ÜBER DIE EXISTENZ DER GREENSCHEN FUNKTIONEN AUF EINER GEGEBENEN RIEMANNSCHEN FLÄCHE.

Von

P. J. MYRBERG

in HELSINGFORS.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist der Untersuchung der Greenschen und der beschränkten harmonischen Funktionen in beliebigen schlichten oder mehrblättrigen Gebieten, also auf beliebigen Riemannschen Flächen, gewidmet. Hauptzweck unserer Betrachtungen ist, die Abhängigkeit der Existenz der fraglichen Funktionen von der Menge der Randpunkte des Gebietes zu erklären.

In dem ersten, einleitenden Kapitel wird ein neuer, auf der Theorie der konformen Abbildung beruhender Beweis des bekannten Satzes[1] gegeben, dass es zur Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche notwendig und hinreichend ist, dass bei der zur Hauptuniformisierenden gehörigen Hauptkreisgruppe die Poincaréschen Reihen (-2):ter Dimension absolut konvergieren. Dabei gelangt man bekanntlich zugleich zur analytischen Darstellung der Greenschen Funktionen durch unendliche Produkte. Auf dieser Darstellung beruht wesentlich der Beweis unseres im § 3 gegebenen Satzes, wonach jede Riemannsche Fläche, auf welcher eine nichtkonstante, von oben oder unten beschränkte harmonische Funktion existiert, stets Greensche Funktionen besitzt.

Vermittels unseres Resultates und durch Anwendung eines von Szegö[2] herrührenden Satzes über den Zusammenhang zwischen der Existenz der Greenschen Funktionen in einem unendlichen Gebiet und dem transfiniten Durchmesser des Randes des Gebietes ist es möglich, das Verhalten der Greenschen Funktionen am Rande des gegebenen Gebietes zu beschreiben. Die betreffende Untersuchung wird im zweiten Kapitel ausführlich für die schlichten Gebiete ausgeführt. Eine fundamentale Rolle spielt hier eine gewisse Teilmenge des Randes, für welche wir die Benennung transfiniter Kern angewandt haben. Die Einführung dieser Teilmenge, welche sofort auf allgemeinere Punktmengen übertragen werden kann, führt zugleich zur vollständigen Charakterisierung der hebbaren Singularitäten von beschränkten harmonischen Funktionen. In diesem Zusammenhang werden gewisse den transfiniten Durchmesser betreffende Sätze hergeleitet, u. a. wird auf den Zusammenhang zwischen dem transfiniten Durchmesser der Menge der Randpunkte und den anderen Massbestimmungen jener Menge eingegangen und dabei werden Kriterien gegeben, welche ihre Gültigkeit bis auf Fälle behalten, die einem beliebig kleinen Intervalle angehören.

---

[1] H. Poincaré: *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques* (Acta mathematica, Bd. 31, (1907), § 10).

[2] G. Szegö: *Bemerkungen zu einer Arbeit von M. Fekete* usw. (Mathematische Zeitschrift, Bd. 21 (1924).)

Zweck der Betrachtungen des dritten Kapitels ist, die im zweiten Kapitel für die schlichten Gebiete hergeleiteten Resultate auf Riemannsche Flächen zu übertragen. Durch Verwendung und Verallgemeinerung gewisser von JOHANSSON in seiner wertvollen, bisher wenig beachteten Arbeit[1] gegebenen Hilfssätze ist es möglich, die Hauptsätze des zweiten Kapitels auf solche Riemannsche Flächen zu übertragen, welche in einer umfassenderen Riemannschen Fläche als echte Teilflächen enthalten sind. Um auch in den anderen Fällen Kriterien für die Existenz von Greenschen Funktionen zu gewinnen, muss man sich einer konformen Abbildung bedienen, deren wirkliche Ausführung bisher jedoch selbst in den einfachsten Fällen im allgemeinen auf unüberwindliche Schwierigkeiten stösst. Jedenfalls ist es möglich, die für die schlichten Gebiete bewiesenen Sätze auf die sog. fortsetzbaren Riemannschen Flächen zu übertragen, d. h. Flächen, welche auf ein echtes Teilgebiet einer zweiten Riemannschen Fläche konform abgebildet werden können, wenn man von einem Satz von KOEBE[2] Gebrauch macht, wonach jedes schlichtartige Gebiet auf ein schlichtes Gebiet konform abgebildet werden kann. Betreffs der nichtfortsetzbaren Riemannschen Flächen müssen wir uns dagegen hier mit gewissen Beispielen begnügen.

I. Vorbereitende Sätze.

§ 1. Definition der Greenschen Funktionen für eine gegebene Riemannsche Fläche.

1. Es sei F eine beliebige über die x-Ebene verbreitete offene Riemannsche Fläche. Zur Definition der Greenschen Funktionen denken wir uns F durch eine unendliche Folge von einfachen Riemannschen Flächen

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ \ldots \tag{1}$$

approximiert, für welche die Existenz der Greenschen Funktionen im voraus evident ist. Wir wollen die Flächen (1) mit KOEBE[3] in folgender Weise wählen.

---

[1] S. JOHANSSON: *Herstellung automorpher Potentiale bei beliebigen Hauptkreisgruppen* (Acta societatis scientiarum Fennicae, Tom. XLI, N. 2 (1912)).

[2] P. KOEBE: *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, Zweite Mitteilung (Göttingen Nachrichten (1907), I).

[3] P. KOEBE: *Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten* (Acta mathematica, Bd. 50 (1927), N:o 20).

1°. Jede Fläche F_n ist eine endlich-vielblättrige Riemannsche Fläche mit endlich vielen Windungspunkten, die von endlich vielen geschlossenen Linien begrenzt wird (»gewöhnliches Riemannsches Flächenstück»).

2°. Jede Fläche F_n ist eine Teilfläche von F_{n+1} derart, dass jeder Randpunkt von F_n ein innerer Punkt von F_{n+1} ist.

3°. Jede Begrenzungslinie von F_n ist ein »Hauptschnitt» von F, worunter ein Rückkehrschnitt verstanden wird, der F in zwei getrennte Stücke zerlegt. Dabei darf keine Begrenzungslinie von F_n für sich allein einen an F_n aussen anschliessenden Teil von F vollständig begrenzen, der ein »gewöhnliches Flächenstück[1]» ist.

Unter der zum Pol P gehörigen Greenschen Funktion von F_n wird diejenige innerhalb F_n positive und auf dem Rande von F_n verschwindende Funktion $G_n = G_n(P)$ verstanden, welche innerhalb der Fläche F_n und auf dem Rande derselben harmonisch ist, abgesehen von dem innerhalb F_n liegenden Pol P, wo sie logarithmisch, d. h. wie die Funktion $\log \frac{1}{|x|}$ für $x \to 0$ unendlich wird.

Wir betrachten nun die unendliche Folge der Greenschen Funktionen

$$G_1, \ G_2, \ G_3, \ldots \tag{2}$$

der Flächen (1), deren gemeinsamer Pol P mit einem inneren Punkt von F_1 zusammenfällt. Wir haben in (2) offenbar eine monoton wachsende Folge von Funktionen, die nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie in jedem Teilbereich von F gleichmässig gegen eine Grenzfunktion konvergiert, die von der speziellen Wahl der Flächen (1) unabhängig ist, wie in wohlbekannter Weise nachgewiesen werden kann. Die erhaltene Grenzfunktion $G = G(P)$ ist entweder eine auf der offenen Fläche F positive harmonische Funktion, die im Punkt P logarithmisch unendlich wird, oder aber reduziert sich die Grenzfunktion auf eine unendliche Konstante. Wir nennen G im ersten Fall eine Greensche Funktion von F, im zweiten Falle sagen wir, F habe keine Greensche Funktion. Es wird sich zeigen, dass die Existenz der Greenschen Funktion auf einer gegebenen Riemannschen Fläche von der Wahl des Poles unabhängig ist.

2. Die Greensche Funktion G hat die folgende Minimaleigenschaft, welche sie vollkommen charakterisiert:

[1] d. h. eine Teilfläche von F, deren sämtliche Punkte innere Punkte von F sind.

Die Funktion G ist die kleinste unter allen auf F positiven harmonischen Funktionen, welche im Punkte P logarithmisch unendlich werden.

Es sei nämlich H eine solche Funktion. Dann ist

$$H - G_n$$

für jedes n eine im abgeschlossenen Bereich F_n harmonische Funktion, welche auf dem Rand von F_n positiv ist. Somit ist in jedem Punkt von F_n

$$H > G_n$$

und folglich in jedem Punkt von F

$$H \geqq G\,.$$

Gilt dabei das Gleichheitszeichen in einem einzigen Punkt, so gilt dasselbe offenbar überall auf F.

Aus dem Obigen folgt, dass die untere Grenze der Funktion G auf F gleich Null ist. Denn wäre

$$G \geqq C > 0,$$

so hätte man in $G-C$ eine auf F positive und ausserhalb des Poles P harmonische Funktion, die $< G$ ist, was dem Obigen widerspricht.

Dass die Greensche Funktion bei Annäherung an einen Randpunkt keineswegs den Grenzwert Null zu haben braucht, geht schon aus dem Beispiel eines isolierten Randpunktes hervor. Das Verhalten der Greenschen Funktionen auf dem Rand soll später näher untersucht werden.

Wir wollen hier nur noch zeigen, dass die Greensche Funktion ausserhalb ihres Poles beschränkt ist.

Wir ziehen zum Beweis um den Pol P herum eine geschlossene Kurve K. Weil die Greensche Funktion G_n in dem ausserhalb K liegenden Teil F'_n von F_n harmonisch ist, so erreicht sie ihr Maximum M_n auf dem Rand von F'_n und somit auf K, weil sie auf dem übrigen Teil des Randes verschwindet. Ist nun M das endliche Maximum von G auf K, so ist $M_n < M$ und somit ist von n unabhängig $G_n < M$ im Bereich F'_n. Hieraus folgt, dass $G \leqq M$ in jedem Punkt von F ausserhalb K ist, w. z. b. w.

§ 2. Analytische Darstellung der Greenschen Funktionen durch die Hauptuniformisierende.

3. Es sei p_n das endliche Geschlecht der Fläche F_n und q_n die endliche Anzahl ihrer geschlossenen Randkurven. Wir schneiden die Fläche F_n in bekannter Weise kanonisch durch $q_n - 1 + 2p_n$ getrennt liegende Querschnitte derart, dass dieselbe in einen einfach zusammenhängenden Bereich $\overline{F_n}$ übergeht. Aus unendlich vielen Exemplaren der Fläche $\overline{F_n}$ bilden wir jetzt in bekannter Weise durch Zusammenheftung längs den Querschnitten eine unendlich vielblättrige Fläche U_n, die universelle Überlagerungsfläche von F_n. Durch die Hauptuniformisierende $z_n(x)$ von F_n wird U_n auf das Innere des Kreises

$$|z_n| = 1 \qquad : H_n$$

konform abgebildet, wobei man die polymorphe Funktion $z_n(x)$ so normieren kann, dass der Punkt P in den Nullpunkt übergeführt wird und die Ableitung in P reell wird.

Der geschnittenen Fläche $\overline{F_n}$ entspricht in der z_n-Ebene ein endlich vielseitiges Polygon B_n.

Die den Querschnitten von $\overline{F_n}$ entsprechenden Seiten von B_n liegen innerhalb H_n, während den Randkurven von F_n gewisse Bogen von H_n zugeordnet sind.

