

ÜBER EIN HILFSMITTEL ZUR GEOMETRISCHEN BEHANDLUNG DER PICARDITERATION¹.

VON

THEODOR ZECH

in DARMSTADT.

1. **Vorbemerkungen.** Unter den Fällen, in denen die von Picard² zum Existenzbeweis benutzte und später u. a. von Lindelöf³ und Bendixson⁴ bearbeitete Iteration bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1) \quad \dot{x} = g(t, x) \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt} \right)$$

zur Lösung führt, sind zwei besonders wichtig: 1. Die rechte Seite $g(t, x)$ ist stetig und genügt einer Lipschitzbedingung; 2. die rechte Seite ist stetig und in x monoton wachsend. Der erste, von Picard betrachtete Fall ist bekannter. Der zweite, von Bendixson untersuchte ist dem unmittelbaren Verständnis zugänglicher. Es liegt nahe, die Monotonievoraussetzung von Bendixson geometrisch zu deuten. Wir werden das tun und hauptsächlich geometrisch einen dem Bendixsonschen ähnlichen Satz beweisen. Die dazu nötigen Überlegungen führen wir so, dass sie sich auch für weitere Klassen von Differentialgleichungen, z. B. die unter 1. genannten, abändern lassen. Unsere Absicht ist dabei, einen Standpunkt zur einheitlichen Betrachtung verschiedener bisher getrennt untersuchter Konvergenzfälle zu gewinnen und für sie einheitliche anschauliche Aufschlüsse über das Zustandekommen der Konvergenz zu erhalten.

Uns interessiert nur das Iterationsverfahren an sich, keine etwa möglichen Anwendungen zu Existenzaussagen. Wir können daher von den bekannten Existenzsätzen über Lösungen von Differentialgleichungen mit stetiger rechter Seite unbehindert Gebrauch machen.

Als wesentlichstes Hilfsmittel wird uns der Begriff des »Schattens« einer Kurve dienen. Wir verstehen darunter einen von der jeweils vorliegenden Differentialgleichung abhängenden Bereich, in den die Kurve eingebettet ist. Weil er für eine Lösung der Differentialgleichung nur die Lösungskurve selbst enthält, bei Nicht-Lösungen aber flächenhaft ausfällt, kann er als *Gütekennzeichen* für Näherungskurven dienen; wir werden eine Näherung besser als eine andere nennen dürfen, wenn ihr Schatten ganz in den der zweiten hineinfällt. Es wird sich zeigen, dass, von diesem Standpunkt gesehen, der Picardsche Iterationsschritt jede Näherungskurve *verbessern* muss oder sie wenigstens nicht verschlechtern kann.

2. **Allgemeine Voraussetzungen. Bezeichnungen.** Wir betrachten in der ganzen vorliegenden Arbeit die Differentialgleichung

$$(1) \quad \dot{x} = g(t, x)$$

in einem Streifen

$$0 \leq t \leq t_0 \quad (t_0 > 0)$$

der t, x -Ebene; wir nehmen t_0 der Einfachheit halber endlich an, obwohl $t_0 = \infty$ nirgends grosse Schwierigkeiten machen würde. Als Anfangsbedingung nehmen wir immer

$$(2) \quad x = 0 \quad \text{bei} \quad t = 0.$$

Die Picardsche Iteration besteht für (1) und (2) bekanntlich in fortgesetzter Anwendung der Formel

$$(3) \quad x_{n+1}(t) = \int_0^t g[\tau, x_n(\tau)] d\tau.$$

Ausgehend von einer Anfangsnäherung $x_0(t)$, bei Picard $x_0(t) \equiv 0$, erhält man mittels (3) für $n = 0, 1, 2, \dots$ eine Folge

$$(4) \quad x_0(t), x_1(t), x_2(t), \dots$$

von Näherungskurven (Picardfolge). Unter gewissen Umständen konvergiert die Folge (4) gegen eine Lösung $X(t)$ von (1) und (2).

Unsere Aufgabe wird also darin bestehen, gewisse Eigenschaften der Funktionaltransformation

$$x^*(t) = \int_0^t g[\tau, x(\tau)] d\tau$$

oder kurz

$$(5) \quad x^*(t) = \mathfrak{P} \{x(t)\}$$

geometrisch zu untersuchen. Wir bezeichnen $x^*(t)$ als »Picarditerierte« oder »Picardverwandelte« von $x(t)$. Den Bereich der »unabhängigen Funktion« $x(t)$ schränken wir für unsere Untersuchung stark ein. Um die Ausführbarkeit der Transformation (5) zu sichern, ist es bequem und ausreichend, $x(t)$ als stetig vorauszusetzen. Diese Voraussetzung machen wir immer stillschweigend, auch wenn im folgenden von einer »beliebigen« Kurve (bzw. Näherung) $x(t)$, $x_0(t)$ usw. die Rede ist.

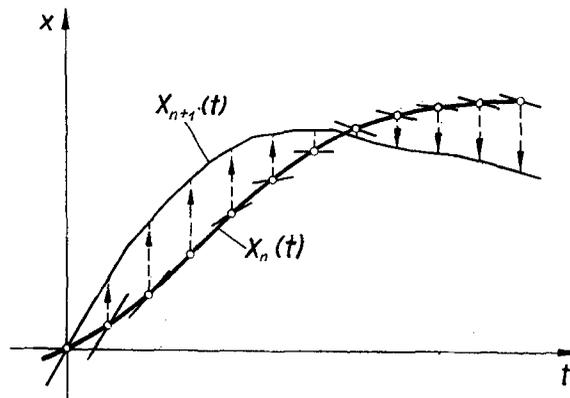


Abb. 1. Kettenbildung liefert die Picarditerierte.

3. **Veranschaulichung des Picardschrittes.** Wir werden eine geometrische Deutung des Picardschen Iterationsschrittes verwenden, die von Vietoris⁵ zuerst veröffentlicht und vom Verfasser schon in einer anderen Arbeit⁶ zur anschaulichen Untersuchung der Picarditeration benutzt wurde. Man denke sich (1) in üblicher Weise durch ein Richtungsfeld dargestellt. Dann hat die Iterierte

$$x^*(t) = \mathfrak{P} \{x(t)\}$$

an jeder Stelle t die Richtung des Feldes auf $x(t)$ bei gleicher Abszisse. Man kann sich also die Entstehung von $x^*(t)$ so denken, dass die Feldelemente von $x(t)$ auf den durch sie laufenden Senkrechten (Parallelen zur x -Achse) aufwärts oder abwärts verschoben werden, bis sie Tangenten einer einzigen durch 0,0 laufenden Kurve werden. Nach dem geometrischen Bild dieser in Abb. 1 wiedergegebenen Operation sprechen wir von Bildung der Picardschen Kette zu $x(t)$.

4. **Monotone rechte Seite.** Der erwähnte Satz von Bendixson⁴ lautet, soweit er uns hier angeht:

Wenn in (1) die rechte Seite $g(t, x)$ positiv ist und mit x wächst, so lässt sich ein Intervall $0 \leq t \leq t'_0$ ($t'_0 > 0$) angeben, in welchem die Picarditeration von $x_0(t) \equiv 0$ aus gleichmässig gegen eine Lösung von (1) und (2) konvergiert.

Max Müller⁷, der sich auch mit diesem Satz beschäftigt, arbeitet mit einem anderen $x_0(t)$, nämlich $x_0(t) = -Mt$ mit passendem konstantem M , und kommt dann ohne $g > 0$ aus. Mit einer Transformation der Differentialgleichung macht man sich leicht klar, dass der Satz von Müller mit dem von Bendixson äquivalent ist.

Wir wollen hier die Nebenvoraussetzung noch etwas abändern und folgenden Satz beweisen:

I. Die rechte Seite von (1) wachse *monoton* mit x :

$$g(t, x_2) > g(t, x_1) \quad \text{bei} \quad x_2 > x_1.$$

Geometrisch: Die Feldelemente sollen auf jeder Senkrechten $t = \text{konst}$ der t, x -Ebene nach rechts hin auseinanderlaufen (vgl. Abb. 2).

