INTERVALLFUNKTIONEN UND INTERVALLKONSTANTEN EINES BESCHRÄNKTEN SYMMETRISCHEN KERNS.

Von

JOHANNES MOLLERUP.

in Kopenhagen.

Einleitung.

Es sei $K(s, t)$ ein gegebener symmetrischer Kern; *entweder* variiert (s, t) unbeschränkt im Quadrat: $a \leqq \begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \leqq b$, *oder* (s, t) durchläuft alle Punkte mit ganzen positiven Koordinaten. $K(s, t)$ ist *beschränkt*; diese Eigenschaft wird hier (nach Toeplitz) in folgender Weise definirt[1]: *ist* $g(s)$ *eine Funktion der Klasse* $L^{(2)}$, also

$$\begin{array}{c} \displaystyle\int_a^b g(s)^2\, ds \\ \displaystyle\sum_s g(s)^2 \end{array}$$

konvergent, *dann gehört wieder die iterirte Funktion:*

$$g_1(s) = \begin{array}{c} \displaystyle\int_a^b K(s, t)\, g(t)\, dt \\ \displaystyle\sum_t K(s, t)\, g(t) \end{array} = (K(s.); g)$$

derselben Klasse $L^{(2)}$ *an.* Wir betrachten jetzt ein Intervall Δ der λ-Achse:

[1] Johannes Mollerup: Das Punktspektrum eines beschränkten symmetrischen Kerns ohne Streckenspektrum, Math. Zeitschrift, Bd. 30 pag. 624.

38—29643. *Acta mathematica.* 54. Imprimé le 30 avril 1930.

$\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$; es sei z. B. die Funktion $g(\lambda, s)$ in Bezug auf λ stetig, in Bezug auf s der Klasse $L^{(2)}$ angehörig. Im Intervalle $\varDelta$ erhält $g(\lambda, s)$ den *Zuwachs*:

$$\varDelta g(\lambda, s) = g(\lambda_2, s) - g(\lambda_1, s),$$

während die Iterirte:

$$g_1(\lambda, s) = (K(s\,.); g(\lambda\,.))$$

den Zuwachs

$$\varDelta g_1(\lambda, s) = g_1(\lambda_2, s) - g_1(\lambda_1, s)$$

erhält. Unsere Aufgabe wird sein: *eigentliche Lösungen der homogenen Gleichung*

$$(1) \qquad \varDelta \varphi(\lambda, s) = \mu \varDelta \varphi_1(\lambda, s)$$

zu finden; die unbekannte Funktion $\varphi(\lambda, s)$ soll in Bezug auf s der Klasse $L^{(2)}$ angehören; μ ist eine unbekannte Konstante, ein *Eigenwert*, der vom Intervall abhängt. Schreiben wir (1)

$$\varphi(\lambda_2, s) - \varphi(\lambda_1, s) = \mu \varphi_1(\lambda_2, s) - \mu \varphi_1(\lambda_1, s),$$

sehen wir, dass dieselbe jedenfalls befriedigt wird, wenn μ Eigenwert und $\varphi(\lambda, s)$ eine entsprechende Eigenfunktion ist für $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$. In einem Vortrag an dem sechsten Skandinavischen Mathematikerkongresse, Kopenhagen 1925[1], wurde gezeigt, dass wenn, im Gebiete der stetigen Funktionen, $\varphi(\lambda, s)$ für $\lambda = \lambda_1$ Eigenfunktion des Eigenwerts μ ist, dann gilt dasselbe für $\lambda = \lambda_2$; dasselbe gilt, wenn

$$\left.\begin{matrix} \displaystyle\int_a^b\int_a^b K(s, t)^2\, ds\, dt \\ \displaystyle\sum_{s,t} K(s, t)^2 \end{matrix}\right\} = \| K \|^2$$

konvergiert und ausserdem $\varphi(\lambda, s)$ die obengenannten Eigenschaften zukommen. Im Falle des beschränkten Kerns liegen aber die Verhältnisse anders; in der oben zitirten Arbeit[2] ist z. B. gezeigt, dass verschiedene Parameterwerte auch verschiedene Konstanten erzeugen können. Wir wollen hier zeigen, dass die Gleichung (1) einer direkten Behandlung mittels der Iterationsmetode fähig ist.

---

[1] Kongresberetning pag. 451.

[2] Pag. 698—700.

Damit die folgenden Ausführungen geläufiger vorkommen mögen, erinnern wir an dieser Stelle an das gewöhnliche Iterationsverfahren zur Lösung der homogenen Gleichung

$$g(s) = \lambda\, g_1(s). \tag{2}$$

Um (2) zu lösen gehen wir von einer beliebigen Funktion $g(s)$ der Klasse $L^{(2)}$:

$$\|g\|^2 = \begin{matrix} \displaystyle\int_a^b g(s)^2\, ds \\ \displaystyle\sum_s g(s)^2 \end{matrix},$$

aus.