Den verschiedenen Exemplaren der Fläche $\overline{F_n}$ entsprechen neben einander liegende Bildpolygone von B_n, welche aus B_n durch hyperbolische Substitutionen

$$S_k^{(n)}(z) = \frac{\alpha_k^{(n)} z + \beta_k^{(n)}}{\gamma_k^{(n)} z + \delta_k^{(n)}} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

erhalten werden, die eine Fuchssche Gruppe Γ_n bilden, für welche B_n ein Fundamentalbereich ist, wenn man sich auf das Innere von H_n beschränkt.

Weil die Gruppe Γ_n noch auf Teilen des Hauptkreises H_n, nämlich auf den Bildbogen der Randkurven von F_n, eigentlich diskontinuierlich ist, so konvergieren nach einem bekannten Satz[1] von Ritter und Burnside die Poincaréschen Reihen (-2):ter Dimension absolut bei der Gruppe Γ_n. Aus der absoluten Konvergenz der Reihe

[1] Vgl. R. Fricke und F. Klein: *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, Bd. II, S. 157.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d S_k^{(n)}(z)}{dz} \tag{4}$$

folgt aber wegen der Formel

$$\left| \frac{d S(z)}{dz} \right| = \frac{1 - |S(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |S_k^{(n)}(z)|) \tag{5}$$

und somit auch die Konvergenz des unendlichen Produktes

$$\prod_{k=0}^{\infty} |S_k^{(n)}(z)|. \tag{6}$$

Die Konvergenz findet gleichmässig in jedem Bereich statt, der keinen Grenzpunkt der Gruppe, d. h. keinen auf H_n liegenden Häufungspunkt der Polygone enthält.

Der Wert des Produktes (6) bleibt ungeändert, wenn man z einer beliebigen Substitution von Γ_n unterwirft, weil dabei nur die Faktoren mit einander permutiert werden. Wegen

$$|S_k^{(n)}(z)| < 1 \text{ für } |z| < 1 \text{ und } |S_k^{(n)}(z)| = 1 \text{ für } |z| = 1 \tag{7}$$

ist der Wert des Produktes (6) kleiner als 1 innerhalb H_n und gleich 1 in den regulären, d. h. von den Grenzpunkten verschiedenen Punkten von H_n.

Wir bilden jetzt die Funktion

$$-\log \prod_{k=0}^{\infty} |S_k^{(n)}(z)|. \tag{8}$$

Nach dem Obigen ist sie ein automorphes Potential, welches in den Punkten

$$S_k^{(n)}(0) \tag{9}$$

logarithmisch unendlich wird, sonst innerhalb H_n harmonisch und positiv ist. In den regulären Punkten von H_n nimmt sie den Wert Null an.

Aus dem Obigen geht hervor, dass (8) als Funktion auf der Fläche F_n identisch mit der Greenschen Funktion $G_n(P)$ der Fläche ist.

4. Wir denken uns hiernach für die gegebene Riemannsche Fläche F selbst die universelle Überlagerungsfläche in der analogen Weise konstruiert und dieselbe bei der obigen Normierung auf das Innere des Kreises

$$|z| = 1 \qquad : H$$

vermöge der zugehörigen polymorphen Funktion $z(x)$ konform abgebildet. Die der kanonisch geschnittenen Fläche $\overline{F}$ entsprechenden Polygone sind jetzt im allgemeinen unendlich vielseitig, wobei der Rand derselben keinen Bogen von H zu enthalten braucht. Die zugehörige Gruppe Γ ist im allgemeinen eine fuchsoide Gruppe, d. h. sie besitzt unendlich viele Erzeugende. Die Gruppe Γ kann dabei neben den hyperbolische Substitutionen auch parabolische aufweisen.

Wir bilden wieder das Produkt

$$\prod_{k=0}^{\infty} |S_k(z)|, \tag{10}$$

diesmal erstreckt über die Substitutionen von Γ, welches Produkt gleichzeitig mit den Poincaréschen Reihen (-2):ter Dimension absolut konvergiert. Betreffs dieser Reihen, die nicht absolut zu konvergieren brauchen, wenn H ein Grenzkreis von Γ ist, d. h. wenn der Fundamentalbereich B von Γ keinen Bogen von H enthält, soll der folgende von Poincaré[1] herrührende Satz bewiesen werden.

Es ist für die Konvergenz des Produktes (10) *notwendig und hinreichend, dass die Fläche F Greensche Funktionen besitzt. Wenn* (10) *konvergiert, so wird die Greensche Funktion von F mit dem Pol P durch den Ausdruck*

$$-\log \prod_{k=0}^{\infty} |S_k(z)| \tag{11}$$

dargestellt.

5. Zum Beweis des obigen Satzes wollen wir die Abhängigkeit der Grössen z und z_n voneinander untersuchen.

Wir betrachten zu diesem Zweck eine im Kreise H liegende Bildkurve K_n irgend einer geschlossenen Randkurve C_n von F_n. Die Kurve K_n kann nicht geschlossen sein. Andernfalls würde nämlich dem Inneren von K_n auf F ein »gewöhnliches Flächenstück» entsprechen, was unserer dritten Annahme in N: 1 widerspricht, weil jenes Flächenstück offenbar identisch mit dem von C_n begrenzten,

[1] Vgl. die Fussnote 1, S. 40.

zu F_n benachbarten Teil von F ist. Diejenige Substitution S von Γ, welche den einen Endpunkt von K_n auf den anderen abbildet, ist somit von der Identität verschieden und zwar hyperbolisch oder parabolisch, weil keine elliptischen Substitutionen vorhanden sind. Indem man auf K_n die Gesamtheit der positiven und negativen Potenzen von S anwendet, erhält man eine Kurve, deren beide Endpunkte auf H, in den Fixpunkten von S, liegen.

Die Gesamtheit der Bildkurven K_n der verschiedenen Randkurven von F_n im Kreise H bilden somit ein Kontinuum. Diejenigen Gebiete, in welche das Innere von H durch dieselben geteilt wird, sind somit alle einfach zusammenhängend.

Es sei D_n dasjenige unter den genannten Gebieten, welches den Punkt O enthält. Aus der Definition der Riemannschen Fläche F als Grenzgebilde der Flächen F_n geht hervor, dass die Gebiete

$$D_n, \tag{12}$$

von denen jedes ein Teil aller folgenden ist, für $n \to \infty$ gegen die Kreisfläche $|z| < 1$ konvergieren.

6. Wir betrachten jetzt die Funktion

$$z = z(z_n), \tag{13}$$

die den Anfangsbedingungen

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = \text{reell}$$

genügt. Sie ist eine für $|z_n| < 1$ reguläre Funktion, deren Werte von Punkten des Gebietes D_n dargestellt werden. Dies folgt unmittelbar aus dem Obigen und daraus, dass jede relativ zur Fläche F_n unverzweigte Funktion eine eindeutige Funktion der Hauptuniformisierenden z_n ist. In gleicher Weise ist einzusehen, dass die inverse Funktion $z_n(z)$ in dem einfach zusammenhängenden Gebiet D_n regulär ist. Die Funktion (13) vermittelt somit eine konforme Abbildung des Inneren von H_n auf das Gebiet D_n.

Es sei nun

$$S_k^{(n)}(z_n) \tag{14}$$

eine beliebige Substitution von Γ_n. Wenn man dieselbe auf z_n ausübt, so erleidet (13) eine zu Γ gehörige Substitution

$$S_{k,n}(z). \tag{15}$$

Die den verschiedenen Substitutionen (14) von Γ_n entsprechenden Substitutionen (15) bilden eine Untergruppe $\Gamma_{(n)}$ von Γ, die offenbar mit Γ_n holoedrisch isomorph ist, und deren Substitutionen die zu D_n gehörigen Polygone von Γ miteinander permutieren. Weil

$$\lim_{n\to\infty} z_n(z) = z \tag{16}$$

gleichmässig in jedem innerhalb H liegenden Bereich gilt, so konvergieren die Koeffizienten von (14) für $n\to\infty$ gegen die entsprechenden Koeffizienten der zugehörigen Substitution (15).

Nun ist nach dem Schwarzschen Lemma

$$|z(z_n)| < |z_n|,$$

woraus folgt, dass allgemein

$$|S_{k,n}(z)| < |S_k^{(n)}(z_n)|$$

ist. Die Reihe mit positiven Gliedern

$$\sum_{\Gamma_n} -\log |S_k^{(n)}(z)| \tag{17}$$

hat somit eine Majorante in der Reihe

$$\sum_{\Gamma_{(n)}} -\log |S_{k,n}(z)|, \tag{18}$$

die eine Teilreihe von (11) ist. Wegen (16) ist aber

$$\lim_{n\to\infty} S_{k,n}(z) = \lim_{n\to\infty} S_k^{(n)}(z).$$

Hieraus geht hervor, dass die Summen der Reihen (17) und (18) für $n\to\infty$ gegen eine und dieselbe endliche oder unendliche Grösse konvergieren. Weil anderseits der Grenzwert von (18) für $n\to\infty$ gleich (11) und der Grenzwert der Reihen (17), welche die Greenschen Funktionen (2) der Näherungsflächen (1) von F darstellen, gleich der Greenschen Funktion $G(P)$ von F ist, wenn diese existiert, sonst unendlich, ist im ersten Falle für $|z| < 1$

$$-\log \prod_{k=0}^{\infty} |S_k(z)| = G(P),$$

während im zweiten Falle (11) unendlich ist. Damit ist der Poincarésche Satz vollständig bewiesen.

Aus dem obigen Beweisgang geht hervor, dass aus der Konvergenz der Reihe (11) für einen einzigen Wert von z mit $|z| < 1$ ihre gleichmässige Konvergenz in jedem innerhalb des Hauptkreises liegenden, keinen Bildpunkt des Poles enthaltenden Bereich folgt, was im Einklang mit dem Harnackschen Prinzip ist.

Wird der Pol der Greenschen Funktion nicht speziell in den Nullpunkt, sondern allgemein in den Punkt z_0 transformiert, so erhält man leicht für die betreffende Funktion den allgemeineren Ausdruck

$$-\log \prod_{k=0}^{\infty} \left| \frac{S_k(z) - z_0}{S_k(z) - \hat{z}_0} : \frac{S_k(\zeta) - z_0}{S_k(\zeta) - \hat{z}_0} \right|, \tag{19}$$

wo ζ einen Punkt von H und $\hat{z}_0$ den Spiegelbild von z_0 in bezug auf H bezeichnet.

Weil diese Reihe von z_0 unabhängig gleichzeitig mit den Poincaréschen Reihen (-2):ter Dimension der Gruppe Γ absolut konvergiert, ist damit bewiesen, dass die Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche von der Wahl des Poles stets unabhängig ist.

§ 3. Ein Satz über beschränkte harmonische Funktionen.

7. Der betreffende Satz, auf welchem die folgenden Betrachtungen über die Greenschen Funktionen beruhen, lautet:

1. Satz. *Wenn es auf der Riemannschen Fläche F eine nichtkonstante von oben oder unten beschränkte harmonische Funktion gibt, so gibt es dort auch Greensche Funktionen.*

Durch eine Transformation der Form

$$b(t) + c \quad \text{oder} \quad -b(t) + c,$$

wo c eine Konstante ist, kann man stets erreichen, dass die gegebene beschränkte Funktion $b(t)$ der Ungleichung

$$b(t) < 0 \tag{20}$$

auf F genügen wird.

Es sei nun $h(t)$ die zu $b(t)$ konjugierte harmonische Funktion, welche bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Dann ist

$$\varphi(t) = b(t) + ih(t) \tag{21}$$

eine analytische Funktion des Ortes t auf F, welche um rein imaginäre Konstanten vermehrt wird, wenn der Punkt t eine geschlossene Kurve auf F beschreibt.

