac{1}{\pi} \log \log M(r_2, f),$$

si $M(r, f)$ est assez grand. $\theta(t)$ est supposé inférieur à 2π dans le domaine D .

Si $t\theta(t)$ est inférieur à A pour des valeurs de t comprises dans des intervalles dont la somme des longueurs est égale à α , on a :

$$\alpha < \frac{A}{\pi} \log \log M(r_2, f)$$

d'où le

Théorème VI. — Soit $f(z)$ une fonction entière (d'ordre fini ou infini), dont le maximum du module sur le cercle $|z| = t$ est désigné par $M(t, f)$. Soit r une valeur quelconque de t , et \mathcal{A} le domaine où $\log |f(z)|$ est supérieur à $\frac{1}{2} \log M(r, f)$ (domaine contenant le point de module r en lequel $|f(z)|$ est maximum); limitons ce domaine à l'intérieur de la circonférence $|z| = \lambda r$, et soit D le domaine associé. On suppose que ce domaine D ne contient aucune circonférence de centre o . La somme des longueurs des arcs découpés dans le domaine D par la circonférence $|z| = t$, pour les valeurs de t comprises entre r et λr , ne peut être inférieure à $\frac{kr}{\log_2 M(\lambda r, f)}$ que pour des valeurs de t comprises dans des intervalles dont la somme des longueurs ne surpasse pas $\frac{kr}{\pi}$.

Bien entendu, pour que cet énoncé ait un sens, il faut que $\frac{k}{\pi}$ soit inférieur à $\lambda - 1$.

24. — Le théorème VI fixe une borne inférieure du maximum de la grandeur angulaire d'un domaine D convenablement choisi, en fonction de $M(\lambda r, f)$. Il peut être important, dans certaines questions, de fixer une borne inférieure en fonction de $M(r, f)$. La théorie des fonctions croissantes permet de le faire :

Considérons toujours les mêmes domaines D et \mathcal{A} qu'au n° 23, et désignons toujours par A le maximum de $t\theta(t)$ dans l'intervalle rr_2 . Je dis qu'en

choisissant convenablement les intervalles de valeurs de r , on ne peut avoir constamment dans ces intervalles:

$$\frac{1}{A} > [\log_2 M(r, f)]^{1+\varepsilon}.$$

Supposons en effet que cette inégalité est toujours vérifiée. Elle entraîne

$$\log_2 M(r_2, f) > \log_2 M(r, f) + \pi [(r_2 - r) [\log_2 M(r, f)]^{1+\varepsilon} - O(1)].$$

Partons de la valeur $r = r_0$ et posons $r_2 = \lambda_0 r_0$. Choisissons λ_0 de façon que $\log_2 M(\lambda_0 r_0, f)$ soit supérieur à $\log_2 M(r_0, f) + 1$. D'après l'inégalité précédente, il suffit que l'on ait:

$$\lambda_0 - 1 \geq \frac{O(1)}{r_0 [\log_2 M(r_0, f)]^{1+\varepsilon}}.$$

Nous choisirons pour valeur de $\log \lambda_0$ le deuxième membre de l'inégalité précédente.

Recommençons à partir de $\lambda_0 r_0 = r_1$ de même qu'à partir de r_0 , et ainsi de suite. Nous définissons une suite de quantités $r_0, r_1, \dots, r_n, \dots$ telles que

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= \lambda_i r_i \\ \log \lambda_{i+1} &= \frac{O(1)}{r_i [\log_2 M(r_i, f)]^{1+\varepsilon}} < \frac{O(1)}{r_0 [\log_2 M(r_i, f)]^{1+\varepsilon}} \\ \log_2 M(r_i, f) &> \log_2 M(r_0, f) + i. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\log_2 M(r_n, f)$ augmente indéfiniment avec n , tandis que

$$\sum_0^\infty \log \lambda_n < \frac{O(1)}{r_0} \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{[x + \log_2 M(r_0, f)]^{1+\varepsilon}} = \frac{O(1)}{\varepsilon r_0 [\log_2 M(r_0, f) - 1]^\varepsilon},$$