II. Die Differentialgleichung (1) mit der Anfangsbedingung (2) sei *eindeutig* lösbar [Lösung $X(t)$].

Dann konvergiert das Picardsche Iterationsverfahren (3) von beliebigem⁸ $x_0(t)$ aus gegen die Lösung $X(t)$.

Um den Beweis geometrisch möglichst bequem führen zu können, machen wir vorläufig eine Zusatzvoraussetzung, die erst in Nr. 9 beseitigt wird:

III. Die Anfangsnäherung $x_0(t)$ soll differenzierbar sein und »*relativ zum Feld steigen*«, genauer, es sei

$$(6) \quad \dot{x}_0(t) > g[t, x_0(t)] \quad \text{für} \quad t > 0$$

und

$$\dot{x}_0(0) \geq g[0, x_0(0)];$$

an jedem Punkt, den die Kurve $x_0(t)$ erreicht, (ausser $0, 0$) soll sie stärker steigen als das Feld (vgl. Abb. 2). Es sei ferner⁹

$$(7) \quad x_0(0) \geq 0.$$

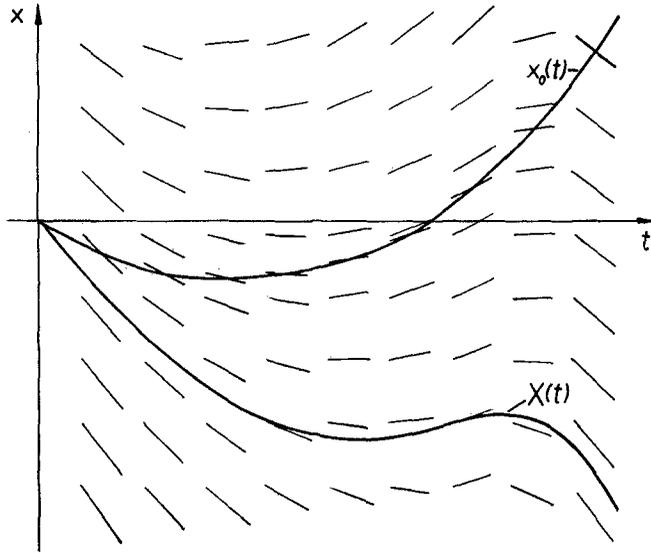


Abb. 2. Feld nach rechts auseinanderlaufend. Ausgangsnäherung $x_0(t)$ steigt relativ zum Feld.

Bei zu rasch steigendem $g(t, x)$ und zu grossem t_0 lässt sich möglicherweise ein derartiges $x_0(t)$ nicht für das ganze Intervall $0 \leq t \leq t_0$ angeben. Dann verkürzen wir dies, indem wir t_0 kleiner wählen. Die Ähnlichkeit der Zusatzvoraussetzung III mit der erwähnten Voraussetzung von Max Müller ist deutlich.

5. **Geometrischer Beweis.** Zunächst ist die Picardsche Kette (s. Nr. 3) $x_1(t)$ unserer Ausgangsnäherung $x_0(t)$ besser als diese selbst (Abb. 3). Die Kette setzt sich nämlich aus Feldelementen von $x_0(t)$ zusammen, also nach Voraussetzung III aus Elementen, die geringere Steigung haben als die Kurve $x_0(t)$ bei den gleichen Abszissen. Wegen (7) muss daher die Kette unterhalb¹⁰ von $x_0(t)$ verlaufen:

$$(8) \quad x_0(t) > x_1(t) \quad \text{für } t > 0.$$

Andererseits liegt die Ausgangsnäherung $x_0(t)$ wegen III sicher oberhalb¹⁰ der Lösung $X(t)$ ¹¹, so dass ihre Feldelemente nach der Monotonievoraussetzung I grössere Steigung haben als deren Feldelemente. Die Kette $x_1(t)$ der Elemente von $x_0(t)$ muss also über¹⁰ $X(t)$ liegen, das als Lösung selbst Kette seiner Feldelemente ist:

$$(9) \quad x_1(t) > X(t) \quad \text{für } t > 0.$$

Die Ungleichungen (8) und (9) zusammen sagen aus, dass $x_1(t)$ näher an der Lösung $X(t)$ liegt als $x_0(t)$. Der erste Iterationsschritt hat also eine Verbesserung gebracht.

Unser Gedankengang lässt sich auch auf $x_1(t)$ statt $x_0(t)$ anwenden. Wir müssen dazu zeigen, dass $x_1(t)$ wiederum III erfüllt. Differenzierbarkeit von $x_1(t)$ ist selbstverständlich. Dass $x_1(t)$ auch relativ zum Feld steigt, folgt daraus, dass nach (8) bei Bildung der Kette $x_1(t)$ jedes Feldelement von $x_0(t)$ abwärts verschoben wird, also nach I an eine Stelle geringerer Feldsteigung kommt. Die

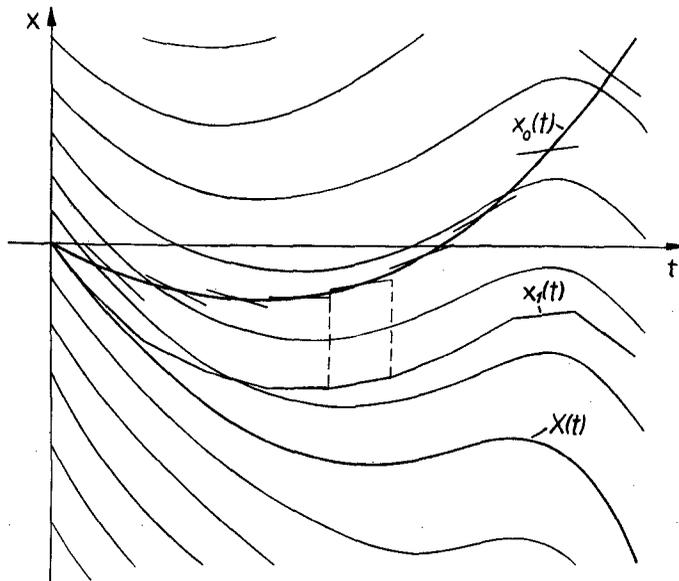


Abb. 3. Picardsche Kette $x_1(t)$ besser als $x_0(t)$. Richtungsfeld durch Lösungsfeld ersetzt.

Anfangsbedingung (7) ist mit Gleichheitszeichen erfüllt. Daher ist auch wieder $x_2(t)$ besser als $x_1(t)$. Durch Induktion erhält man für $t > 0$:

$$(10) \quad x_0(t) > x_1(t) > x_2(t) > \dots > X(t).$$

Nach (10) muss die Folge der Picarditerierten $x_n(t)$ konvergieren; es sei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t).$$

In bekannter Weise¹² schliesst man aus der Beschränktheit von $g(t, x)$ für

$$0 \leq t \leq t_0, \quad X(t) \leq x \leq x_0(t)$$

auf die *Gleichmässigkeit* dieser Konvergenz und findet durch Grenzübergang in (3):

$$x(t) = \int_0^t g[\tau, x(\tau)] d\tau,$$

dass die Grenzfunktion $x(t)$ eine, also nach II die Lösung durch o, o ist:

$$x(t) = X(t).$$

6. **Bemerkungen.** Die Voraussetzung II war für das Gelingen des Konvergenzbeweises nebensächlich. Sie war durch die Zusatzvoraussetzung III fast ersetzt. Lassen wir sie fort, so können wir alle Schlüsse von Nr. 5 durchführen, wenn wir unter $X(t)$ die Maximallösung durch o, o verstehen. Bei monoton in x wachsendem $g(t, x)$ und differenzierbarer, relativ zum Feld steigender Ausgangsnäherung $x_0(t)$ mit $x_0(o) \geq o$ konvergiert also das Picardsche Verfahren monoton fallend gegen die Maximallösung durch o, o . Bei relativ fallender Ausgangsnäherung mit $x_0(o) \leq o$ konvergieren die Picarditerierten monoton steigend gegen die Minimallösung durch o, o .