Es sei $z(t)$ die Hauptuniformisierende von F. Die Funktion $\varphi(t(z))$ ist eine eindeutige Funktion von z, die bei Ausführung einer Substitution S der Gruppe Γ von $z(t)$ die Transformation

$$\varphi(t(S)) = \varphi(t(z)) + i\omega_S \tag{22}$$

erleidet, wo ω_S reell ist. Wir bilden jetzt die Funktion

$$f(z) = e^{\lambda\varphi(t(z))}\,, \tag{23}$$

wo λ eine später zu bestimmende reelle positive Grösse ist. Die Funktion (23) ist für $|z| < 1$ regulär und beschränkt:

$$|f(z)| < 1,$$

und sie erleidet allgemein bei Ausführung von S die Transformation

$$f(S) = e^{i\lambda\omega_S} f(z). \tag{24}$$

8. Es sei jetzt D diejenige über die φ-Ebene verbreitete Riemannsche Fläche, auf welche F durch die Funktion $\varphi(t)$ konform abgebildet wird. Wir denken uns in einem Blatt von D eine zur imaginären Achse parallele Strecke L:

$$a,\ a + i\varrho \qquad\qquad (a < 0,\ \varrho > 0)$$

gezogen. Es sei L_t der Bildbogen von L auf F. In der z-Ebene hat L_t unendlich viele Bildbogen

$$L_\nu = S_\nu(L_0), \qquad\qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{25}$$

welche aus einem L_0 unter denselben durch die verschiedenen Substitutionen von Γ erhalten werden.

Wir wählen nun $\lambda = \frac{2\pi}{\varrho}$ und lassen den Punkt z einen der Bogen (25) beschreiben. Dann beschreibt der Punkt t den Bogen L_t auf F, der Punkt φ die Strecke L und der Punkt

$$f(z) = e^{\frac{2\pi}{\varrho}\varphi(t(z))} \tag{26}$$

genau einmal die Kreislinie

$$|f| = e^{\frac{2\pi}{\varrho}a}. \tag{27}$$

Aus (24) geht ferner hervor, dass wenn der Bogen L_0 durch den äquivalenten Bogen (25) ersetzt wird, der Bildpunkt f wieder die nämliche Kreislinie (27) beschreibt derart, dass die Argumente der Bildpunkte irgend zweier äquivalenter Punkte die konstante Differenz $\frac{2\pi}{\varrho}\omega_{S_\nu}$ haben. Der Wertvorrat der Funktion (26) ist somit auf allen Bogen (25) derselbe, nämlich identisch mit (27).

Es sei nun f_0 irgend ein zu (27) gehöriger Wert. Nach dem Obigen gibt es auf jedem Bogen L_ν genau einen Punkt, ζ_ν, wo

$$f(\zeta_\nu) = f_0, \tag{28}$$

wobei die Punkte ζ_ν im allgemeinen miteinander nicht äquivalent sind. Weil die Funktion (26) im Einheitskreise beschränkt ist, muss die Reihe

$$\sum (1 - |\zeta_\nu|) \tag{29}$$

nach einem bekannten Satz von Blaschke konvergieren.

Wir wählen ferner auf L_0 einen Punkt z_0 und bezeichnen mit z_ν den auf L_ν liegenden äquivalenten Punkt. Es sei

$$S_\nu = \frac{\alpha_\nu z + \beta_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu} \qquad (\alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu = 1)$$

der Ausdruck von S_ν. Wegen der Gleichungen

$$\left|\frac{dS_\nu}{dz}\right| = \frac{1 - |S_\nu|^2}{1 - |z|^2} = \frac{1}{|\gamma_\nu z + \delta_\nu|^2} \tag{30}$$

ist

$$\frac{1 - |z_\nu|^2}{1 - |z_0|^2} = \frac{1}{|\gamma_\nu z_0 + \delta_\nu|^2} \tag{31}$$

und ferner ist

$$\frac{1-|\zeta_\nu|^2}{1-|c_\nu|^2} = \frac{1}{|\gamma_\nu c_\nu + \delta_\nu|^2}, \tag{32}$$

wo c_ν den mit ζ_ν äquivalenten Punkt auf L_0 bezeichnet. Aus (31) und (32) folgt

$$\frac{1-|z_\nu|^2}{1-|\zeta_\nu|^2} = \frac{1-|z_0|^2}{1-|c_\nu|^2}\left|\frac{c_\nu + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}}{z_0 + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}}\right|^2. \tag{33}$$

Beachtet man, dass die Punkte $-\frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}$ ausserhalb des Hauptkreises H liegen, so erhält man

$$\frac{1-|z_\nu|}{1-|\zeta_\nu|} = \frac{1+|\zeta_\nu|}{1+|z_\nu|}\cdot\frac{1-|z_0|^2}{1-|c_\nu|^2}\cdot\left|\frac{c_\nu + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}}{z_0 + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}}\right|^2 < \frac{8}{\varDelta^3},$$

wo $\varDelta$ den von Null verschiedenen kürzesten Abstand des Bogens L_0 vom Hauptkreis bezeichnet. Hieraus geht hervor, dass mit (29) auch die Reihe

$$\sum(1-|z_\nu|)$$

konvergent ist. Nach § 2 ist damit die Existenz der Greenschen Funktionen auf F bewiesen.

II. Schlichte Gebiete.

§ 4. Die Greenschen Funktionen eines schlichten Gebietes.

9. Es sei D ein beliebiges schlichtes Gebiet der x-Ebene. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass der unendlich ferne Punkt zu D gehört, weil man dies durch eine konforme Abbildung erreichen kann, welche auf die Existenz der Greenschen Funktionen keinen Einfluss hat. Der Rand von D besteht dann aus einer beschränkten, abgeschlossenen Punktmenge M.

Zweck der folgenden Betrachtungen ist, das Verhalten der Greenschen Funktionen von D am Rande des Gebietes zu untersuchen. Wir wollen zu diesem Zweck den *transfiniten Durchmesser* der Punktmenge M einführen, den wir mit FEKETE[1] in folgender Weise definieren.

[1] M. FEKETE: *Über die Verteilung der Wurzeln* usw. (Math. Zeitschrift, Bd. 17 (1923)).

Wir verstehen unter dem n:ten Durchmesser von M das Maximum

$$d_n = \max \sqrt[\binom{n}{2}]{\prod_{i<k} |x_i - x_k|}, \tag{1}$$

wenn die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von einander unabhängig aus M gewählt werden. Die unendliche Folge der positiven Grössen

$$d_1, \; d_2, \; d_3, \ldots \tag{2}$$

ist monoton abnehmend und sie konvergiert folglich gegen einen endlichen, nichtnegativen Grenzwert

$$d = \lim_{n \to \infty} d_n, \tag{2'}$$

den transfiniten Durchmesser von M, den wir im Folgenden mit $\tau(M)$ bezeichnen werden.

10. Aus der Definition des transfiniten Durchmessers geht hervor, dass wenn eine Punktmenge M auf eine andere M' durch eine analytische Funktion $x' = f(x)$ abgebildet wird, welche eine Umgebung von M (d. h. einen Bereich, der M in seinem Innern enthält) schlicht abbildet, so sind die transfiniten Durchmesser der beiden Mengen stets gleichzeitig Null oder von Null verschieden. Sind nämlich allgemein die x'_i den Punkten x_i von M entsprechenden Punkte von M', so ist

$$\varrho_1 |x_i - x_j| < |x'_i - x'_j| < \varrho_2 |x_i - x_j|, \tag{3}$$

wenn ϱ_1 und ϱ_2 das Minimum bzw. Maximum des absoluten Betrages der Ableitung von $f(x)$ in den Punkten von M bezeichnet, wobei

$$0 < \varrho_1, \quad \varrho_2 < \infty.$$

Aus (1) und (3) folgt aber

$$\varrho_1 \tau(M) < \tau(M') < \varrho_2 \tau(M), \tag{3'}$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht.

11. Ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen der Existenz der Green-

schen Funktionen im Gebiet D und dem transfiniten Durchmesser des Randes M wird durch den folgenden, von SZEGÖ[1] bewiesenen Satz ausgesprochen.

Notwendig und hinreichend für die Existenz der Greenschen Funktionen im Gebiet D ist, dass $\tau(M) > 0$. Dabei ist $\tau(M)$ gleich der Robinschen Konstante γ der Greenschen Funktion $G\{x\}$ von D mit dem Pol $x = \infty$, d. h. es ist

$$\log \gamma = \lim_{|x| \to \infty} (\log |x| - G\{x\}). \tag{4}$$

Wir beweisen jetzt den

2. Satz. *Es sei M eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge der x-Ebene, deren transfiniter Durchmesser gleich Null ist und B ein beliebiger, die Menge M in seinem Innern enthaltender Bereich. Dann ist jede im Restgebiet $B - M = B_M$ absolut beschränkte und harmonische Funktion auch in jedem Punkt von M harmonisch.*

Es sei $h(x)$ eine Funktion der im Satze genannten Art, also $|h(x)| < k < \infty$ und $b(x)$ diejenige im ganzen Bereich B harmonische Funktion, deren Werte auf der Randkurve C von B mit denjenigen von $h(x)$ übereinstimmen. Dann ist

$$\varphi(x) = b(x) - h(x) \tag{5}$$

eine im Gebiet B_M absolut beschränkte und harmonische Funktion, die auf C verschwindet. Wir werden indirekt zeigen, dass $\varphi(x) \equiv 0$.

Wir führen eine konforme Abbildung $t = t(x)$ aus, so dass B auf die obere Halbebene ($\Im(t) \geqq 0$) und M auf eine innerhalb der genannten Halbebene liegende beschränkte Punktmenge M_1 abgebildet wird. Dadurch geht $\varphi(x)$ in eine Funktion $\psi(t)$ über, welche in dem von der reellen Achse I und M_1 begrenzten Bildgebiet B_1 von B_M absolut beschränkt und harmonisch ist, und welche auf I verschwindet. Wir können daher die Funktion $\psi(t)$ harmonisch in den bezüglich I genommenen Spiegelbild $\bar{B}_1$ von B_1 fortsetzen und erhalten so eine im Gebiete $B' = B_1 + \bar{B}_1$ beschränkte und harmonische nichtkonstante Funktion $\psi(t)$. Dieses Gebiet besitzt aber dann, nach unserem 1. Satz, auch Greensche Funktionen. Hieraus folgt, nach dem oben zitierten Satz von SZEGÖ, dass der transfinite Durchmesser des Randes von B', also der Punktmenge $M'_1 = M_1 + \bar{M}_1$, wo $\bar{M}_1$ den Spiegelbild von M_1 in bezug auf I bezeichnet, grösser als Null ist.

[1] Vgl. die Fussnote 2, S. 40.