1) *Iteration:*

$$g_0(s) = g(s);\quad g_n(s) = (K(s\,.);\ g_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots$$

2) *Konstantenbestimmung:*

$$\frac{\|g_{n+1}\|}{\|g_n\|} \leqq \frac{\|g_{n+2}\|}{\|g_{n+1}\|} \to G_1 > 0,\ \text{für } n \to \infty.$$

$$\frac{\|g_{n+1}\|}{G_1^{n+1}} \leqq \frac{\|g_n\|}{G_1^n} \to V^{(1)} \geqq 0.$$

$V^{(1)} > 0$ wird angenommen.

3) *Starker Grenzübergang:*

$$\frac{g_{2n}(s)}{G_1^{2n}} \to\to G^{(1)}(s);\ \frac{g_{2n+1}}{G_1^{2n}} \to\to G_1^{(1)}(s) = (K(s\,.);\ G^{(1)});\ \|G^{(1)}\| = V^{(1)}.$$

Lösung von (2):

$$(\lambda,\ g(s)) = \left(\pm\frac{1}{G_1},\ \pm G_1\, G^{(1)}(s) + G_1^{(1)}(s)\right).$$

4) *Orthogonale Abspaltung:*

$$g(s) = G^{(1)}(s) + g^{(2)}(s);\ (G^{(1)};\ g^{(2)}) = 0.$$

Das Verfahren lässt sich nun fortsetzen, inden man von $g^{(2)}(s)$ ausgeht.

§ 1. Eigenschaften der Lösungen.

1. Vorgelegt ist also die Gleichung

$$(1)\qquad \Delta\varphi(\lambda, s) = \mu\,\Delta\varphi_1(\lambda, s),$$

wo Δ ein Intervall: $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ andeutet, μ ist eine zugehörige unbekannte Konstante und $\varphi(\lambda, s)$ die unbekannte Funktion, welche in s der Klasse $L^{(2)}$ angehörig sein soll.

Satz 1. *Die Zuwächse zweier Lösungen, die verschiedenen Eigenwerten entsprechen, sind orthogonal.*

Es sei nämlich

$$\mu_1\,\Delta'\varphi(\lambda, s) = \Delta'\varphi_1(\lambda, s) = (K(s\,.);\ \Delta'\varphi(\lambda\,.))$$
$$\mu_2\,\Delta''\psi(\lambda, s) = \Delta''\psi_1(\lambda, s) = (K(s\,.);\ \Delta''\psi(\lambda\,.)),$$

wo $\mu_1 \neq \mu_2$; Δ' und Δ'' sind zwei Intervalle, die verschieden oder zusammenfallend sein mögen. Diese Gleichungen werden mit $\Delta''\psi(\lambda, s)$ bez. $\Delta'\varphi(\lambda, s)$ multiplizirt und die Variable s wird wegintegrirt oder wegsummirt; durch Subtraktion finden wir dann:

$$(\mu_1 - \mu_2)(\Delta'\varphi(\lambda\,.);\ \Delta''\psi(\lambda\,.)) = 0,$$

indem auf der rechten Seite die Integrations- oder Summationsordnung vertauscht werden darf, weil die durch das Klammersymbol angedeutete Integral oder Summe absolut konvergirt. Weil $\mu_1 \neq \mu_2$ erhalten wir dann

$$(\Delta'\varphi(\lambda\,.);\ \Delta''\psi(\lambda\,.)) = 0.$$

Satz 2. *Sämtliche Eigenwerte sind reelle Zahlen.*

Es sei $\mu_1 + i\mu_2$ Eigenwert, $\varphi(\lambda, s) + i\psi(\lambda, s)$ eine entsprechende eigentliche Lösung; es ist dann $\mu_1 - i\mu_2$ eine Konstante desselben Intervalls mit der Lösung $\varphi(\lambda, s) - i\psi(\lambda, s)$. Es wären dann die Zuwächse $\Delta\varphi(\lambda, s) + i\Delta\psi(\lambda, s)$ und $\Delta\varphi(\lambda, s) - i\Delta\psi(\lambda, s)$ einander orthogonal, also

$$\|\Delta\varphi(\lambda\,.)\|^2 + \|\Delta\psi(\lambda\,.)\|^2 = 0 \text{ d. h.}$$
$$\|\Delta\varphi(\lambda\,.)\| = \|\Delta\psi(\lambda\,.)\| = 0,$$

was ausgeschlossen ist.