Wir können übrigens in III auf die Differenzierbarkeit von $x_0(t)$ verzichten. Wir drücken relatives Steigen dann durch eine Beschränkung der vorderen Derivierten (D_+ , Annäherung von grösseren t -Werten her) aus. Gegenüber (6) gestatten wir sogar Erreichen der Schranke. Wir ersetzen also (6) durch die Forderung:

$$(11) \quad D_+ x_0(t) \geq g[t, x_0(t)] \quad \text{bei } t \geq o$$

für *alle* vorderen Derivierten D_+ von $x_0(t)$, insbesondere für die vordere untere Derivierte $\underline{D}_+ x_0(t)$. Schliesslich lassen wir in I noch das Gleichheitszeichen, d. h. Monotonie im schwächeren Sinne, zu. Wir behaupten, dass auch jetzt noch die aus $x_0(t)$ gewonnene Picardfolge monoton fallend (jetzt allerdings im schwächeren Sinne) und gleichmässig gegen eine Lösung konvergiert; diese braucht aber nicht die Maximallösung zu sein. Den Beweis legt man sich leicht mit Hilfssatz 2 der folgenden Nr. 7 zurecht. Mit $G(t, x) = g[t, x_0(t)]$, $\varphi(t) = x_0(t)$, $X(t) = x_1(t)$ lehrt Hilfssatz 2, dass

$$x_0(t) \geq x_1(t) \quad \text{in } o \leq t \leq t_0$$

gilt. Mit $G(t, x) = g(t, x)$, $\varphi(t) = x_0(t)$ lehrt er

$$x_0(t) \geq X(t)$$

[$X(t) = \text{Minimallösung}$]. Schliesslich folgt wie früher:

$$\dot{x}_1(t) = g[t, x_0(t)] \geq g[t, x_1(t)],$$

womit die Möglichkeit gegeben ist, wie in Nr. 5 fortzufahren.

Ebenso folgt natürlich monoton steigende, gleichmässige Konvergenz der Picardfolge gegen eine Lösung, wenn $x_0(t)$ in folgendem Sinne relativ zum Felde fällt:

$$D_+ x_0(t) \leq g[t, x_0(t)] \quad \text{bei } t \geq 0$$

für *alle* vorderen Derivierten oder damit gleichbedeutend

$$\bar{D}_+ x_0(t) \leq g[t, x_0(t)] \quad \text{bei } t \geq 0$$

für die vordere obere Derivierte.

7. Hilfssätze.

Hilfssatz 1: Es sei $G(t, x)$ in $0 \leq t \leq t'$ stetig und (im schwächeren Sinne) monoton wachsend in x :

$$G(t, x_2) \geq G(t, x_1) \quad \text{für } x_2 \geq x_1.$$

$X(t)$ sei eine Lösung von $\dot{x} = G(t, x)$ mit $X(0) = 0$, ferner sei $\varphi(t)$ stetig,

$$\varphi(0) \geq 0 \quad \text{und} \quad \underline{D}_+ \varphi(t) > G[t, \varphi(t)].$$

Dann ist

$$(12) \quad \varphi(t) \geq X(t) \quad \text{in } 0 \leq t \leq t'.$$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt (12) für $t = 0$. Wäre $0 \leq t \leq t''$ ($0 \leq t'' < t'$) das grösste Intervall, in dem (12) zutrifft, so wäre aus Stetigkeitsgründen

$$\varphi(t'') = X(t'').$$

Daher wäre

$$\underline{D}_+ \varphi(t'') > G[t'', \varphi(t'')] = G[t'', X(t'')] = \dot{X}(t''),$$

und (12) müsste noch ein Stück über t'' hinaus gelten, im Widerspruch zur Erklärung von t'' .

Hilfssatz 2: Es sei $G(t, x)$ in $0 \leq t \leq t'$ stetig und wachse monoton mit x (im schwächeren Sinne):

$$G(t, x_2) \geq G(t, x_1) \quad \text{bei } x_2 > x_1.$$

Es sei $X(t)$ die Minimallösung durch $0,0$ für $\dot{x} = G(t, x)$. Es sei $\varphi(t)$ eine in $0 \leq t \leq t'$ stetige Funktion mit $\varphi(0) \geq 0$ und

$$(13) \quad D_+ \varphi(t) \geq G[t, \varphi(t)].$$

Dann ist

$$(14) \quad \varphi(t) \geq X(t) \quad \text{in} \quad 0 \leq t \leq t'.$$

Beweis: Es sei $G_\varepsilon(t, x) = G(t, x) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Dann liegen für $G_\varepsilon(t, x)$, eine beliebige von $0,0$ ausgehende Lösung $X_\varepsilon(t)$ von $\dot{x} = G_\varepsilon(t, x)$ und das im Satz genannte $\varphi(t)$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 vor. Es ist also

$$\varphi(t) \geq X_\varepsilon(t) \quad \text{in} \quad 0 \leq t \leq t'$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Durch Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ erhält man die Behauptung¹³.

8. **Schatten einer Kurve.** Wir setzen hier wieder II von Nr. 4 voraus (Eindeutigkeit) und I, nach Nr. 6 abgeschwächt [Wachsen von $g(t, x)$ im schwächeren Sinne]. Unter dem »Schatten« \mathfrak{S} einer stetigen Kurve $x(t)$ verstehen wir dann den Bereich, welchen alle von Kurvenpunkten und von Punkten der Strecke $0 \dots x(0)$ der Ordinatenachse¹⁴ nach rechts hin auslaufenden Lösungen von (I) erfüllen (soweit sie im Streifen bleiben). Die Wahl der Bezeichnung erklärt sich, wenn man die Lösungen als krummlinige Strahlen einer links gelegenen Lichtquelle ansieht (Abb. 4). Über den Schatten lässt sich aussagen¹⁵:

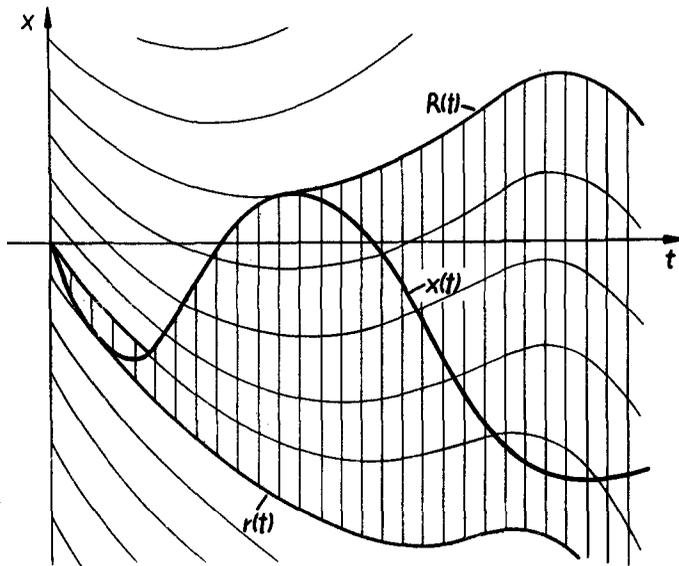


Abb. 4. Lösungen als »Lichtstrahlen«. Schatten einer Kurve $x(t)$.

- a) $\mathcal{S} \supseteq x(t)$.
 b) $\mathcal{S} \supseteq X(t)$ [$X(t)$ = Lösung durch o, o].
 c) Wenn \mathcal{S} nur Punkte von $x(t)$ enthält, ist $x(t) = X(t)$, und umgekehrt.
 d) Mit einem Punkt gehören die von ihm nach rechts laufenden Lösungen zu \mathcal{S} .
 e) Wenn $x^*(t) \in \mathcal{S}$, dann auch $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ [\mathcal{S}^* = Schatten von $x^*(t)$]. Vgl. Abb. 5.
 f) \mathcal{S} und jeder Querschnitt¹⁶ $\mathcal{Q}(t)$ ist zusammenhängend.