Es sei andererseits d_n bzw. d'_n der n:te Durchmesser von M_1 bzw. M_1'. Wir können den Ausdruck von d'_n in der Form

$$d'_n{}^{\frac{n(n-1)}{2}} = \Pi|t_i - t_j| \cdot \Pi|\bar{t}_k - \bar{t}_l| \cdot \Pi|t_p - \bar{t}_q| \tag{6}$$

schreiben, wo die Grössen t Punkte von M_1 und $\bar{t}$ Punkte von $\overline{M}_1$ repräsentieren. Es sei μ die Anzahl der erstgenannten, ν diejenige der letzteren Punkte, wobei also $\mu + \nu = n$. Es sei z. B. $\mu \geqq \nu$. Weil

$$\Pi|t_i - t_j| \leqq d_\mu^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}}, \quad \Pi|\bar{t}_k - \bar{t}_l| \leqq d_\nu^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \tag{7}$$

und

$$\Pi|t_p - \bar{t}_q| \leqq \Delta^{\mu\nu}, \tag{7'}$$

wo Δ das Maximum der Abstände der Punkte von M_1 und $\overline{M}_1$ bezeichnet, so ist

$$d'_n{}^{\frac{n(n-1)}{2}} \leqq d_\mu^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} d_\nu^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \Delta^{\mu\nu}. \tag{8}$$

Wegen $\tau(M) = 0$ und der Bemerkung in N:o 10 ist

$$\lim_{k\to\infty} d_k = \tau(M_1) = 0.$$

Hieraus und aus (8) folgt

$$\tau(M_1 + \overline{M}_1) = \lim_{n\to\infty} d'_n = 0,$$

was dem Obigen widerspricht.

Damit ist bewiesen, dass $\psi(t) \equiv 0$ und also $\varphi(x) \equiv 0$, d. h.

$$h(x) \equiv b(x). \tag{9}$$

Die Funktion $h(x)$ ist somit in jedem Punkt von M harmonisch. Hiermit ist der 2. Satz vollständig bewiesen.

12. Das obige Resultat führt zur Einteilung der Punkte jeder beschränkten Punktmenge M der Ebene in zwei Klassen.

Wir rechnen zur *ersten Klasse* jeden Punkt der Menge M mit der Eigenschaft, dass es in jeder Umgebung des Punktes eine abgeschlossene Teilmenge von M existiert, deren transfiniter Durchmesser grösser als Null ist. Zur *zwei-*

ten Klasse rechnen wir alle übrigen Punkte von M. Jeder dieser letzteren Punkte hat also die Eigenschaft, dass es eine Umgebung desselben gibt, deren zugehörige Teilmenge von M einen verschwindenden transfiniten Durchmesser hat.

Aus der obigen Definition geht hervor, dass die Menge der Punkte der ersten Klasse abgeschlossen ist. Diese Menge soll im Folgenden der *transfinite Kern* der Menge M genannt werden. Wir werden für dieselbe die Bezeichnung M^* anwenden.

13. Wir betrachten jetzt etwas näher die Eigenschaften des transfiniten Kerns einer *Randmenge*, womit wir kurz eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge bezeichnen, welche aus dem Rand irgend eines unendlichen Gebietes besteht. Dasjenige unendliche Gebiet, dessen Rand aus der gegebenen Randmenge M besteht, wird im Folgenden gewöhnlich mit $D(M)$ bezeichnet.

3. Satz. *Es sei A ein beliebiger Bereich, der die Randmenge M in seinem Innern enthält. Jede Funktion $h(x)$, die im Restgebiet $A_M = A - M$ absolut beschränkt und harmonisch ist, ist auch in jedem zur Menge M^* nicht gehörigen Punkt von M harmonisch.*

Es sei P ein Punkt der zweiten Klasse von M. Nach der Definition gibt es eine Umgebung U von P, deren zugehörige Teilmenge m von M einen verschwindenden transfiniten Durchmesser hat. Diese Teilmenge m kann kein Kontinuum enthalten, wie in N:o 23 bewiesen wird. Wir können somit um den Punkt P herum im Bereich U eine geschlossene Kurve C ziehen derart, dass dieselbe keinen Punkt von M enthält. Es sei B der von C begrenzte endliche Bereich und μ die in B gelegene Teilmenge von m. Weil die gegebene Funktion $h(x)$ im Restgebiet $B-\mu$ beschränkt und harmonisch ist und weil $\tau(\mu)=0$, so muss $h(x)$ nach dem 2. Satz auch in den Punkten von μ und somit speziell im Punkt P harmonisch sein. Weil dies für alle Punkte der zweiten Klasse von M gilt, ist unser Satz damit bewiesen.

Die Punkte der zweiten Klasse sind somit hebbare Singularitäten für alle oben betrachteten Funktionen.

14. Indem wir jetzt zu den Greenschen Funktionen des unendlichen Gebietes $D(M)$ zurückkehren, bemerken wir, dass nach N:o 2 jede derselben in jedem den Pol nicht enthaltenden Bereich beschränkt ist. Nach 3. Satz muss somit jede Greensche Funktion von $D(M)$ in jedem zum transfiniten Kern nicht gehörigen

Randpunkt harmonisch und zwar positiv sein, weil man nach dem Obigen jeden solchen Punkt durch eine geschlossene, innerhalb $D(M)$ verlaufende Kurve umschliessen kann, in deren Inneren die betrachtete Greensche Funktion harmonisch ist.

Es sei jetzt P ein Punkt des transfiniten Kerns des Randes M von $D(M)$. Nach der Definition ist der transfinite Durchmesser derjenigen Teilmenge m von M, die irgend einer Umgebung U von P gehört, grösser als Null. Das unendliche Gebiet $D(m)$ mit der Randmenge m besitzt somit Greensche Funktionen.

Es seien G und g die Greensche Funktionen von $D(M)$ bzw. $D(m)$ mit dem gemeinsamen Pol π. Weil g in $D(M)$ positiv und ausserhalb π harmonisch ist, muss nach der in N:o 2 bewiesenen Minimaleigenschaft der Greenschen Funktionen im Gebiet $D(M)$ die Ungleichung

$$G \leqq g \tag{10}$$

gelten. Nun ist aber nach N:o 2 die untere Grenze von g im Gebiet $D(m)$ und somit in U, wo alle Randpunkte von $D(m)$ liegen, gleich Null. Wegen (10) ist somit in jeder Umgebung von P die untere Grenze von G gleich Null. Es gilt somit der

4. Satz. *Die Greenschen Funktionen des Gebietes $D(M)$ haben in jeder Umgebung jedes zum transfiniten Kern des Randes M gehörigen Punktes die untere Grenze Null.*

15. Wir wollen nun zwischen zwei Fällen unterscheiden, je nachdem ob der Punkt P ein regulärer oder irregulärer Punkt von M^* ist.

Es sei P zuerst ein regulärer Punkt von M^*, d. h. die zu einer hinreichend kleinen Umgebung von P gehörige Teilmenge m von M^* möge identisch mit einem gewissen, den Punkt P enthaltenden regulären analytischen Bogen β sein. Die polymorphe Funktion $z(x)$, welche die zu $D(M^*)$ gehörige universelle Überlagerungsfläche auf das Innere des Hauptkreises H konform abbildet, ist offenbar regulär im Punkte P und sie bildet den Bogen β auf einen Bogen β' von H ab, der als ganzes dem Fundamentalbereich der Gruppe von $z(x)$ gehört. Auf einem solchen Bogen β' ist aber jede Greensche Funktion von F harmonisch und gleich Null, wie aus dem Ausdruck (11) N:o 4 hervorgeht, welche gleichmässig noch in einer Umgebung jedes Punktes von β' konvergiert. In jedem regulären Punkt von M^* ist somit jede Greensche Funktion von F harmonisch und hat dort den Wert Null.

Es sei umgekehrt G harmonisch in einem zu M^* gehörigen Punkt P. Nach 4. Satz hat sie dann im Punkt P den Wert Null. Die Gleichung

$$G = 0 \tag{11}$$

definiert dann einen regulären Bogen durch P. Eine hinreichend kleine Umgebung U von P wird durch die Kurve (11) in zwei Teile zerlegt, so dass in dem einen Teil $G > 0$, im anderen $G < 0$ ist. Hieraus und aus dem 4. Satz folgt offenbar, dass die zu U gehörige Teilmenge von M^* identisch mit einem Bogen von (11) ist. Damit ist bewiesen, dass jeder irreguläre Punkt von M^* eine singuläre Stelle für die Greenschen Funktionen des Gebietes $D(M)$ ist.

Wir wollen die obigen Resultate im folgenden Satz zusammenfassen.

5. Satz. *Die Greenschen Funktionen des Gebietes $D(M)$ sind harmonisch und positiv in jedem zum transfiniten Kern M^* des Randes M nicht gehörigen Punkt. In den Punkten von M^* dagegen sind sie harmonisch und gleich Null oder singulär mit der unteren Grenze Null, je nachdem ob der betreffende Punkt ein regulärer oder irregulärer Punkt von M^* ist.*

§ 5. Über die hebbaren Singularitäten von absolut beschränkten harmonischen Funktionen.

16. Aus den obigen Ergebnissen kann man folgenden Satz gewinnen, welcher den 3. Satz in bemerkenswerter Weise ergänzt.

6. Satz. *Ist M eine beliebige beschränkte Randmenge, so gibt es eine in der Umgebung derselben absolut beschränkte harmonische Funktion, welche in jedem Punkte des transfiniten Kerns von M einen singulären Punkt hat.*

Es sei P zuerst ein regulärer Punkt von M^* und β ein durch denselben gehender zu M^* gehöriger analytischer Bogen. Es ist leicht, eine Funktion h zu konstruieren, welche in jedem Punkt von β singulär ist und in dem unendlichen Komplementargebiet $D(\beta)$ von β absolut beschränkt und harmonisch ist. Wir denken uns zu diesem Zweck das Gebiet $D(\beta)$ konform auf das Innere eines Kreises H abgebildet. Durch die inverse Transformation wird z. B. der reelle Teil einer analytischen Funktion, welche innerhalb des Kreises H beschränkt und harmonisch ist, und welche H zur singulären Linie hat, in eine Funktion der gesuchten Art übergeführt.

Wir können nun offenbar eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von analytischen Bogen aus M^* wählen derart, dass jeder regulärer Punkt höchstens zweien von denselben angehört. Es seien

$$h_1,\ h_2,\ h_3,\ \ldots$$

die zugehörigen in obiger Weise bestimmten Funktionen, wobei wir ohne Einschränkung annehmen können, dass allgemein $|h_\nu| \leqq 1$. Dann ist

$$F = c_1 h_1 + c_2 h_2 + \cdots,$$

wo die Konstanten c_ν so gewählt werden, dass

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|$$

konvergiert, eine ausserhalb der Menge M^* absolut beschränkte harmonische Funktion, die in jedem regulären Punkt von M^* singulär ist.

Weil jede Greensche Funktion G von $D(M)$ nach N:o 2 ausserhalb ihres Poles beschränkt und nach 5. Satz in jedem irregulären Punkt von M^* singulär ist, so ist offenbar die Funktion

$$F + G$$

in einer Umgebung der Menge M harmonisch und absolut beschränkt und in jedem Punkt von M^* singulär. Die Richtigkeit des 6. Satzes ist damit bewiesen.

Durch die Sätze 3 und 6 ist die Beschaffenheit der hebbaren Singularitäten von absolut beschränkten harmonischen Funktionen vollständig erklärt.

§ 6. **Einige Eigenschaften des transfiniten Kerns einer beschränkten Punktmenge.**

17. Es sei wieder D ein unendliches Gebiet, M sein Rand, M^* der transfinite Kern von M und D^* das unendliche Komplementargebiet von M^*. Es seien G und G^* die Greenschen Funktionen von D bzw. D^* mit dem gemeinsamen Pol π. Wir behaupten, dass

$$G \equiv G^*. \tag{12}$$

Weil G im Gebiet D^* positiv und ausserhalb des Punktes π harmonisch ist, so ist nach N:o 2 im Gebiete D^*

$$G \geqq G^*. \tag{13}$$

Aus gleichem Grunde ist im Gebiet D

$$G^* \geqq G, \tag{13'}$$

weil dort die Funktion G^* positiv und ausserhalb des Punktes π harmonisch ist. Aus (13) und (13)′ folgt aber die zu beweisende Gleichung (12).