r_n est donc borné, quel que soit n , et on aboutit à la contradiction. D'où le

Théorème VII. — Soit $f(z)$ une fonction entière, M le point de module r où $|f(z)| = M(r, f)$, A le domaine entourant M , en lequel $\log |f(z)|$ est supérieur à $\frac{1}{2} \log M(r, f)$, domaine limité à l'intérieur de la circonférence de centre o et de rayon r' tel que

$$\log \frac{r'}{r} = \frac{O(1)}{r [\log_2 M(r, f)]^{1+\varepsilon}}.$$

On suppose que le domaine D associé de \mathcal{A} ne contient aucune circonférence de centre o , et on désigne par A le maximum des longueurs des arcs découpés par D sur toute circonférence de centre o et de rayon compris entre r et r' . Alors, on peut affirmer que dans tout intervalle $r_0 r'_0$ tel que

$$\log \frac{r'_0}{r_0} = \frac{O(1)}{\varepsilon r_0 [\log_2 M(r_0, f) - 1]^\varepsilon}$$

il existe une valeur de r telle que le maximum A est au moins égal à

$$[\log_2 M(r, f)]^{-1-\varepsilon}.$$

ε est une constante positive quelconque, qu'on pourrait d'ailleurs faire dépendre de $M(r, f)$.

Le théorème VII est à rapprocher de théorèmes analogues que j'ai obtenus différemment, et qui m'ont servi de base dans l'étude de la distribution des valeurs des fonctions entières d'ordre infini.¹ [Le théorème VII pourrait aussi servir de base dans la même étude.]

25. — *Etude des domaines de détermination infinie des fonctions entières d'ordre infini.* — Eliminons de suite le cas où le domaine associé contient une suite de circonférences de centre o (dans ce cas, on peut remarquer, comme nous l'avons déjà fait dans une circonstance analogue, en note au n° 10, qu'il n'existe qu'un domaine de détermination infinie).

Le théorème VI s'applique alors à des sections quelconques de chacun des domaines de détermination infinie \mathcal{A}_i , en ayant soin de remplacer $M(r, f)$ par $M_i(r, f)$, maximum de $|f(z)|$ sur les arcs de la circonférence $|z| = r$ intérieurs au domaine \mathcal{A}_i . Remarquons que $M_i(r, f)$ est au plus égal à $M(r, f)$.

26. — *Etude d'un cas particulier.* — Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre infini, satisfaisant à la condition

$$\overline{\lim} \frac{\log_2 M(r, f)}{r} = \varrho,$$

ϱ étant une quantité finie et différente de 0.

¹ H. Milloux. — *Quelques propriétés des fonctions entières d'ordre infini; distribution de leurs valeurs* (Ann. de l'Ec. Norm. Sup., t. XLIX, 1932). Voir p. 315 et 318, th. I et III,

Supposons que la fonction ne possède qu'un domaine de détermination infinie¹; on désigne par $\theta(t)$ la grandeur angulaire du domaine associé. Alors on a l'inégalité

$$\lim t\theta(t) \geq \frac{\pi}{\varrho}$$

l'égalité pouvant être atteinte.

En effet, supposons que $t\theta(t)$ soit constamment inférieur à $\frac{\pi}{\varrho}$, et soit $\frac{\pi}{\varrho_1}$ sa limite maxima: ϱ_1 est supérieur à ϱ . Sectionnons le domaine étudié par les circonférences de centre 0 et de rayons r et r_2 , et ne prenons dans le domaine que la portion \mathcal{A} où $\log |f(z)|$ est supérieur à $\frac{1}{2} \log M(r, f)$: il vient alors l'inégalité

$$(r_2 - r) \frac{\varrho_1}{\pi} < O(1) + \frac{1}{\pi} [\log_2 M(r_2, f) - \log_2 M(r, f)].$$

Choisissons la valeur de r de façon que $\log_2 M(r, f)$ soit supérieur à $r(\varrho - \varepsilon)$, ε étant assez petit; prenons r_2 assez grand pour que $\log_2 M(r_2, f)$ soit inférieur à $r_2(\varrho + \varepsilon)$. L'inégalité précédente entraîne

$$(r_2 - r)\varrho_1 < O(1) + (r_2 - r)\varrho + \varepsilon(r_2 + r).$$

Lorsque le rapport $\frac{r_2}{r}$ est assez grand, et ε assez petit, ϱ_1 est inférieur à une quantité aussi voisine que l'on veut de ϱ , d'où la contradiction.