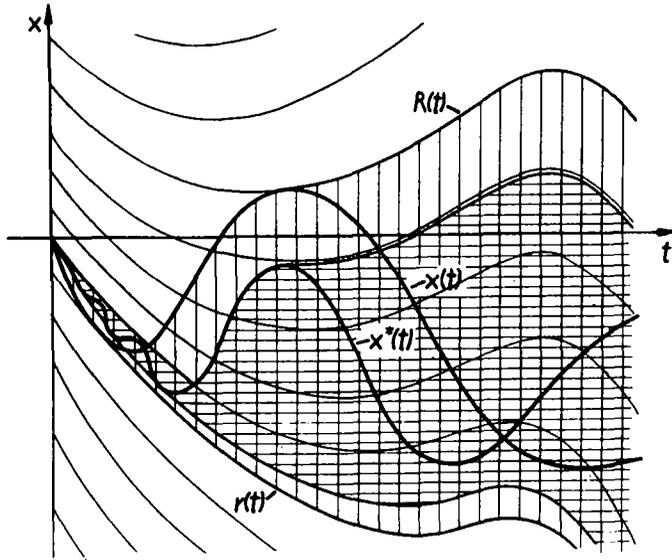


Abb. 5. Liegt $x^*(t)$ im Schatten von $x(t)$, so auch der Schatten von $x^*(t)$.

g) Die höchsten Punkte aller $\mathcal{Q}(t)$ mögen »oberer Rand« $R(t)$ heißen; entsprechend »unterer Rand« $r(t)$. $R(t) = +\infty$ ist möglich; desgl. $r(t) = -\infty$. $R(t)$ erfüllt die nach Nr. 6 abgeschwächte Voraussetzung III (relatives Steigen im schwächeren Sinne):

$$D_+ R(t) \geq g[t, R(t)], \quad R(o) = \max[x(o), o];$$

entsprechend für den unteren Rand (relatives Fallen im schwächeren Sinne):

$$D_+ r(t) \leq g[t, r(t)], \quad r(o) = \min[x(o), o].$$

h) Die Ränder $R(t)$ und $r(t)$ sind ein Stück rechts von o beide zugleich beschränkt und sind, soweit dies zutrifft, vorwärts und rückwärts stetig.

i) Erfüllt $x(t)$ die Voraussetzung III (relatives Steigen im stärkeren Sinne), so ist \mathcal{S} der Bereich $X(t) \leq x \leq x(t)$ zwischen Lösung und Kurve.

Wegen c) kann man — wie schon in Nr. 1 ausgeführt — die Güte einer Näherung nach ihrem Schatten beurteilen: Je »kleiner« der Schatten, desto besser die Näherung. Genauer: $x(t)$ wird für besser, mindestens ebenso gut gelten wie $x(t)$, wenn für die Schatten $\mathfrak{S}^* \subset \mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{S}^* \subseteq \mathfrak{S}$ zutrifft.

Die Punkte a), b), d) bis h) gelten ohne weiteres auch ohne II. Zur Begründung aller Aussagen, die übrigens sämtlich unmittelbar anschaulich sind, bemerken wir:

e) Folge von d). Vgl. Bild 5.

f) Mit einem dreiteiligen Kurvenzug aus Lösung, Bogen von $x(t)$, Lösung kann man innerhalb \mathfrak{S} von jedem Schattenpunkt zu jedem anderen gelangen. Für zwei Punkte gleicher Abszisse wird dieser Kurvenzug von jeder Lösung getroffen, die von einem Punkt der Verbindungsstrecke nach rückwärts läuft.

g) Die vom Punkte t' , $R(t')$ nach rechts auslaufende, gemäss d) zu \mathfrak{S} gehörende Maximallösung $X^*(t)$ beschränkt $R(t)$ nach unten:

$$R(t) \geq X^*(t) \quad \text{bei } t \geq t'.$$

Wegen $R(t') = X^*(t')$ folgt

$$\frac{R(t) - R(t')}{t - t'} \geq \frac{X^*(t) - X^*(t')}{t - t'} \quad \text{bei } t > t'$$

und daraus

$$D_+ R(t') \geq \dot{X}^*(t') = g(t', X^*) = g(t', R).$$

h) $x(t)$ ist beschränkt, etwa durch M . Für $|x| \leq 2M$ ist $|g(t, x)|$ beschränkt, etwa durch N . Für $0 \leq t \leq \frac{M}{N+1}$ sind dann $|R(t)|$ und $|r(t)|$ durch $M + \frac{MN}{N+1}$ beschränkt. Für das Folgende wählen wir t_0 so, dass \mathfrak{S}_0 beschränkt ist.

Die Stetigkeit der Ränder ist umständlicher zu zeigen. Man kann sich etwa darauf stützen, dass für zwei Punkte desselben Randes z. B. t_1 , $R(t_1)$ und t_2 , $R(t_2)$, der in f) erwähnte Kurvenzug durch einen über $t_1 \leq t \leq t_2$ schlichten Kurvenzug ersetzt werden kann, welcher zusammen aus höchstens 3 Bögen von $x(t)$ und von Lösungen besteht. [Hieraus folgt, nebenbei bemerkt, dass $R(t)$ überall Lösung von $\dot{R} = g(t, R)$ ist, wo $R(t) \neq x(t)$, und zwar mit demjenigen t als Anfangswert, wo zuletzt vorher $R(t) = x(t)$ war.] Eine Abschätzung wie im ersten Absatz von h) liefert dann die Stetigkeit schnell.

i) Folge von a), b), f) und Hilfssatz 2 in Nr. 7. Nach Erledigung dieser einführenden Einzelheiten sprechen wir die *Haupteigenschaft des Schattens* aus:

Satz 1: Der Schatten von $x(t)$ enthält die Picardsche Kette $x^*(t)$.

Beweis: Auf $\Omega(t)$ ist $g(t, x)$ nach Voraussetzung monoton. Die Feldsteigung auf $x(t)$, identisch mit der Steigung von $x^*(t)$, ist hiernach durch die Werte der Feldsteigung $g(t, R)$ und $g(t, r)$ auf den Schattenrändern beschränkt, nach g) erst recht durch die »Randsteigungen« $D_+ R(t)$ und $\bar{D}_+ r(t)$. Hilfssatz 2 mit $\varphi(t) = R(t)$, $G(t, x) = g[t, x(t)]$ bzw. mit $\varphi(t) = -r(t)$, $G(t, x) = -g[t, x(t)]$ liefert die Behauptung.

Bemerkung: Die Kette $x^*(t)$ gehört sogar dem Bereich zwischen den Picarditerierten $R^*(t)$ und $r^*(t)$ der Schattenränder an.

Da für eine Picardfolge die Kurve $x_{n+1}(t)$ nach Satz 1 dem Schatten \mathfrak{S}_n von $x_n(t)$ angehört, tut es nach f) auch der Schatten \mathfrak{S}_{n+1} von $x_{n+1}(t)$:

$$\mathfrak{S}_{n+1} \subseteq \mathfrak{S}_n.$$

Satz 2: Die Schatten der Picarditerierten einer Kurve $x_0(t)$ bilden eine geschachtelte Folge.

Nach der Bemerkung zu c) bringt also jeder Picardschritt eine Verbesserung der letzten Näherung (»Verbesserung« im schwächeren Sinne: Gleichbleiben, $\mathfrak{S}_{n+1} \equiv \mathfrak{S}_n$, eingeschlossen).

Als geschachtelte Folge von abgeschlossenen beschränkten Bereichen konvergiert die Schattenfolge $\{\mathfrak{S}_n\}$ gegen einen abgeschlossenen, nicht leeren Grenzbereich¹⁷, den »Grenzschatten« \mathfrak{G} . Er enthält wegen b) mindestens die Lösung $X(t)$. Enthält er nur sie, so konvergieren die Picardschen $x_n(t)$ gegen die Lösung $X(t)$.