Wir wählen insbesondere $\pi = \infty$ und erhalten wegen (4) die Gleichung

$$\tau(M) = \tau(M^*). \tag{14}$$

Es gilt somit der

7. Satz. *Die Randmenge eines beliebigen unendlichen Gebietes und ihr transfiniter Kern haben stets denselben transfiniten Durchmesser.*

Wir ergänzen den obigen Satz mit dem

8. Satz. *Der transfinite Durchmesser jeder abgeschlossenen Teilmenge der Menge M^* ist kleiner als derjenige von M^*, wenn M^* nicht leer ist.*

Es sei m eine abgeschlossene Teilmenge von M^*. Ist $\tau(m) = 0$, so ist der Satz richtig, weil $\tau(M^*) > 0$. Es sei daher $\tau(m) > 0$ und g die Greensche Funktion des Gebietes $D(m)$ mit dem Pol ∞. Weil m eine Teilmenge von M^* ist, so ist für $\pi = \infty$

$$g \geqq G^* = G. \tag{15}$$

Wäre nun in (15) das Gleichheitszeichen in einem Punkt gültig, so wäre dies überall in D der Fall. Dies ist aber unmöglich, weil die Funktion g in jedem zu m nicht gehörigen Punkt von M^* harmonisch und positiv ist, indem ein solcher Punkt zu $D(m)$ gehört, während dort die Funktion G^* die untere Grenze Null hat. Somit ist überall in D

$$g > G^*.$$

Für $x = \infty$ ergibt sich hieraus wegen (4) die Ungleichung

$$\tau(m) < \tau(M^*) = \tau(M), \tag{16}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Nach dem Obigen ist der transfinite Kern M^* einer Randmenge M identisch mit dem Durchschnitt sämtlicher abgeschlossener Teilmengen der Menge M, deren transfiniter Durchmesser gleich demjenigen von M ist.

Wir sprechen noch folgenden Satz aus, der sich auf beliebige beschränkte Punktmengen M und N bezieht.

9. Satz. *Ist* $\tau(N) > 0$, *so ist*

$$\tau(M + N) > \tau(N)$$

dann und nur dann, wenn der transfinite Kern von N *nicht eine Teilmenge des transfiniten Kerns von* $\bar{M}$ *ist. Ist aber* $\tau(N) = 0$, *so ist stets* $\tau(M + N) = \tau(M)$.

Hier bedeutet $\bar{M}$ bzw. $\bar{N}$ die komplementare Menge des durch M bzw. N bestimmten unendlichen Gebietes.

Einen Beweis für unseren Satz erhält man unmittelbar aus 8. Satz, wenn man bemerkt, dass[1]

$$\tau(M) = \tau(\bar{M}), \quad \tau(N) = \tau(\bar{N}).$$

Um eine genauere Kenntnis über die Struktur des transfiniten Kerns zu verschaffen, müssen wir die Grösse des transfiniten Durchmessers einer Punktmenge in ihrer Abhängigkeit von den anderen Massbestimmungen derselben genauer untersuchen.

§ 7. Zusammenhang zwischen dem transfiniten Durchmesser und den verschiedenen Massbestimmungen einer beschränkten Punktmenge.

18. Es sei $h(t)$ eine beliebige mit der reellen Variablen t stetig abnehmende positive Funktion.[2] Wir denken uns die Punkte der beschränkten Punktmenge M durch Kreise $\varkappa_n$ mit den Radien ϱ_n überdeckt und betrachten die Summe

$$\sum h(\varrho_n). \tag{17}$$

Wenn die Kreise $\varkappa_n$ in allen möglichen Weisen gewählt werden, erhält man unendlich viele Summen (17), welche eine nichtnegative untere Grenze

[1] Vgl. die S. 40 zitierte Arbeit von G. Szegö, S. 205, Fussnote 5.

[2] Eine vorläufige Mitteilung über die Resultate des vorliegenden Paragraphen findet man in unseren Noten:

L'existence de la fonction de Green pour un domaine plan donné. (Comptes rendus, t. 190 (1930)). *Bemerkung zur Theorie des transfiniten Durchmessers einer ebenen Punktmenge.* (Annales academiae scientiarum Fennicae, A. XXXIII (1930).)

$$\underline{\lim} \sum h(\varrho_n) = h(M)$$

besitzen. Diese Zahl wird im Folgenden als *h-Mass der Menge M* bezeichnet.

Speziell für $h(t) = t^\delta$ geht $h(M)$ in das *δ-dimensionale Mass* von M über, welches das lineare und das quadratische Mass als Spezialfall für $\delta = 1$ bzw. $\delta = 2$ enthält. Ferner wird aus $h(M)$ für $h(t) = \frac{1}{|\log t|}$ das *logarithmische Mass* der Menge M erhalten.

19. Es sei ferner $z(x)$ die Hauptuniformisierende des Gebietes $D(M)$, Γ ihre Gruppe. Dann ist

$$x = x(z)$$

eine automorphe Funktion von Γ, die jeden zu $D(M)$ gehörigen Wert im Fundamentalbereich genau einmal annimmt, die übrigen Werte dagegen auslässt. Man erhält somit die Gesamtheit der Wurzeln der Gleichung

$$x(z) = x_0, \tag{18}$$

wo x_0 irgend einen zu $D(M)$ gehörigen Punkt bezeichnet, aus $z = S(z_0)$, wo z_0 eine der Wurzeln bezeichnet, wenn S die Gesamtheit der Substitutionen von Γ durchläuft. Nach § 2 konvergiert die über die Wurzeln von (18) erstreckte Reihe

$$\sum (1 - |S(z_0)|) \tag{19}$$

dann und nur dann, wenn das Gebiet $D(M)$ Greensche Funktionen besitzt, oder was dasselbe ist, wenn der transfinite Durchmesser von M grösser als Null ist.

Andererseits ist nach Ahlfors[1] die Konvergenz der Reihe (19) für jeden Wert x_0 sichergestellt, sobald das h-Mass der Menge M grösser als Null ist für irgend eine h-Funktion, für welche das Integral

$$\int_0^k \frac{h(t)}{t}\, dt \qquad (k > 0) \tag{20}$$

endlich ist. Damit ist ein Beweis für den folgenden Satz geliefert, welcher eine

[1] L. Ahlfors: *Sur quelques propriétés des fonctions méromorphes.* (Comptes rendus, t. 190 (1930)). *Ein Satz von Henri Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen.* (Societas scientiarum Fennica, Commentationes V, 16 (1930).)

hinreichende Bedingung für die Existenz der Greenschen Funktionen im Gebiet $D(M)$ gibt.

10. Satz. *Ist das h-Mass der Menge M grösser als Null für eine h-Funktion, für welche das Integral (20) endlich ist, so ist der transfinite Durchmesser der Menge M von Null verschieden.*

Die für das Integral (20) aufgestellte Bedingung wird u. a. für die Funktionen

$$h(t) = t^{\delta} \qquad (\delta > 0); \qquad h(t) = \frac{1}{|\log t|^{1+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{21}$$

und allgemeiner

$$h(t) = \frac{1}{|\log t|\,|\log_2 t| \cdots |\log_n t|^{1+\eta}} \qquad (\eta > 0)$$

erfüllt. Wir wollen das die erste der Funktionen (21) betreffende Resultat durch einen besonderen Satz aussprechen.

11. Satz. *Wenn das δ-dimensionale Mass für irgend ein positives δ grösser als Null ist, so ist der transfinite Durchmesser der Menge grösser als Null.*

20. Ein Kriterium entgegengesetzter Richtung wird aus dem folgenden Satz von LINDEBERG[1] erhalten.

Wenn die Funktion u in einer Umgebung D_0 der Menge m ausserhalb derselben harmonisch und absolut beschränkt ist ($|u| \leqq k$), und wenn das logarithmische Mass von m Null ist, so ist u auch in den Punkten von m harmonisch.

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass m in dem Einheitskreise gelegen ist. Es sei ε eine gegebene kleine positive Zahl. Wir umschliessen die Punkte von m durch endlich viele kleine Kreise $\varkappa_n$ ($|t - a_n| = \varrho_n$) derart, dass

$$\sum \frac{1}{|\log \varrho_n|} < \varepsilon$$

und wir bezeichnen mit D_ε den ausserhalb der Kreise liegenden Teil von D_0. Der Rand von D_ε setzt sich aus dem Rand C von D_0 und den Kreisen $\varkappa_n$ oder von denselben gebildeten Linien zusammen, deren Gesamtheit wir mit C_ε bezeichnen. Man konstatiert unmittelbar, dass der Ausdruck

[1] J. W. LINDEBERG: *Sur l'existence des fonctions d'une variable complexe et des fonctions harmoniques bornées* (Annales Academiae scientiarum Fennicae, 11, N:o 6 (1918)).

$$w_\varepsilon = 2k \sum \frac{\log |t - a_i|}{\log \varrho_i} \tag{22}$$

eine Funktion auf D_ε definiert, die dort harmonisch und positiv ist und die ferner > 0 auf C und $> 2k$ auf C_ε ist.

Wir bilden ferner diejenige im Bereich D_0 harmonische Funktion v, deren Werte auf C mit denjenigen von u übereinstimmen. Dann ist $u - v$ eine im Bereiche D_ε harmonische Funktion, die $\leqq 2k$ auf C_ε und $= 0$ auf C ist. Hieraus folgt, dass in D_ε

$$|u - v| < w_\varepsilon \tag{23}$$

ist. Nun gehört jeder ausserhalb der Menge m liegende Punkt von D_0 für hinreichend kleine Werte von ε zu D_ε, und andererseits konvergiert der Wert von w_ε in diesem Punkt mit ε gegen Null. Hieraus folgt, dass $u = v$ ausserhalb der Menge m ist und es ist somit u auch in den Punkten von m harmonisch, w. z. b. w.

Nach den obigen Sätzen kann die Existenz der Greenschen Funktionen mit Hilfe der Massbestimmung des Randes bis auf Fälle erledigt werden, die einem verschwindend kleinen Intervall angehören. Unsere Kriterien versagen nämlich höchstens dann, wenn gleichzeitig

$$\lim \sum \frac{1}{|\log \varrho_n|^{1+\varepsilon}} = 0 \qquad \text{für jedes } \varepsilon > 0 \tag{24}$$

und

$$\lim \sum \frac{1}{|\log \varrho_n|} > 0. \tag{24'}$$

ist.

21. Es ist auf Grund der vorhergehenden Ergebnisse möglich, gewisse die Struktur des transfiniten Kernes betreffende Resultate herzuleiten.

Aus dem Satz von LINDEBERG folgt zunächst, dass das logarithmische Mass jeder abzählbaren Menge Null ist. Sind nämlich

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

die Punkte der abzählbaren Menge und wird allgemein a_n mit einem Kreis vom Radius $\varrho_n = e^{-\frac{n^2}{\varepsilon}}$ bedeckt, so wird

$$\sum \frac{1}{|\log \varrho_n|} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2 \varepsilon}{6},$$

wo die rechte Seite mit ε beliebig klein gewählt werden kann. Somit gilt der

12. Satz. *Der transfinite Kern jeder abzählbaren Punktmenge ist leer.*

Aus dem obigen Satz folgt, dass jeder Punkt des transfiniten Kerns ein Verdichtungspunkt der gegebenen Menge ist, d. h. dass es in jeder Umgebung desselben eine nichtabzählbare Teilmenge der gegebenen Menge gibt. Also:

Der transfinite Kern einer Menge ist eine Teilmenge des perfekten Kerns der Menge, d. i. der Menge der Verdichtungspunkte.