Cette propriété a déjà été démontrée par une méthode très différente.² J'ai signalé, dans le mémoire cité ici en note, que la limite $\frac{\pi}{\varrho}$ de $\overline{\lim} t\theta(t)$ est atteinte pour la fonction de Mittag-Leffler

$$f(z) = \int_{(C)} \frac{e^{e\zeta}}{\zeta - z} d\zeta,$$

(C) étant le contour constitué par le segment

¹ C'est une restriction qui n'a rien d'essentiel.

² H. Milloux: *Quelques propriétés des fonctions entières d'ordre infini; distribution de leurs valeurs* (loc. cit.). Voir p. 330, th. VI.

$$\Re(\xi) = u_0; \quad -\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) < \Im(\xi) < \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)^1$$

et par les demi-droites

$$\Re(\xi) > u_0; \quad \Im(\xi) = +\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right).$$

27. — *Limitation du nombre des domaines de détermination infinie pour les fonctions entières d'ordre infini.* — Une fonction entière d'ordre infini peut avoir une infinité de domaines de détermination infinie; il suffit, pour le montrer, de prendre une série dont les termes sont composés de fonctions de Mittag-Leffler $f_n(z)$, les contours d'intégration (C_n) de chacune de ces fonctions se déduisant du contour C précisé à la fin du n° 26 par des translations de $n\pi$ parallèles à l'axe imaginaire; en outre, chaque fonction $f_n(z)$ se déduit de $f(z + in\pi)$ par multiplication de cette fonction par un facteur constant ε_n , choisi de façon que la somme $\Sigma f_n(z)$ soit une fonction entière qui reste bornée sur toutes les droites $\Im(z) = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$.

Reprenons le cas général; désignons par A_i un domaine de détermination infinie, et par $n(r)$ le nombre des domaines A_i intérieurs à la circonférence $|z| = r$. Nous nous proposons de limiter $n(r)$ en fonction du module maximum de $f(z)$ sur les circonférences de centre 0.

Pour chacun des domaines A_i coupant le cercle $|z| = r$, on a:

$$\int_r^{r_2} \frac{dt}{t\theta_i(t)} < O(1) + \frac{1}{\pi} \log_2 M(r_2, f)$$

d'où en sommant pour les $n(r)$ domaines A_i :

$$\frac{n^2}{2\pi} \log \frac{r_2}{r} < n O(1) + \frac{n}{\pi} \log_2 M(r_2, f).$$

Il en résulte le

¹ ε est une quantité positive quelconque inférieure à π . La fonction de Mittag-Leffler est bornée à l'extérieur du rectangle: $\Re(z) > u_0$; $\Im(z) = \pm \frac{\pi}{2}$ et non seulement à l'extérieur de (C) , comme il a été dit incorrectement dans le Mémoire cité.

Théorème VIII. — Désignant par $n(r)$ le nombre des domaines de détermination infinie d'une fonction entière d'ordre infini, qui coupent le cercle $|z| = r$, on a :

$$(7) \quad n(r) < \frac{2 \log_2 M(R, f)}{\log R} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{r}{R} \right) \right],$$

$\varepsilon \left(\frac{r}{R} \right)$ est une quantité qui tend vers 0 avec $\frac{r}{R}$.

Remarque. — La limitation précédente est aussi celle du nombre des valeurs asymptotiques d'une fonction entière d'ordre infini, à condition d'admettre que ces valeurs sont différentes, et que la différence de 2 valeurs quelconques soit bornée inférieurement par un nombre fixe positif. On peut d'ailleurs lever cette restriction, ou du moins imposer une condition beaucoup moins restrictive, en introduisant une propriété précisant le théorème de M. Lindelöf qu'utilise M. Ahlfors dans sa thèse. Pour ne pas alourdir ce mémoire, nous développerons ce point de vue dans un autre article.