Es sei zu späterer Anwendung bemerkt, dass bei Mehrdeutigkeiten im Lösungsfeld der obere Schattenrand $R(t)$ nicht die kleinste Lösung der in a) und g) enthaltenen Ungleichungen darstellt. Es gilt jedoch der

Hilfssatz 3: Es seien $g(t, x)$ und $x(t)$ für $0 \leq t \leq t_0$ stetig, $g(t, x)$ in x wachsend. Das Ungleichungssystem

$$(15) \quad y(t) \geq x(t),$$

$$(16) \quad y(0) \geq 0,$$

$$(17) \quad D_+ y(t) \geq g[t, y(t)]$$

hat dann eine kleinste stetige Lösung $y(t) = Q(t)$. Sie existiert, soweit eine stetige Lösung des Systems vorhanden ist, erfüllt

$$(18) \quad Q(0) = \max [x(0), 0]$$

und ist für jedes t entweder gleich $x(t)$ oder gleich einer in einem Punkte von $x(t)$ beginnenden Minimallösung von $\dot{y} = g(t, y)$.

Zum Beweise denken wir den Schatten von $x(t)$ in Bezug auf $\dot{x} = g(t, x)$ statt aus allen Lösungen dieser Differentialgleichung nur aus deren Minimallösungen gebildet. Dieser neue »Schatten« hat nicht alle früher aufgezählten Eigenschaften; z. B. brauchen seine Querschnitte nicht zusammenhängend zu sein. Sein oberer Rand $Q(t)$ ist jedoch stetig, soweit er beschränkt ist, erfüllt (15) bis (18) und für jedes t gilt entweder $Q(t) = x(t)$ oder $Q(t) =$ Minimallösung von $\dot{Q} = g(t, Q)$, — was alles unverändert gezeigt werden kann. Nimmt man an, es wäre $y(t)$ eine stetige Lösung von (15), (16), (17), die bei $t = t_1$ kleiner ist als $Q(t_1)$, so ist sie wegen $y(0) \geq Q(0)$ für ein grösstes $t_2 < t_1$ gleich $Q(t)$:

$$Q(t_2) = y(t_2), \quad Q(t) > y(t) \quad \text{für } t_2 < t \leq t_1.$$

Wegen (15) wäre erst recht $Q(t) > x(t)$ für $t_2 < t \leq t_1$, also $Q(t)$ dort Minimallösung von $\dot{Q} = g(t, Q)$. Zusammen mit (17) ergibt sich ein Widerspruch gegen Hilfssatz 2.

9. **Beseitigung der Voraussetzung III.** Es möge I (abgeschwächt) und II gelten. Da der obere Rand $R_0(t)$ von \mathfrak{S}_0 in $0, 0$ oder höher anfängt, stetig ist und nach 8 g) relativ zum Feld steigt, konvergieren seine Picarditerierten $R_{0n}(t)$ [$R_{00}(t) \equiv R_0(t)$] nach Nr. 6 gleichmässig gegen eine, also die Lösung $X(t)$. Ebenso konvergieren die Iterierten $r_{0n}(t)$ [$r_{00}(t) \equiv r_0(t)$] des unteren Randes $r_0(t)$ gleichmässig gegen $X(t)$. Die beiden Folgen schliessen gliedweise die entsprechenden $x_n(t)$ ein:

$$(19) \quad R_{0n}(t) \geq x_n(t) \geq r_{0n}(t),$$

woraus die gleichmässige Konvergenz der $x_n(t)$ gegen $X(t)$ folgt.

Wir zeigen (19) durch Schluss von n auf $n + 1$. Die für $n = 0$ bekannte Ungleichung liefert nach der Monotonievoraussetzung I die entsprechende Ungleichung für die Feldsteigung auf den drei Kurven R_{0n}, x_n, r_{0n} und damit durch Integration die Behauptung für $n + 1$.

10. **Schattendefinition bei beliebiger Feldfunktion.** Die bisherigen Betrachtungen sind so angelegt worden, dass die in dieser Nr. vorzunehmende Übertragung auf nur stetige, nicht mehr notwendig mit x wachsende Feldfunktionen $g(t, x)$ möglichst weitgehend vorbereitet wurde. Wir finden in Nr. 8 Vorbilder und Hilfssätze für den jetzt vorliegenden allgemeineren Fall.

Die bisherige Schattendefinition kann nicht unverändert beibehalten werden, weil sonst unser wesentlicher Satz 1 nicht mehr gelten würde. Z. B. wäre schon für $g(t, x) = -x$, $x_0(t) = t$ die Picardkette $x_1(t) = -\frac{1}{2}t^2$ nicht mehr im Schatten von $x_0(t)$ enthalten; die von Punkten der Ausgangsnäherung abstrahlenden Lösungen $X(t) = \text{konst} \cdot e^{-t}$ erreichen nämlich überhaupt keine negativen Werte (Abb. 6).

Der Beweis des Satzes 1 war dadurch möglich, dass die »Steigungen« der Schattenränder für jedes t die Steigung der Picardschen Kette zwischen sich einschliessen. Diese Tatsache machen wir jetzt zur Grundlage der

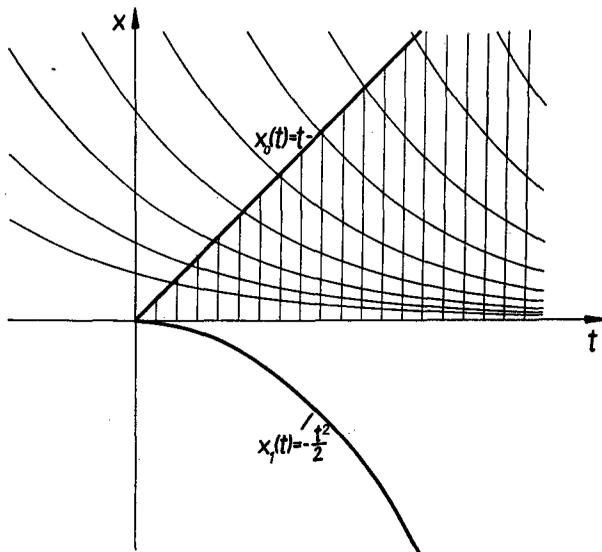


Abb. 6. Bei fallender Feldfunktion muss die Schattenerklärung von Nr. 8 geändert werden, damit Satz 1, $x_1(t) \subseteq \mathfrak{S}$, gültig bleibt.

Definition: Es seien $g(t, x)$ und $x(t)$ in $0 \leq t \leq t_0$ stetige Funktionen. Wir betrachten die Bereiche \mathfrak{B} des Streifens $0 \leq t \leq t_0$ mit folgenden Eigenschaften:

1.) \mathfrak{B} enthält das Kurvenbild von $x(t)$ und den Nullpunkt.

2.) Mittels zweier »Randfunktionen« $P(t)$ und $p(t)$, die, soweit sie beide beschränkt bleiben, auch stetig sind, kann \mathfrak{B} als Gesamtheit aller Punkte t, x mit

$$p(t) \leq x \leq P(t), \quad 0 \leq t \leq t_0$$

beschrieben werden. Wenn eine der Funktionen $P(t)$ und $p(t)$ für $t'_0 \leq t_0$ unendlich werden sollte, sei

$$P(t) = +\infty, \quad p(t) = -\infty \quad \text{für } t \geq t'_0.$$

3.) Auf jedem Querschnitt $\Omega(t)$ von \mathfrak{B} (vgl. Anm. 16) erfüllen $P(t)$ und $p(t)$ die Deriviertenungleichungen (vgl. Abb. 7)

$$D_+ P(t) \geq \max_{\Omega(t)} g(t, x),$$

$$\bar{D}_+ p(t) \leq \min_{\Omega(t)} g(t, x).$$

Für $t \geq t'_0$ sind diese Forderungen inhaltlos.

Dann verstehen wir unter dem Schatten \mathfrak{S} von $x(t)$ [in Bezug auf die Differentialgleichung $\dot{x} = g(t, x)$] den Durchschnitt aller Bereiche \mathfrak{B} .