22. Dass der transfinite Kern im allgemeinen nicht mit dem perfekten Kern identisch ist, folgt daraus, dass es nichtabzählbare Mengen gibt, deren logarithmisches Mass Null ist, wie man z. B. aus dem folgenden Beispiel schliessen kann.

Es sei

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$$

zunächst eine beliebige monoton abnehmende unendliche Reihe von positiven Zahlen. Wir konstruieren zuerst konzentrisch mit der Strecke $(0, 1)$ eine Strecke von der Länge $1 - 2\Delta_1$, dann für die beiden Reststrecken von der Länge Δ_1 je eine konzentrische Strecke der Länge $\Delta_1 - 2\Delta_2$, für die erhaltenen vier Reststrecken der Länge Δ_2 hiernach je eine konzentrische Strecke der Länge $\Delta_2 - 2\Delta_3$ und so in inf. Beim n:ten Schritte sind dann 2^n Reststrecken mit der gemeinsamen Länge Δ_n vorhanden. Für $n \to \infty$ wird aus den Reststrecken eine Punktmenge M erhalten, die offenbar die Mächtigkeit des Kontinuums hat und für welche die untere Grenze der Summe in $(24)'$ gleich

$$\lim_{n \to \infty} 2^n \frac{1}{|\log \Delta_n|}$$

ist.

Wir wählen nun $\Delta_n = e^{-n 2^n}$ und haben

$$\lim_{n \to \infty} 2^n \frac{1}{|\log \Delta_n|} = 0,$$

d. h., das logarithmische Mass der Menge ist Null. Ihr transfiniter Kern ist somit leer, während der perfekte Kern mit der Menge selbst identisch ist.

23. Wir sprechen noch den folgenden Satz aus, der schon früher angewandt worden ist.

13. Satz. *Jedes in M enthaltene Kontinuum gehört dem transfiniten Kern von M zu.*

Ist nämlich P ein beliebiger Punkt des Kontinuums, so enthält jede Umgebung desselben ein Teilkontinuum von M und also eine Teilmenge von M, deren lineares Mass und somit auch transfiniter Durchmesser nach 10. Satz von Null verschieden ist. Ein solcher Punkt und folglich alle Punkte der in M enthaltenen Kontinua gehören also zum transfiniten Kern von M.

Aus dem Obigen folgt insbesondere, *dass sämtliche innere Punkte einer Menge M dem transfiniten Kern der Menge angehören.*

Wir haben im Vorhergehenden nur beschränkte Punktmengen der schlichten Ebene betrachtet. Es ist jedoch möglich, analoge Definitionen und Sätze für allgemeinere Punktmengen aufzustellen.

Betrachten wir zuerst eine Punktmenge M der schlichten Ebene, die den unendlich fernen Punkt enthält. Um den Begriff der Klasse auch für diesen Punkt zu definieren, denken wir uns eine Umgebung U desselben konform auf einen endlichen schlichten Bereich A abgebildet, wodurch die in U enthaltene Teilmenge von M in eine beschränkte in A liegende Menge m transformiert wird, die den endlichen Bildpunkt Q des unendlich fernen Punktes enthält. Wir wollen die Klasse des unendlich fernen Punktes in der Menge M durch die Klasse des Bildpunktes Q in der Menge m definieren, wodurch der Begriff des transfiniten Kerns auch für unendliche Punktmengen der schlichten Ebene definiert wird. Zu bemerken ist, dass die obige Definition von der speziellen Wahl der angewandten Abbildung unabhängig ist. Denn hat man durch zwei verschiedene Abbildungen zwei Bereiche A_1 und A_2 erhalten, so hat man zwischen denselben eine Beziehung der in N:o 10 untersuchten Art, woraus folgt, dass zwei einander entsprechende Punkte stets einer und derselben Klasse angehören.

In der gleichen Weise kann man den Begriff der Klasse auf algebraische Windungspunkte einer Riemannschen Fläche übertragen, wodurch der transfinite Kern für jede Punktmenge einer Riemannschen Fläche definiert wird, deren sämtliche Punkte innere Punkte der Fläche sind. Wegen der funktionentheoretischen Anwendungen muss man aber auch solche Punktmengen auf Riemannschen Flächen berücksichtigen, die reale oder ideale Randpunkte der Fläche enthalten. Dies soll im folgenden Kapitel näher besprochen werden.

III. Mehrblättrige Gebiete.

§ 8. Existenz der Greenschen Funktionen auf mehrblättrigen Riemannschen Flächen.

24. Nachdem wir im Vorhergehenden die schlichten Gebiete hinsichtlich der Existenz der Greenschen Funktionen ausführlich behandelt haben, erübrigt es noch, die erhaltenen Resultate auf mehrblättrige Gebiete, d. h. beliebige Riemannsche Flächen zu übertragen. Hier kommen nur die offenen Flächen in Betracht, weil auf geschlossenen Riemannschen Flächen ersichtlich keine Greenschen Funktionen existieren können. Nach der Uniformisierungstheorie ist es bekanntlich gleichgültig, ob die fragliche Riemannsche Fläche geometrisch oder durch Angabe einer zugehörigen mehrdeutigen analytischen Funktion

$$y = y(x)$$

definiert ist.

Unsere Methode ist am nächsten auf solche Riemannsche Flächen F beliebigen Geschlechtes anwendbar, welche in einer anderen umfassenderen Riemannschen Fläche F' als echte Teilflächen enthalten sind derart, dass die gegebene Riemannsche Fläche F ein nicht leeres System von Randpunkten hat, welche innere Punkte der Fläche F' sind. Zweck der folgenden Betrachtungen ist, einen Beweis für den folgenden Satz zu geben, welcher einen Teil des Szegöschen Satzes in N:o 11 auf Riemannsche Flächen überträgt.

14. Satz. *Ist der transfinite Kern der Menge M der zum Inneren von F' gehörigen Randpunkte der Riemannschen Fläche F nicht leer, so gibt es auf F Greensche Funktionen.*

25. Wir konstruieren für F' die relativ unverzweigte Überlagerungsfläche U, die wir vermittels der Hauptuniformisierenden $z(x)$ auf das Innere des Hauptkreises

$$|z| = 1 \qquad : H$$

konform abbilden. Es seien

$$S_0 = 1, \ S_1, \ S_2, \ S_3, \ldots \tag{1}$$

die Substitutionen der zur polymorphen Funktion $z(x)$ gehörigen Gruppe Γ und B ein Fundamentalbereich von Γ. Der Punktmenge M entspricht im

Bereich B eine Punktmenge m, von der wir ohne Einschränkung annehmen können, dass sie als Ganzes dem Innern von B angehört. Dann haben die unendlich vielen transformierten Mengen

$$S_k(m) \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

keine gemeinsamen Punkte.

Wir denken uns jetzt, an eine Idee von JOHANSSON[1] anknüpfend, in B eine unendliche Folge von Systemen regulärer und geschlossener Kurven

$$K_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

in folgender Weise konstruiert.

1) Die Kurven des Systems K_μ begrenzen mit H zusammen einen Bereich ω_μ.

2) Für jedes μ ist ω_μ ein Teilbereich von $\omega_{\mu+1}$.

3) ω_μ geht für $\mu \rightarrow \infty$ in den Komplementarbereich von m in bezug auf das Innere von H über.

Es sei allgemein

$$K_\mu^{(\varrho)} \tag{4}$$

das aus (3) durch S_ϱ erhaltene Kurvensystem. Die unendlich vielen Kurvensysteme (4) für $\varrho = 0, 1, 2, \ldots$, begrenzen zusammen mit H einen ∞-fach zusammenhängenden Bereich Ω_μ. Dabei ist allgemein Ω_μ ein Teilbereich von $\Omega_{\mu+1}$ und ferner geht Ω_μ für $\mu \rightarrow \infty$ in denjenigen Bereich Ω über, der von der Gesamtheit der Punktmengen (2) und H begrenzt wird.

Der nächste Zweck unserer Betrachtungen ist, die Existenz einer in Ω_μ harmonischen Funktion u_μ nachzuweisen, die in einem gegebenen Punkt z_0 wie $\log \frac{1}{|z - z_0|}$ unstetig ist, die ferner auf allen Kurven (4) verschwindet und für $|z| \rightarrow 1$ gleichmässig gegen Null konvergiert.

26. Wir gehen zu diesem Zweck von demjenigen Bereich $\Omega_\mu^{(\lambda)}$ aus, der aus Ω_μ erhalten wird, wenn man davon die ausserhalb des Kreises

$$|z| = R_\lambda < 1 \qquad (R_\lambda < R_{\lambda+1}, \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_\lambda = 1) \tag{5}$$

liegenden Kurven (4) fortlässt.

Der Bereich $\Omega_\mu^{(\lambda)}$, der von endlich vielen regulären geschlossenen Kurven be-

[1] Vgl. die S. 41 zitierte Arbeit.

grenzt ist, besitzt eine Greensche Funktion mit dem im Bereiche Ω_μ gewählten Pol z_0, die wir mit $u_\mu^{(\lambda)}$ bezeichnen. Weil allgemein $\Omega_\mu^{(\lambda+1)}$ ein Teilbereich von $\Omega_\mu^{(\lambda)}$ ist, so ist

$$u_\mu^{(\lambda)} > u_\mu^{(\lambda+1)}. \tag{6}$$

Andererseits ist jede der Funktionen

$$u_\mu^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7}$$

in dem in Ω_μ gelegenen Kreise $|z - z_0| = k$ grösser als die Greensche Funktion

$$\log \frac{k}{|z - z_0|}$$

dieses Kreises. Nach dem Harnackschen Prinzip konvergiert daher die Reihe der Funktionen (7) in Ω_μ gleichmässig gegen eine Funktion

$$\lim_{\lambda \to \infty} u_\mu^{(\lambda)} = u_\mu(z, z_0) = u_\mu, \tag{8}$$

die ersichtlich den am Schlusse der N:25 aufgestellten Bedingungen genügt. Man erkennt in (8) unmittelbar die Greensche Funktion des Gebietes Ω_μ mit dem Pol z_0.

Daraus, dass Ω_μ ein Teilbereich von $\Omega_{\mu+1}$ ist, folgt, dass

$$u_\mu < u_{\mu+1}. \tag{9}$$

Ferner gilt für jede Substitution S von Γ die Gleichung

$$u_\mu(z, S(z_0)) = u_\mu(S^{-1}(z), z_0), \tag{10}$$

weil die beiden Seiten der Gleichung eine und dieselbe Funktion, nämlich die Greensche Funktion von Ω_μ mit dem Pol $S(z_0)$, repräsentieren.

27. Wir definieren jetzt die unendliche Reihe wachsender, in Ω_μ ausserhalb der Punkte

$$S(z_0) \tag{11}$$

positiver harmonischer Funktionen

$$W_\mu^{(1)},\ W_\mu^{(2)},\ W_\mu^{(3)}, \ldots \tag{12}$$

durch den Ausdruck

$$W_\mu^{(n)} = \sum_{\Omega_\mu^{(n)}} u_\mu(z, S_\varrho^{-1}(z_0)), \tag{13}$$

wo die Summierung sich über die Gesamtheit der Substitutionen S_ϱ von Γ erstreckt, für welche die Kurven

$$S_\varrho(K_\mu) = K_\mu^{(\varrho)} \tag{14}$$

dem Rand von $\Omega_\mu^{(n)}$ angehören. Zweck der folgenden Betrachtungen ist nachzuweisen, dass die Funktionen (12) gegen eine harmonische Funktion konvergieren.