V.

Cas des fonctions entières d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$.

28. — Nous avons déjà remarqué, à différentes reprises, que si dans un domaine \mathcal{A} compris entre deux circonférences de centre 0 et de rayons r et r_2 (le rapport $\frac{r}{r_2}$ étant assez petit) une fonction entière $f(z)$ est d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$, il résulte de l'inégalité (3) que le domaine associé \mathcal{D} contient nécessairement une circonférence de centre 0.

On pourrait, de ce résultat, déduire le théorème de M. Wiman sur les fonctions entières d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$. Mais ce théorème résulte bien plus simplement encore, comme nous allons le voir, des seules considérations établies au n° 1, donc sans le secours de l'inégalité de M. Ahlfors.

¹ On peut dire aussi que $n(r)$ est le nombre des domaines où la fonction reste bornée. Sous cette forme, le théorème VIII est susceptible d'extensions analogues au théorème V et autres extensions du théorème IV relatif au cas de l'ordre fini. C'est ainsi que l'on peut affirmer que le nombre des domaines s'étendant à l'infini où la fonction reste d'ordre fini est limité, à l'intérieur de la circonférence $|z| = r$, par le deuxième membre de l'inégalité (7).

Soit d'abord, dans le plan z , la figure formée par le cercle $|z| = r_2$ et par le rayon aboutissant au point d'affixe $-r_2$. Nous nous proposons de rechercher la fonction harmonique prenant les valeurs $\log m_2$ sur la circonférence, et $\log m_1$ ($m_1 < m_2$) sur le rayon. La transformation $Z = \sqrt{z}$ permet de ramener à la demi-circonférence étudiée au n° 1, et la fonction harmonique cherchée est une combinaison linéaire de la fonction

$$\text{Arg} \frac{\sqrt{r} e^{i\varphi} - i\sqrt{r_2}}{\sqrt{r} e^{i\varphi} + i\sqrt{r_2}},$$

r est inférieur à r_2 , et φ compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

La fonction précédente s'écrit encore

$$\text{Arc tg} \frac{2\sqrt{rr_2} \cos \frac{\varphi}{2}}{r_2 - r},$$

et elle prend la valeur $\frac{\pi}{2}$ sur la circonférence $|z| = r_2$, et 0 sur le rayon. La fonction harmonique cherchée est donc la fonction

$$\log m_1 + \frac{2}{\pi} (\log m_2 - \log m_1) \text{Arc tg} \frac{2\sqrt{rr_2} \cos \frac{\varphi}{2}}{r_2 - r}.$$

29. — Considérons une fonction $f(z)$ holomorphe dans la couronne circulaire $r_1 < |z| < r_2$, et désignons par m_2 et m_1 deux quantités supérieures ou égales aux valeurs de $|f(z)|$ d'une part sur la circonférence $|z| = r_2$, d'autre part sur la circonférence $|z| = r_1$, et sur la portion de l'axe réel et négatif intérieure à la couronne.

$\log |f(z)|$ est alors inférieure à la fonction harmonique précédente, d'où l'inégalité

$$(8) \quad \log |f(re^{i\varphi})| < \log m_1 + \frac{2}{\pi} \log \frac{m_2}{m_1} \text{Arc tg} \frac{2\sqrt{rr_2} \cos \frac{\varphi}{2}}{r_2 - r},$$

r est compris entre r_1 et r_2 , et φ entre $-\pi$ et π .

On pourrait obtenir une inégalité plus précise, mais beaucoup plus compliquée, en recherchant la fonction harmonique qui prend les valeurs $\log m_2$ sur la circonférence $|z| = r_2$, et $\log m_1$ sur la circonférence $|z| = r_1$ et sur la portion

de l'axe réel et négatif intérieure à la couronne. Ce problème revient à celui de la représentation conforme d'un rectangle sur un cercle, et fait intervenir des fonctions elliptiques. Pour les applications que nous avons en vue, le gain dans la précision est peu important et ne compense pas la complication des calculs.