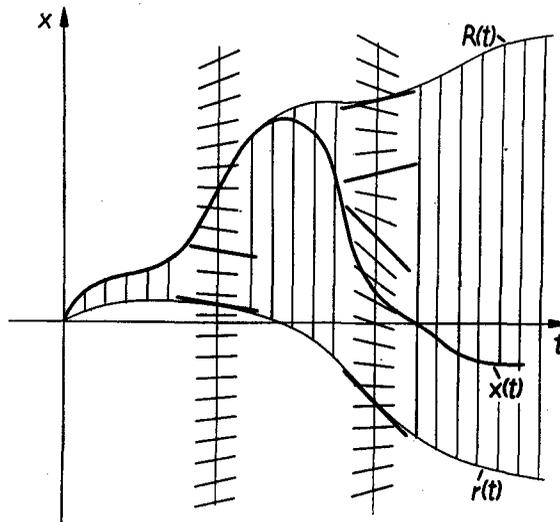


Abb. 7. Zur allgemeinen Schattendefinition. Die Feldsteigungen im Schatten sind durch die »Randsteigungen« begrenzt.

Die erste Forderung an \mathfrak{B} entspricht 8 a), die zweite 8 f); $\mathfrak{B} \ni 0,0$ wird gefordert, damit die Strecke der Ordinatenachse von $0,0$ bis $0, x(0)$ in \mathfrak{B} liegt (vgl. frühere Definition des Schattens in Nr. 8). Die Bedeutung der dritten Forderung erklärten wir schon. Die Durchschnittsbildung soll zu einem bestimmten, und zwar möglichst kleinen, im Sinne der Bemerkung zu 8 c) möglichst günstigen Schattenbereich führen.

Damit die Definition sinnvoll ist, müssen zu jedem $g(t, x)$ und jedem $x(t)$ Bereiche \mathfrak{B} existieren. Trivialerweise erfüllt der ganze Streifen $0 \leq t \leq t_0$ immer die an \mathfrak{B} gestellten Forderungen. Es ist $P(t) = +\infty$, $p(t) = -\infty$.

Um noch ein Beispiel eines Bereiches \mathfrak{B} zu geben, bei dem $P(t)$ und $p(t)$ ein Stück weit endlich sind, setzen wir

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \max_{|\xi| \leq x} |g(t, \xi)| \quad \text{für } x \geq 0, \\ &= G(t, 0) \quad \text{» } x < 0 \end{aligned}$$

und haben damit eine stetige, im schwächeren Sinne mit x wachsende Funktion für unseren Streifen erklärt. In Bezug auf die Differentialgleichung¹⁸

$$\dot{x} = G(t, x)$$

bilden wir wie in Nr. 8 den Schatten von $|x(t)|$ und erhalten nach 8 g) für dessen oberen Rand $R(t)$

$$\underline{D}_+ R(t) \geq G[t, R(t)],$$

also nach der Erklärung von $G(t, x)$

$$\underline{D}_+ R(t) \geq |g(t, x)| \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x| \leq R(t).$$

Man erkennt nun leicht, dass der Bereich \mathfrak{B} mit $P(t) = R(t)$ und mit $p(t) = -R(t)$ die Forderungen der Definition erfüllt. Die Endlichkeitsbehauptung folgt aus 8 h).

11. Eigenschaften des Schattens. Wir zeigen zunächst, dass der in Nr. 10 als Durchschnitt gewisser Bereiche \mathfrak{B} erklärte Schatten \mathfrak{S} selbst zu den \mathfrak{B} gehört. Dazu brauchen wir den

Hilfssatz 4: Mit \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 erfüllt der Durchschnitt \mathfrak{B}_3 beider Bereiche die Forderungen der Definition in Nr. 10.

Es leuchtet unmittelbar ein, dass die beiden ersten Forderungen erfüllt sind. Nennen wir die Ränder $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ bzw. $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ und wird für ein bestimmtes t ohne Beschränkung der Allgemeinheit $P_1(t) \geq P_2(t)$ angenommen, so ist bei $P_1(t) > P_2(t)$:

$$\underline{D}_+ P_3(t) = \underline{D}_+ P_2(t) \geq \max_{\mathfrak{B}_2(t)} g(t, x) \geq \max_{\mathfrak{B}_3(t)} g(t, x),$$

bei $P_1(t) = P_2(t)$ jedoch

$$\underline{D}_+ P_3(t) = \min [\underline{D}_+ P_1(t), \underline{D}_+ P_2(t)] \text{ usw.}$$

Entsprechend für $p_3(t)$.

Nach diesem Hilfssatz ist \mathfrak{S} als Durchschnitt aller \mathfrak{B} selbst ein \mathfrak{B} , wenn es nur endlich viele \mathfrak{B} geben sollte. Bei Vorhandensein unendlich vieler \mathfrak{B} ist das Erfülltsein der ersten Forderung unmittelbar vollständig klar, für die zweite nur soviel, dass \mathfrak{S} durch zwei Randfunktionen $R(t)$, $r(t)$ als Bereich

$$r(t) \leq x \leq R(t), \quad 0 \leq t \leq t_0$$

beschrieben werden kann und dass diese Funktionen eine obere Grenze t'_0 der Beschränktheitsintervalle haben, oberhalb welcher bei $t'_0 < t_0$ durchweg $R(t) = +\infty$, $r(t) = -\infty$ ist. Beim Beweis der Stetigkeit der Randfunktionen und des Erfülltseins von Forderung 3.) legen wir ein Intervall $0 \leq t \leq t''_0$ ($< t'_0$) zugrunde, in dem $R(t)$ und $r(t)$, also auch mindestens ein \mathfrak{B} -Bereich \mathfrak{B}^* , beschränkt sind. Zur Erleichterung des Ausdrucks dienen die

Bezeichnungen: Es sei $\varphi(t)$ eine stetige Funktion. Wir setzen

$$\begin{aligned} \max_{x \geq \xi \geq \varphi(t)} g(t, \xi) &= G_\varphi(t, x), \\ \min_{\varphi(t) \geq \xi \geq x} g(t, \xi) &= G^\varphi(t, x). \end{aligned}$$

Die erste dieser beiden Funktionen ist oberhalb von $\varphi(t)$ erklärt, und zwar für festes t gleich dem Maximum von $g(t, x)$ auf der Strecke von $t, \varphi(t)$ bis t, x ; sie ist daher stetig und wächst mit x im schwächeren Sinne. Ähnlich ist die zweite für t, x unterhalb $\varphi(t)$ erklärt, stetig und mit x wachsend. Es ist leicht ersichtlich, wie man beide Funktionen unter Erhaltung von Stetigkeit und Monotonie in den ganzen Streifen $0 \leq t \leq t_0$ fortsetzen könnte.

Nach Hilfssatz 4 und wegen des Vorhandenseins eines (bis t''_0) beschränkten \mathfrak{B}^* , brauchen wir bei der Durchschnittsbildung nur *gleichmässig beschränkte* \mathfrak{B} zu berücksichtigen. Es genügt sogar, aus diesen nur \mathfrak{B} mit *gleichgradig stetigen* Rändern auszuwählen. Ist nämlich \mathfrak{B} beschränkt, so kann man aus den zugehörigen $P(t)$, $p(t)$ mit Hilfssatz 3, indem man das dortige $g(t, x)$ gleich $G_p(t, x)$ setzt, ein $Q(t) \leq P(t)$ konstruieren, das zusammen mit $p(t)$ ebenfalls ein \mathfrak{B} , etwa \mathfrak{B}' , berandet. Ähnlich bekommt man aus diesem \mathfrak{B}' mittels $G^q(t, x)$ und eines auf Maximallösungen und \leq statt \geq abgeänderten Hilfssatzes 3 ein $q(t) \geq p(t)$ und damit einen \mathfrak{B} -Bereich \mathfrak{B}'' : $Q(t) \geq x \geq q(t)$. Die Ränder dieses \mathfrak{B}'' sind, wo sie nicht mit $x(t)$ übereinstimmen, differenzierbar mit Ableitungen, die als g -Werte in \mathfrak{B}'' , erst recht in \mathfrak{B}^* auftreten. Alle derartigen \mathfrak{B}'' haben also gleichgradig stetige Ränder. Wegen $\mathfrak{B}'' \subseteq \mathfrak{B}^*$ genügen sie zur Konstruktion von \mathfrak{S} .