Wir umschliessen das Kurvensystem K_μ mit einer regulären, innerhalb B liegenden den Pol z_0 ausschliessenden geschlossenen Kurve C. Es sei v diejenige in dem von K_μ und C begrenzten Bereich D_μ harmonische Funktion, die $= 1$ auf K_μ und $= 0$ auf C ist. Durch Anwendung der Greenschen Formel auf die Funktionenpaare

$$u_\mu^{(n)},\ v \text{ bzw. } u_\mu,\ v$$

erhält man die Gleichungen

$$\int\limits_{K_\mu} \frac{\partial u_\mu^{(n)}}{\partial \nu}\, d\sigma = \int\limits_{C} u_\mu^{(n)} \frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma, \quad \int\limits_{K_\mu} \frac{\partial u_\mu}{\partial \nu}\, d\sigma = \int\limits_{C} u_\mu \frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

wo $d\sigma$ das Bogenelement der betreffenden Kurve und ν die in das Innere von D_μ gezogene Normale bezeichnet. Hieraus folgt

$$\int\limits_{K_\mu} \left(\frac{\partial u_\mu^{(n)}}{\partial \nu} - \frac{\partial u_\mu}{\partial \nu} \right) d\sigma = \int\limits_{C} (u_\mu^{(n)} - u_\mu) \frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma. \tag{15}$$

Weil nun auf C

$$u_\mu^{(n)} > u_\mu, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} > 0, \tag{16}$$

so ist

$$\int\limits_{K_\mu} \frac{\partial u_\mu^{(n)}}{\partial \nu}\, d\sigma > \int\limits_{K_\mu} \frac{\partial u_\mu}{\partial \nu}\, d\sigma. \tag{17}$$

Diese Ungleichung behält ihre Gültigkeit, wenn K_μ durch ein beliebiges zum Rand von $\Omega_\mu^{(n)}$ gehöriges Bild (14) von K_μ ersetzt wird. Aus den endlich vielen so erhaltenen Ungleichungen leiten wir durch Addition die Ungleichung

$$\sum_{\Omega_\mu^{(n)}} \int\limits_{K_\mu^{(\varrho)}} \frac{\partial u_\mu^{(n)}}{\partial \nu}\, d\sigma > \sum_{\Omega_\mu^{(n)}} \int\limits_{K_\mu^{(\varrho)}} \frac{\partial u_\mu}{\partial \nu}\, d\sigma. \tag{18}$$

her.

Nun ist die rechte Seite von (18) wegen (10) gleich

$$\sum_{\varrho} \int_{K_\mu} \frac{\partial u_\mu(z, S_\varrho^{-1}(z_0))}{\partial \nu} d\sigma = \int_{K_\mu} \frac{\partial W_\mu^{(n)}}{\partial \nu} d\sigma. \tag{19}$$

Ferner ist nach einem bekannten Satz über die Greenschen Funktionen

$$\sum_{\varrho_\mu^{(n)}} \int_{K_\mu^{(\varrho)}} \frac{\partial u_\mu^{(n)}}{\partial \nu} d\sigma < 2\pi. \tag{20}$$

Aus (18), (19) und (20) folgt

$$\int_{K_\mu} \frac{\partial W_\mu^{(n)}}{\partial \nu} d\sigma < 2\pi. \tag{21}$$

Durch eine neue Anwendung der Greenschen Formel im Bereich D_μ, diesmal auf die Funktionen

$$W_\mu^{(n)}, \quad v,$$

erhält man, weil $W_\mu^{(n)}$ auf K_μ verschwindet, die Gleichung

$$\int_{K_\mu} \frac{\partial W_\mu^{(n)}}{\partial \nu} d\sigma = \int_{C} W_\mu^{(n)} \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma. \tag{22}$$

Es sei nun $\varDelta$ ein Bogen von C, wo

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} > q > 0.$$

Hieraus und aus (21) und (22) folgt dann für das positive Minimum von $W_\mu^{(n)}$ auf $\varDelta$ die Ungleichung

$$q \varDelta (W_\mu^{(n)})_{\min.} < 2\pi.$$

Nun ist nach dem Harnackschen Prinzip auf $\varDelta$

$$W_\mu^{(n)} < k(W_\mu^{(n)})_{\min.},$$

wo k eine von n unabhängige Konstante bezeichnet. Wegen der obigen Ungleichungen gilt somit auf jedem Punkt von $\varDelta$ die Ungleichung

$$W_\mu^{(n)} < \frac{2\pi k}{q\varDelta}. \tag{23}$$

Weil demnach die Reihe (12) in den Punkten von Δ beschränkt bleibt, muss sie nach einem bekannten Satz von Harnack in jedem inneren Teilbereich von Ω_μ gleichmässig gegen eine harmonische Funktion W_μ konvergieren.

Man konstatiert unmittelbar, dass die Funktion W_μ im Bereich Ω_μ harmonisch ist, von den Punkten

$$S_\varrho(z) \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots) \tag{24}$$

abgesehen, wo sie logarithmisch unendlich wird. Sie ist positiv in jedem inneren Punkt und gleich Null in jedem Randpunkt von Ω_μ. Aus (13) ergibt sich ferner für W_μ in Ω_μ die Darstellung

$$W_\mu = \sum u_\mu(z, S(z_0)), \tag{25}$$

wo die Summierung über die Gesamtheit der Substitutionen von Γ zu erstrecken ist. Hieraus geht hervor, dass W_μ ein automorphes Potential von Γ ist, weil bei Ausführung irgend einer Substitution von Γ nur die Glieder von (25) miteinander permutiert werden, was auf die Summe der absolut konvergenten Reihe keinen Einfluss hat. Schliesslich ist allgemein

$$W_\mu < W_{\mu+1}, \tag{26}$$

weil wegen (9) jedes Glied von (25) kleiner als das entsprechende Glied in der Reihe von $W_{\mu+1}$ ist.

28. Wir betrachten schliesslich die unendliche Reihe der Funktionen

$$W_1,\ W_2,\ W_3, \ldots \tag{27}$$

und behaupten, dass sie in jedem inneren Teilbereich von Ω gleichmässig gegen eine harmonische Grenzfunktion konvergiert.

Es sei a ein Punkt ausserhalb der um das Kurvensystem K_μ beschriebenen geschlossenen Kurve C und g_μ die Greensche Funktion mit dem Pol a für dasjenige unendliche Gebiet, das von dem Kurvensystem K_μ begrenzt wird. Ferner sei h_μ diejenige innerhalb und auf C harmonische Funktion, deren Werte auf C mit denjenigen von g_μ übereinstimmen. Dann ist

$$\varphi_\mu = h_\mu - g_\mu \tag{28}$$

eine in dem von K_μ und C begrenzten Bereich D_μ harmonische Funktion, die auf C verschwindet. Weil $g_\mu > 0$ auf C ist, so ist $h_\mu > 0$ auf C und somit auch im Innern von C. Weil somit auf den Kurven K_μ

$$g_\mu = 0, \quad h_\mu > 0, \tag{29}$$

so ist auf denselben und innerhalb des Bereichs D_μ

$$\varphi_\mu > 0. \tag{29'}$$

Nun konvergiert die unendliche Reihe der Greenschen Funktionen

$$g_1, g_2, g_3, \ldots \tag{30}$$

gegen die Greensche Funktion g des Komplementargebietes der Punktmenge m in bezug auf die ganze Ebene, welche Funktion wirklich existiert, weil der transfinite Kern der Menge m nach N: 10 nicht leer ist wenn dies, wie angenommen, mit M der Fall ist. Daraus folgt, dass die Reihe der Funktionen

$$h_1, h_2, h_3, \ldots \tag{31}$$

gleichmässig gegen diejenige innerhalb und auf C positive harmonische Funktion h konvergiert, deren Randwerte auf C mit denjenigen von g übereinstimmen. Es existiert dann auch die Grenzfunktion

$$\varphi = \lim_{\mu \to \infty} \varphi_\mu, \tag{32}$$

welche nicht identisch Null sein kann, weil die untere Grenze von g in jeder Umgebung von m nach 4. Satz Null ist, während h dort positiv ist.

29. Es sei q das endliche gemeinsame Maximum von g und h auf C. Weil auf der Kurve C

$$g_\mu < g, \quad h_\mu = g_\mu, \tag{33}$$

so ist

$$h_\mu < q$$

auf C und somit auch im Innern von C. Mithin ist im Bereich D_μ

$$0 < \varphi_\mu < q. \tag{34}$$

Nun ist

$$\int_C \frac{\partial h_\mu}{\partial \nu} d\sigma = 0, \tag{35}$$

weil h_μ innerhalb und auf C harmonisch ist, ferner ist

$$\int_C \frac{\partial g_\mu}{\partial \nu} d\sigma = -2\pi, \tag{36}$$

weil der Pol von g_μ ausserhalb C liegt. Aus (35) und (36) folgt

$$\int_C \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \nu} d\sigma = \int_C \frac{\partial h_\mu}{\partial \nu} d\sigma - \int_C \frac{\partial g_\mu}{\partial \nu} d\sigma = 2\pi.$$

Indem wir zur Reihe (27) zurückkehren, wenden wir die Greensche Formel auf die Funktionen

$$W_\mu, \ \varphi_\mu$$

in Bereich D_μ an. Weil

$$\varphi_\mu = 0 \text{ auf } C \text{ und } W_\mu = 0 \text{ auf } K_\mu,$$

so ergibt sich

$$\int_C W_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \nu} d\sigma = \int_{K_\mu} \varphi_\mu \frac{\partial W_\mu}{\partial \nu} d\sigma. \tag{37}$$

Wegen (21) ist

$$\int_{K_\mu} \frac{\partial W_\mu}{\partial \nu} d\sigma \leqq 2\pi$$

und also, wegen (34)

$$\int_{K_\mu} \varphi_\mu \frac{\partial W_\mu}{\partial \nu} d\sigma \leqq 2\pi q.$$

Hieraus und aus (37) folgt

$$\int_C W_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \nu} d\sigma \leqq 2\pi q. \tag{38}$$

Würde nun W_μ für $\mu \to \infty$ in einem einzigen Punkt von C gegen ∞ konvergieren, so wäre nach dem Harnackschen Prinzip gleichmässig auf C

$$\lim_{\mu \to \infty} W_\mu = \infty .$$

Dies widerspricht aber der Ungleichung (38), weil auf C

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \lim_{\mu \to \infty} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \nu} > 0.$$

Folglich muss die Reihe (27) in jedem inneren Teilbereich von Ω gleichmässig gegen eine harmonische Funktion

$$\lim_{\mu \to \infty} W_\mu = W \tag{39}$$

konvergieren.

Aus dem Obigen geht hervor, dass W ein automorphes Potential von Γ ist, das ausserhalb der Menge m und ihrer Transformierten positiv und harmonisch ist, von den Punkten (11) abgesehen, wo sie logarithmisch unstetig wird Auf die Fläche F übertragen ist W eine eindeutige Funktion, die positiv und ausserhalb ihres Poles, dem Bildpunkt P von z_0, harmonisch ist. Auf Grund der Entwickelungen der N:o 1 kann man aus dem Obigen leicht den Schluss ziehen, dass W eine Greensche Funktion von F ist. Jedenfalls ist die Existenz der Greenschen Funktionen auf F nach § 3 schon dadurch gesichert, dass W eine von unten beschränkte harmonische Funktion ist. Damit ist der Beweis des 14. Satzes zum Abschluss gebracht.