30. — Nous ne considérerons dans ce qui suit que des fonctions entières $f(z)$ dont les zéros sont situés sur l'axe réel et négatif; leur module minimum sur une circonférence de centre 0 est atteint au point d'affixe négative, et leur module maximum au point d'affixe positive.

Il résulte alors de l'inégalité (8) qu'une telle fonction ne peut pas être bornée sur cet axe réel et négatif si elle satisfait à la condition

$$\lim \frac{\log M(R, f)}{\sqrt{R}} = 0.$$

En effet, laissant r_1 , et par suite m_1 fixes, et donnant à r une valeur quelconque, on s'aperçoit qu'en prenant r_2 suffisamment grand, le deuxième terme du deuxième membre de l'inégalité (8) est aussi petit que l'on veut, grâce à la condition imposée à la fonction $f(z)$. On aboutit à la contradiction.

La propriété qui précède est précisément le théorème de M. Wiman.

31. — Donnons quelques précisions dans le cas de l'ordre fini ϱ inférieur à $\frac{1}{2}$. Soit alors ε un nombre positif tel que $\varrho(1 + \varepsilon)$ soit inférieur à $\frac{1}{2}$. Nous ne considérerons que les valeurs de z assez grandes pour que $\log |f(z)|$ soit inférieur à $|z|^{\varrho(1+\varepsilon)}$.

Pour une suite de valeurs de r tendant vers l'infini, $\log M(r, f)$ est supérieur à $r^{\varrho(1+\varepsilon)}$. Choisissons l'une de ces valeurs de r , et enserrons-la entre 2 quantités r_1 et r_2 , de façon à reconstituer la couronne circulaire étudiée au n° 29. Il résulte de l'inégalité (8) que l'on a :

$$r^{\varrho(1-\varepsilon)} < \log m_1 + \frac{2}{\pi} r_2^{\varrho(1+\varepsilon)} \text{Arc tg } \frac{2\sqrt{rr_2}}{r_2 - r}.$$

Nous supposerons que $\frac{r_2}{r}$ est supérieur à 2, de sorte que l'on a, a fortiori, l'inégalité

$$\log m_1 > r^{\varrho(1-\varepsilon)} - \frac{8}{\pi} r_2^{\varrho(1+\varepsilon)} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_2}}.$$

Choisissons r_2 de façon que le deuxième terme du deuxième membre soit inférieur en valeur absolue à la moitié du premier. Cette condition est réalisée lorsque l'on prend :

$$r_2 = O(1)^{\frac{2}{1-2\varrho(1+\varepsilon)}} r^{1-\frac{4\varrho\varepsilon}{1-2\varrho(1+\varepsilon)}}.$$

Enfin, choisissons r_1 de façon que $\log M(r_1, f)$ soit inférieur ou égal à $\frac{1}{2} r^{\varrho(1-\varepsilon)}$, condition qui est réalisée si l'on prend

$$r_1 = \frac{1}{4} r^{1-2\varepsilon}.$$

Ces différents choix permettent d'énoncer le

Théorème IX. — Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini ϱ inférieur à $\frac{1}{2}$, et dont les zéros sont alignés sur la partie positive de l'axe réel. Soit ε un nombre positif tel que $\varrho(1+\varepsilon)$ soit inférieur à $\frac{1}{2}$, et r un nombre tel que $\log M(r, f)$ soit supérieur à $r^{\varrho(1-\varepsilon)}$. Dans la couronne circulaire

$$O(1) r^{1-2\varepsilon} < |z| < A(\varrho) r^{1-\frac{4\varrho\varepsilon}{1-2\varrho(1+\varepsilon)}},$$

il existe une circonférence de centre o en tout point de laquelle

$$\log |f(z)| > \frac{1}{2} r^{\varrho(1-\varepsilon)}.$$

On déduit en particulier de ce théorème la classique propriété qu'il existe une suite de circonférences de centre o , s'éloignant indéfiniment, en tout point desquelles la fonction est d'ordre ϱ .