Im Intervall $0 \leq t \leq t'_0$ wählen wir eine überall dichte Folge $\{t_i\}$ und zu jedem t_i zwei Folgen von \mathfrak{B} -Bereichen der eben beschriebenen Art, $\mathfrak{B}_{ij^{(1)}}$ und $\mathfrak{B}_{ij^{(2)}}$, derart dass für $j \rightarrow \infty$ die zugehörigen Ränder $Q_{ij^{(1)}}(t_i) \rightarrow R(t_i)$ bzw. $q_{ij^{(2)}}(t_i) \rightarrow r(t_i)$ erfüllen. Es sei \mathfrak{B}_k der Durchschnitt aller $\mathfrak{B}_{ij^{(1)}}$ und $\mathfrak{B}_{ij^{(2)}}$ für $i, j \leq k$. Dann gilt bei $k \rightarrow \infty$ für die Ränder $P_k(t)$, $p_k(t)$ der \mathfrak{B}_k :

$P_k(t_i) \rightarrow R(t_i)$, $p_k(t_i) \rightarrow r(t_i)$ für alle t_i . Zufolge der gleichgradigen Stetigkeit der $Q_{ij^{(1)}}(t)$ und $q_{ij^{(2)}}(t)$ und daher der $P_k(t)$ und $p_k(t)$ konvergieren diese nicht nur für die t_i , sondern im ganzen Intervall $0 \leq t \leq t'_0$, und zwar gleichmässig gegen je eine stetige Funktion. Wegen der Willkürlichkeit der t_i sind $R(t)$ und $r(t)$ durchweg diesen Funktionen gleich, also stetig.

Wir betrachten zum Nachweis von 3.) für \mathfrak{S} Lösungen von $\dot{x} = G_{p_k}(t, x)$ und $\dot{x} = G_r(t, x)$. Wegen $p_k(t) \leq r(t)$, also $G_{p_k}(t, x) \geq G_r(t, x)$ ist für Minimallösungen, die bei gleicher Abszisse t_1 mit $X_{p_k}(t_1) \geq X_r(t_1)$ [$\geq r(t_1)$] beginnen:

$$X_{p_k}(t) \geq X_r(t) \quad \text{bei} \quad t \geq t_1,$$

insbesondere für

$$X_{p_k}(t_1) = P_k(t_1), \quad X_r(t_1) = R(t_1).$$

Ferner ist nach Hilfssatz 2

$$P_k(t) \geq X_{p_k}(t) \quad \text{bei} \quad t \geq t_1,$$

also schliesslich

$$P_k(t) \geq X_r(t)$$

und (durch $k \rightarrow \infty$):

$$(20) \quad R(t) \geq X_r(t) \quad \text{für} \quad t \geq t_1.$$

Hieraus

$$\underline{D}_+ R(t_1) \geq \underline{D}_+ X_r(t) = \dot{X}_r(t) = G_r[t_1, R(t_1)],$$

was abgesehen von der Formulierung mit der ersten Forderung 3.) für \mathfrak{S} statt \mathfrak{B} übereinstimmt. Der zweite, $r(t)$ betreffende Teil von 3.) folgt ebenso.

Wir haben mit dem Nachweis, dass \mathfrak{S} ein \mathfrak{B} ist, dass also $R(t)$ und $r(t)$ die Forderungen 1.) bis 3.) erfüllen, schon einen Teil der Aussagen 8 a) bis i) auf allgemeineres $g(t, x)$ übertragen. Was wir bisher wissen, reicht aus, um Satz 1 fast wörtlich *wie früher* zu beweisen: Die Steigung der Picardschen Kette von $x(t)$ ist durch $\underline{D}_+ R(t)$ und $\underline{D}_+ r(t)$ beschränkt usf. Auch Satz 2 lautet *wie früher*. Wegen Satz 1 ist nämlich \mathfrak{S} auch ein \mathfrak{B} -Bereich für die Picardsche Kette $x^*(t)$, enthält also deren Schatten \mathfrak{S}^* .

Von den noch übrigen Aussagen der Nr. 8 macht nur 8 d) einige Schwierigkeiten. Wir übertragen diese Aussage in folgender abgeschwächten Form:

d') *Mit jedem Punkt gehört mindestens eine von ihm nach rechts auslaufende Lösung zu \mathfrak{S} .*

Für innere Punkte von \mathfrak{S} ist das klar, sobald man es für Punkte der Ränder $R(t)$ und $r(t)$ weiss. Für die Ränder denken wir zuerst an eine Stelle t_1 , wo $R(t_1) > r(t_1)$ ist. Wir hatten in (20) $R(t)$ durch eine von t_1 , $R(t_1)$ ausgehende Minimallösung $X_r(t)$ von $\dot{x} = G_r(t, x)$ nach unten abgeschätzt. Wegen $G_r(t, x) \geq g(t, x)$ bei $x \geq r(t)$ folgt daraus für die von t_1 , $R(t_1)$ nach rechts laufende Minimallösung $X'(t)$ von (1) erst recht¹⁹

$$R(t) \geq X'(t) \quad \text{für } t \geq t_1, \quad \text{solange } X'(t) \geq r(t).$$

Ebenso findet man

$$r(t) \leq X''(t) \quad \text{für } t \geq t_1, \quad \text{solange } X''(t) \leq R(t),$$

wenn $X''(t)$ die von t_1 , $r(t_1)$ nach rechts laufende Maximallösung von (1) bedeutet. Ist N eine Schranke für $g(t, x)$ in $\mathfrak{S}(t \leq t'_0)$ und $b = R(t_1) - r(t_1)$, so gilt wegen (20) die zweite Nebenbedingung mindestens bis $t_1 + \frac{b}{2N+1}$; ebenso weit gilt die erste. Also ist

$$\left. \begin{array}{l} R(t) \geq X'(t) \geq r(t) \\ R(t) \geq X''(t) \geq r(t) \end{array} \right\} \quad \text{für } t_1 \leq t \leq t_1 + \frac{b}{2N+1}.$$

Rechts von $t_1 + \frac{b}{2N+1}$ kann man jede derartige Lösung innerhalb \mathfrak{S} bis t'_0 oder bis zum Rande fortsetzen. Wird der Rand vor t'_0 erreicht, so kann ein entsprechender Schritt wie oben angeschlossen werden. Er führt wieder mindestens um $\frac{b}{2N+1}$ nach rechts, da $R(t) - r(t)$ monoton mit t wächst, wie man sich leicht überzeugt. In endlich vielen Schritten ist man bei t'_0 angelangt.

Die Stellen t mit $R(t) > r(t)$ werden, wenn es überhaupt welche gibt, links von einer Stelle t^* mit $R(t^*) = r(t^*)$ berandet, vor welcher wegen des Wachsens von $R(t) - r(t)$ dauernd $R(t) = r(t)$ ist. Auf diese Stelle t^* lässt sich der eben geführte Existenzbeweis ohne weiteres ausdehnen. Wir wählen rechts von t^* innerhalb \mathfrak{S} eine gegen t^* , $R(t^*)$ konvergierende Punktfolge $\{P_i\}$ aus, ferner eine Folge von Lösungen $X_i(t)$, die in den P_i beginnen und innerhalb \mathfrak{S} bleiben. Die $X_i(t)$ sind bis t'_0 gleichgradig stetig. Jede konvergente Teilfolge aus ihnen liefert als Grenzkurve eine in t^* , $R(t^*)$ beginnende, in \mathfrak{S} verlaufende Lösung.