30. Über das Verhalten der Greenschen Funktionen in den Randpunkten M gilt der 5. Satz als solcher, wie leicht zu bestätigen ist. Wir wollen hier noch zeigen, dass *auf jeder der Bedingung des 14. Satzes genügenden Riemannschen Fläche, welche Greensche Funktionen besitzt, zugleich absolut beschränkte harmonische Funktionen existieren.*

Wir zerlegen zu diesem Zweck die Menge M in zwei zueinander fremde Teile M_1 und M_2 derart, dass die transfiniten Kerne der beiden Teilmengen nicht leer sind. Es seien F_1 und F_2 diejenigen Teilflächen von F', welche aus F erhalten werden, wenn man die Menge M durch M_1 bzw. M_2 ersetzt. Beide Flächen F_1, F_2 haben nach 14. Satz Greensche Funktionen.

Es seien nun G_1 und G_2 die Greenschen Funktionen von F_1 bzw. F_2 mit einem gemeinsamen Pol P. Wir bilden dann die Funktion

$$G_1 - G_2. \tag{40}$$

Nach N:o 2 ist sie ausserhalb des Poles in F absolut beschränkt und harmonisch. Dies ist aber auch im Punkte P der Fall, weil die logarithmischen Singularitäten der beiden Bestandteile einander dort aufheben. Die Funktion (40) ist somit eine auf der ganzen Fläche F absolut beschränkte harmonische Funktion. Sie kann sich nicht auf eine Konstante reduzieren, weil die untere Grenze derselben nach 5. Satz in jedem Punkt von M_2 positiv, in jedem Punkt von M_1 dagegen negativ ist.

§ 9. Anwendung der konformen Abbildung.

31. Durch den 14. Satz wird die Frage nach der Existenz von Greenschen Funktionen nur für eine besondere Klasse von Flächen gelöst. Um allgemeinere Resultate zu gewinnen, muss man sich konformer Abbildungen bedienen.

Beachtet man, dass bei Ausführung einer konformen Abbildung die Greenschen Funktionen invariant bleiben, so gelangt man zur folgenden Verallgemeinerung unseres 14. Satzes.

15. Satz. *Wenn es möglich ist, die Riemannsche Fläche F konform auf eine echte Teilfläche Φ einer zweiten Riemanschen Fläche Φ' abzubilden, und wenn der transfinite Kern der Menge N der zum Innern von Φ' gehörigen Randpunkte von Φ nicht leer ist, so besitzt die Fläche F Greensche Funktionen.*

Betrachten wir etwas näher zuerst den Fall, wo das Geschlecht p von F Null ist. In diesem Fall kann F konform auf ein schlichtes Gebiet Φ abgebildet werden und Φ' reduziert sich auf eine Vollebene. Jetzt wird die Frage nach der Existenz der Greenschen Funktionen durch die Sätze des II Kapitels gelöst. Speziell im Falle einer einfach zusammenhängenden Fläche kann man als Gebiet Φ entweder eine Kreisfläche oder eine punktierte Ebene wählen und die Fläche F hat somit Greensche Funktionen, oder nicht, je nachdem ob der erste oder der zweite Fall vorliegt. Doch begegnet selbst in diesem einfachsten Fall die wirkliche Ausführung der fraglichen konformen Abbildung im allgemeinen unüberwindlichen Schwierigkeiten.

32. Man kann die obigen Betrachtungen auch auf Riemansche Flächen höheren Geschlechtes übertragen, wenn man sich des in der Einleitung[1] erwähnten Satzes von Koebe bedient, wonach jedes schlichtartige Gebiet auf ein schlichtes Gebiet konform abgebildet werden kann.

[1] Fussnote 2, S. 41.

Wir denken uns zu diesem Zweck die gegebene Riemannsche Fläche F durch ein System von Rückkehrschnitten (R_ν), deren Anzahl gleich dem Geschlecht p der Fläche ist, in wohlbekannter Weise in eine schlichtartige Fläche $\overline{F}$ verwandelt, d. h. eine Fläche, welche wie jedes schlichte Gebiet durch jeden neuen Rückkehrschnitt zerstückelt wird. Nach dem genannten Koebeschen Abbildungssatz ist es möglich, die geschnittene Fläche $\overline{F}$ konform auf ein schlichtes Gebiet $\overline{D}$ abzubilden, wo jedem Rückkehrschnitt R_ν ein Paar geschlossener Kurven $(C_\nu,\ C'_\nu)$ entspricht, die durch analytische Transformationen umkehrbar eindeutig einander bezogen sind. Indem wir die einander paarweise konjugierten Punkte der zugeordneten Kurven als identisch betrachten, wird aus dem Gebiet $\overline{D}$ eine ideale Riemannsche Fläche D erhalten, deren Punkte durch die ausgeführte konforme Abbildung den Punkten der gegebenen Riemannschen Fläche F umkehrbahr eindeutig entsprechen.

Der Rand von $\overline{D}$ besteht im allgemeinen aus einer Menge M ausserhalb der Kurven $(C_\nu,\ C'_\nu)$ liegender Punkte, ferner (für $p > 0$) aus den Kurven $(C_\nu,\ C'_\nu)$ und (für $p = \infty$) aus der Menge $\widehat{M}$ der Häufungsstellen der Kurven $(C_\nu,\ C'_\nu)$. Der Rand der zugeordneten idealen Riemannschen Fläche $\overline{D}$ besteht dann aus der Menge $M + \widehat{M}$.

Wir erweitern jetzt das Gebiet $\overline{D}$, vorausgesetzt, dass M nicht leer ist, indem wir zu $\overline{D}$ die Gesamtheit der Punkte von M adjungieren. Aus dem neuen Gebiet $\overline{D}'$ ergibt sich in der oben angegebenen Weise eine ideale Riemannsche Fläche D', die durch das System der Kurven $(C_\nu,\ C'_\nu)$ mit den zugehörigen Bezugstransformationen definiert wird. (Im Falle $p = 0$ reduziert sich D' auf die Vollebene.)

33. Wir denken uns jetzt die ideale Riemannsche Fläche D' auf eine gewöhnliche Riemannsche Fläche Φ' konform abgebildet. Dabei geht D in eine Teilfläche Φ von Φ' über. Den Punkten M entsprechen gewisse Randpunkte von Φ, welche innere Punkte von Φ' sind. Ihre Menge sei N.

Durch Ausführung der beiden konformen Abbildungen, nämlich der Koebeschen und der zuletzt besprochenen, haben wir die gegebene Riemannsche Fläche F auf eine neue Fläche Φ überführt, auf dem der 14. Satz anwendbar ist, wenn der transfinite Kern der Menge N oder, was ersichtlich dasselbe bedeutet, wenn derjenige von M nicht leer ist. Wir können daher den folgenden Satz aussprechen.

16. Satz. *Wenn der transfinite Kern der bei der Koebeschen Abbildung erhaltenen Randmenge M nicht leer ist, so gibt es auf F Greensche Funktionen.*

Diese Bedingung ist zur Existenz von Greenschen Funktionen auch notwendig, wenn das Geschlecht der Fläche F endlich ist.

Zum Beweis des letzten Teiles des Satzes bemerken wir, dass Φ' bei endlichem p eine algebraische Fläche ist. Wäre der transfinite Kern der Menge M und somit auch der Menge N leer, so wäre jede Greensche Funktion von Φ nach dem 2. Satz auch in den Punkten von N und also überall auf der algebraischen Fläche Φ' ausserhalb des Poles harmonisch, was unmöglich ist.

Die obige Schlussweise ist nicht mehr richtig, wenn das Geschlecht von F unendlich ist. Auch jetzt ist jede Greensche Funktion von Φ in den Punkten N harmonisch und folglich zugleich eine Greensche Funktion der Fläche Φ'. Dass diese Möglichkeit wirklich existieren kann, soll an einem Beispiel gezeigt werden.

§ 10. Beispiel einer nichtfortsetzbaren Fläche.

34. Es sei D ein schlichtes Gebiet der x-Ebene und M die Menge seiner Randpunkte. Wir konstruieren in bekannter Weise eine analytische Funktion $f(x)$, welche innerhalb D regulär ist und dort unendlich viele einfache Nullstellen besitzt, die jeden Punkt von M zur Häufungsstelle haben. Die Gleichung

$$y^2 = f(x) \tag{41}$$

stellt dann eine transzendente hyperelliptische Fläche f dar, die Windungspunkte erster Ordnung in den Nullstellen der Funktion $f(x)$ besitzt.

Wir beweisen jetzt den Satz:

Die hyperelliptische Fläche (41) *besitzt Greensche Funktionen dann und nur dann, wenn der transfinite Kern der Menge M nicht leer ist.*

Es sei der transfinite Kern von M nicht leer. Es seien $x = a$ und $x = b$ zwei beliebige Punkte von D und

$$G(a, x), \quad G(b, x)$$

die Greenschen Funktionen von D mit den genannten Polen. Die Funktion

$$G(a, x) - G(b, x) - \log|x - a| + \log|x - b|$$

ist dann auf D und somit auch auf f eine nichtkonstante, absolut beschränkte harmonische Funktion. Nach dem 1. Satz besitzt somit die Fläche (41) Greensche Funktionen.

Es sei umgekehrt eine Greensche Funktion $g(x_0, y_0)$ von f mit dem Pol (x_0, y_0) vorhanden. Wir betrachten die Funktion

$$\frac{1}{2}[g(x_0, y_0)+g(x_0, -y_0)].$$

Sie ist offenbar harmonisch und positiv im Gebiet D und im Punkte x_0 logarithmisch unstetig. Nach dem 1. Satz besitzt somit D Greensche Funktionen und der transfinite Kern von M kann daher nach dem Satz von SZEGÖ nicht leer sein. Unser Satz ist damit bewiesen.

35. Wir teilen mit RADO[1] die Gesamtheit der Riemannschen Flächen in fortsetzbare und nichtfortsetzbare ein, je nachdem ob es möglich ist oder nicht, die gegebene Riemannsche Fläche auf eine echte Teilfläche einer anderen Riemannschen Fläche konform abzubilden. Nach DE POSSEL[2] ist eine Riemannsche Fläche dann und nur dann fortsetzbar, wenn die bei der Koebeschen Abbildung erhaltene Menge M nicht leer ist. Durch Übergang zu den Flächen Φ, Φ' hat man eine konforme Abbildung der gegebenen fortsetzbaren Riemannschen Fläche F auf eine echte Teilfläche Φ der nichtfortsetzbaren Riemannschen Fläche Φ' geleistet.

Das obige Beispiel der hyperelliptischen Fläche gibt, wie leicht einzusehen, eine nichtfortsetzbare Riemannsche Fläche. Bemerkenswert ist nach dem Obigen, *dass es unter den transzendenten nichtfortsetzbaren Riemannschen Flächen sowohl Flächen mit Greenschen Funktionen als solche gibt, die keine Greenschen Funktionen besitzen.* Auf eine nähere Unterscheidung der beiden Möglichkeiten können wir hier nicht näher eingehen.

[1] T. RADO: *Über eine nichtfortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit* (Math. Zeitschr. 20 (1924)).

[2] DE POSSEL: *Sur le prolongement des surfaces de Riemann* (Comptes rendus, Tome 187 1928).

Vgl. auch S. BOCHNER, *Fortsetzung Riemannscher Flächen* (Mathematische Annalen, Bd. 98).