32. — Signalons simplement, sans insister, que le théorème IX est susceptible d'un énoncé particulier, plus précis, dans le cas où la fonction $f(z)$ est à croissance très régulière (Valiron) c'est-à-dire telle que $\frac{\log M(r, f)}{r\varrho}$ est compris entre deux constantes positives h et k .

On trouve alors que dans chaque couronne circulaire

$$\frac{1}{\lambda} r < |z| < \lambda r,$$

(λ ne dépendant que de h, k, ϱ) il existe une circonférence en tout point de laquelle

$$\log |f(z)| > A(h, k, \varrho) |z|^e.$$

La démonstration de cette propriété est calquée sur celle du théorème IX.

33. — *Remarque sur les domaines où une fonction entière d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$ reste bornée.*¹ — Dans une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (*Remarque sur un théorème de M. Carleman*, 1923, t. 176, p. 944), M. Valiron, examinant le cas des fonctions d'ordre nul, montre que le rapport des log du module maximum et du module minimum de z d'un domaine où la fonction reste bornée, tend vers 1 lorsque le domaine s'éloigne indéfiniment de l'origine.

Nous allons préciser cette proposition, en étudiant le cas des fonctions $f(z)$ d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$.

Soit donc \mathcal{A} un domaine à l'intérieur duquel $|f(z)|$ reste borné (pour fixer les idées, inférieur à K); r_2 et r_1 les bornes supérieure et inférieure des distances à l'origine des points de \mathcal{A} , r une valeur telle que

$$\log M(r) = \log M(r_1) + 1.$$

Nous supposons que r est compris entre r_1 et r_2 . On sait, d'après les propriétés de la fonction $M(r, f)$, que r est d'autant plus près de r_1 que r_1 est assez grand. D'une façon plus précise, r est égal à $O(1)r_1$ [ce qui impose la condition que r_2 soit au moins égal à $O(1)r_1$].

On supposera en outre que le domaine \mathcal{A} soit assez éloigné de l'origine pour que K soit inférieur ou égal à $M(r_1)$.

Il résulte alors de l'inégalité fondamentale (3) que l'on a:

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1} - O(1) < O(1) + \frac{1}{\pi} \log_2 M(r_2)$$

ou encore

$$(9) \quad \log r_2 - \log r_1 < O(1) + 2 \log_2 M(r_2).$$

Supposons la fonction d'ordre fini ϱ inférieur à $\frac{1}{2}$. $\log_2 M(r_2)$ est alors inférieur à $(\varrho + \varepsilon) \log r_2$, et on peut prendre r_2 assez grand pour que ε soit

¹ Cette remarque m'a été suggérée par une lettre de M. Valiron.

aussi petit que l'on veut, et en particulier pour que $\varrho + \varepsilon$ soit inférieur à $\frac{1}{2}$.

Il en résulte

$$\frac{\log r_2}{\log r_1} < \frac{1}{1 - 2\varrho(1 + \varepsilon)} + \frac{O(1)}{\log r_1}.$$

Cette inégalité s'applique encore au cas de l'ordre nul (on fait $\varrho = 0$) et on retrouve alors la propriété démontrée par M. Valiron: $\frac{\log r_2}{\log r_1}$ tend vers 1 lorsque \mathcal{A} s'éloigne indéfiniment (remarquons qu'il en est a fortiori de même dans le cas éliminé, où r_2 est égal à $O(1)r_1$).

Le cas particulier signalé par M. Valiron dans sa note se traite de même: si $\log_2 M(r_2)$ est inférieur à $K \log_2 r_2$, en déduit immédiatement de l'inégalité

(9) que $\frac{r_2}{r_1}$ est inférieur à

$$O(1) [\log r_2]^{2K}.$$

Pour les fonctions d'ordre $\frac{1}{2}$ telles que $\frac{\log M(r_2)}{\sqrt{r_2}}$ tend vers 0, l'inégalité (9) s'applique encore.