Schliesslich muss man mit der Möglichkeit rechnen, dass sich rechts an o ein ganzes t -Intervall mit $R(t) = r(t)$ anschliesst (bis t^* bzw. t'_0). Dann ist nach Satz 1 in diesem Intervall $\mathfrak{B}\{R(t)\}$ in \mathfrak{S} enthalten, also gleich $R(t)$ und daher Lösung, womit die volle Behauptung bewiesen ist.

Durchmustern wir jetzt noch einmal die Nr. 8, so zeigt sich, dass wir fast alles übertragen haben. Von den noch fehlenden Punkten verlangt b) eine d') entsprechende eingeschränkte Fassung:

b') *Zu \mathfrak{S} gehört mindestens eine in o, o beginnende Lösung.*

Diese Aussage ist in d') enthalten. c) gilt uneingeschränkt. In i) muss »Lösung« durch »Maximallösung« (i') ersetzt werden. Die Beweise von c), e), i') verlangen ähnliche Schlüsse wie der von Satz 2, sind sehr einfach und können übergangen werden.

Die Abweichungen von b'), d') gegen b), d) erklären sich daraus, dass die Definition in Nr. 10 die von Nr. 8 nicht als Sonderfall enthält. Nr. 8 ist nur bei Eindeutigkeit *aller* Lösungen von (1) Sonderfall von Nr. 10. Wie man Nr. 8 abändern müsste, um den Sonderfall von Nr. 10 zu erhalten, deutet der Beweis von Hilfssatz 3 an. Wir haben die Abweichungen in Kauf genommen, um Nr. 8 einerseits bequem aufbauen zu können und andererseits Nr. 10 und Nr. 11 damit genügend gut vorzubereiten.

12. Zusammenfassung. Bei stetigem $g(t, x)$ haben wir jeder stetigen Kurve $x(t)$ einen Bereich zugeordnet, den wir seinen »Schatten« nennen. Der Schatten enthält $x(t)$ und mindestens eine von o, o ausgehende Lösung von $\dot{x} = g(t, x)$. Dann und nur dann besteht er aus $x(t)$ allein, wenn $x(t)$ selbst Lösung ist. Man ist daher berechtigt, Näherungen mit »kleinem« Schatten »gut« zu nennen. Die Schatten der durch Picarditeration aus $x_0(t)$ entstehenden Kurven $x_1(t), x_2(t), \dots$ sind geschachtelt. In der eben erwähnten Sprechweise heisst das: *Jeder Picardschritt verbessert die Näherung* (im schwächeren Sinne, Gleich-gut-bleiben eingeschlossen). Die Tatsache, dass es möglich ist, ein sinnvolles Gütekennzeichen mit derartigem Erfolg einzuführen, wirft ein Licht auf die starke Verbesserungskraft der Picardschen Formel.

Gegenüber der sonst meist angewandten Beurteilung von Näherungen nach dem grössten Fehler in einem Intervall hat unser Gütekennzeichen gewisse Vorzüge. Gleiche Fehler werden nicht unabhängig von der Stelle ihres Vorkommens für gleichwertig angesehen, sondern fallen bei kleineren Abszissen meist stärker

ins Gewicht, weil sie den Schatten stärker vergrößern (in Abb. 8 durch zwei — als senkrechte Strecken dargestellte — Fehler mit ihren Beiträgen zum Schatten veranschaulicht; Sonderfall von Nr. 8). Um sich klar zu machen, dass das zweckmässig ist, denke man an die numerische oder graphische Integration von Diffe-

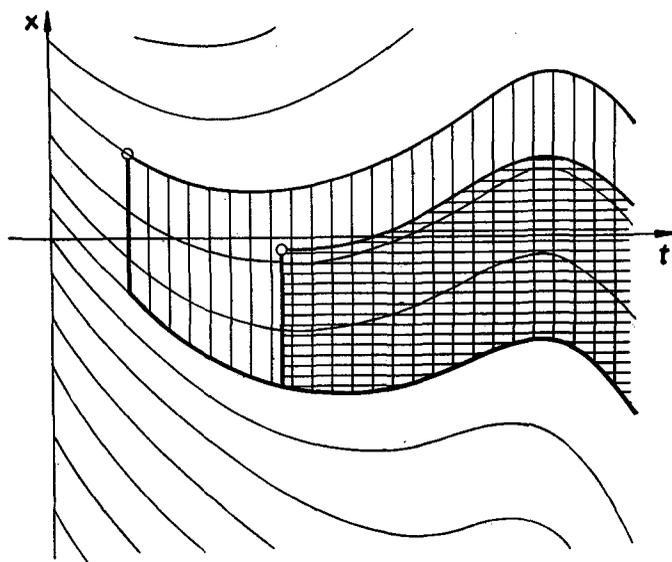


Abb. 8. Spätere $x(t)$ -Fehler verursachen kleinere Schattenfehler.

rentialgleichungen; ein früh auftretender Fehler ist unangenehmer als ein später. Der Einfluss auf spätere Ordinaten ist hier übrigens umso stärker, je mehr $g(t, x)$ mit x veränderlich ist; in diesem Fall wird auch der Schatten nach rechts hin rasch breiter.

Anwendungen des Schattenbegriffes zur Veranschaulichung bestimmter Sätze über Differentialgleichungen sollen einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

Anmerkungen.

1) Aus einer Dissertation in der Abt. f. Math. u. Naturwiss. der Techn. Hochsch. Darmstadt. Berichterstatter: Prof. Dr. A. WALTHER, Mitberichterstatter: Prof. Dr.-Ing. V. BLAESS. Für Förderung dieser Arbeit ist der Verfasser den Herren Berichterstattern, besonders Herrn Prof. Dr. A. Walther zu grossem Dank verpflichtet.

2) É. PICARD, Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives, J. math. pures appl. (4) 6 (1890) chap. V, 197—210.

3) É. LINDELÖF, Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des integrales réelles des équations différentielles ordinaires, J. math. pures appl. (4) 10 (1894) 117—128.

4) I. BENDIXSON, Sur la convergence uniforme des séries, Öfversigt Vetensk.-Ak. Förhandl. 54 (1897) 619—622.

5) Vgl. L. VIETORIS, Ein einfacher Integraph, Z. angew. Math. Mech. 15 (1935) 238—239.

6) TH. ZECH, Anschauliches zur Picardschen Iteration bei Differentialgleichungen, Z. angew. Math. Mech. 17 (1937) 341—352.

7) MAX MÜLLER, Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Math. Z. 26 (1927) 623.

8) Vgl. Nr. 2, Schluss.

9) Wir könnten diese Bedingung auch in die Forderung des relativen Steigens einbeziehen, indem wir für alle betrachteten Funktionen $x_0(t)$ formal $x_0(-0)=0$ festsetzen.

10) Abgesehen etwa von $t=0$ (dort Gleichheit).

11) Wir sehen das hier als evident an. Einen scharfen Beweis kann man aus Nr. 6 entnehmen.

12) Vgl. z. B. MAX MÜLLER, a. i. Anm. 7 a. O., S. 621.

13) E. KAMKE, Differentialgleichungen reeller Funktionen (Leipzig 1930, Akad. Verlagsges.) 83—86.

14) Vgl. hierzu Anm. 9.

15) Im Anschluss an Hausdorff benutzen wir \subseteq für Enthaltensein; \subset nur, wenn ein echter Teil vorliegt.

16) Den Durchschnitt eines Bereichs mit einer Geraden $t=\text{konst}$ bezeichnen wir als *Querschnitt*; Symbol: $\square(t)$.

17) C. CARATHÉODORY, Vorlesungen über reelle Funktionen (Leipzig und Berlin 1918, B. G. Teubner) 54, Satz 1 und Satz 2. Beschränktheit nach 8 h).

18) Etwaige Nichteindeutigkeit ihrer von 0, 0 ausgehenden Lösung wird uns nach der Bemerkung von S. 11, 2. Absatz, nicht stören.

19) Vgl. Satz 5 a. i. Anm. 13 a. O., S. 91.