Satz 3. *Sind $\varphi_1(\lambda, s)$ und $\varphi_2(\lambda, s)$ beide Lösungen desselben Intervalls und mit demselben Eigenwert, dann ist jedes lineares Aggregat mit konstanten Koeffizienten wieder eine Lösung desselben Intervalls und desselben Eigenwerts; sind $\varphi_\nu(\lambda, s)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ abzählbar viele Lösungen desselben Intervalls und desselben Eigenwerts und ist das System $\Delta\varphi_\nu(\lambda, s)$ orthogonalisirt, dann ist $\sum_\nu a_\nu \varphi_\nu(\lambda, s)$, wofern $\sum_\nu a_\nu^2$ konvergirt und die Reihe stark konvergirt, wieder eine Lösung desselben Intervalls und desselben Eigenwerts.*

Satz 4. *Die Menge sämtlicher Eigenwerte ist abzählbar oder endlich.*

Das System der Zuwächse der Lösungen bilden ein Orthogonalsystem, d. h. eine abzählbare Menge. Jedem Eigenwert entspricht also eine Menge von Intervallen, die nicht endlich oder abzählbar zu sein braucht.

§ 2. Die trivialen Fälle.

Wir machen zuerst die folgende Bemerkung. Ersetzen wir in der starken Limesgleichung — wo wir Leichtigkeit halber in diesem Moment den Parameter λ entbehren —

$$\frac{g_{2n}(s)}{G^{2n}} \rightarrow\rightarrow G^{(1)}(s)$$

die Konstante G mit einer grösseren Konstante $G_1 > G$, dann folgt

$$\frac{g_{2n}(s)}{G_1^{2n}} \rightarrow\rightarrow 0.$$

Denn aus

$$\frac{\| g_{2n} \|}{G^{2n}} \rightarrow \| G^{(1)} \|$$

folgt

$$\frac{\| g_{2n} \|}{G_1^{2n}} \rightarrow 0.$$

Wir gehen jetzt von einer beliebigen Funktion $g(\lambda, s)$ aus, die als Funktion von s der Klasse $L^{(2)}$ angehört. Es existirt also die Länge

$$\|g(\lambda,.)\| = \begin{cases} \sqrt{\int\limits_a^b g(\lambda, s)^2\, ds} \\ \sqrt{\sum\limits_s (g(\lambda, s))^2} \end{cases};$$

aber auch die Länge $\|\varDelta g(\lambda,.)\|$ existirt. Denn

$$\|\varDelta g(\lambda,.)\|^2 = \|g(\lambda_2 .)\|^2 + \|g(\lambda_1 .)\|^2 - 2\,(g(\lambda_2 .);\; g(\lambda_1 .)).$$

Wir finden

$$\frac{\|g_{n+1}(\lambda_1 .)\|}{\|g_n(\lambda_1 .)\|} \to G_1(\lambda_1) \text{ und } \frac{\|g_{n+1}(\lambda_2 .)\|}{\|g_n(\lambda_2 .)\|} \to G_1(\lambda_2),$$

$$\frac{g_{2n}(\lambda_1, s)}{G_1(\lambda_1)^{2n}} \to\to G_{\lambda_1}^{(1)}(s) \text{ und } \frac{g_{2n}(\lambda_2, s)}{G_1(\lambda_2)^{2n}} \to\to G_{\lambda_2}^{(1)}(s).$$

Betrachten wir dann die Gleichung

$$\varDelta g_{2n}(\lambda, s) = g_{2n}(\lambda_2, s) - g_{2n}(\lambda_1, s); \tag{2}$$

es sei *erstens* $G_1(\lambda_2) > G_1(\lambda_1)$; dividiren wir die Gleichung mit $G_1(\lambda_2)^{2n}$. Dann ist

$$\frac{g_{2n}(\lambda_2, s)}{G_1(\lambda_2)^{2n}} \to\to G_{\lambda_2}^{(1)}(s), \quad \frac{g_{2n}(\lambda_1, s)}{G_1(\lambda_2)^{2n}} \to\to 0;$$

weil nun die Eigenschaft der starken Konvergenz additiv ist, wird

$$\frac{\varDelta g_{2n}(\lambda, s)}{G_1(\lambda_2)^{2n}} \to\to G_{\lambda_2}^{(1)}(s);$$

ist nun $\|G_{\lambda_2}^{(1)}\| \neq 0$, dann ist auch

$$\frac{\|\varDelta g_{2n}(\lambda .)\|}{G_1(\lambda_2)^n} \to \|G_{\lambda_2}^{(1)}\|,$$

und $G_1(\lambda_2)$ ist nicht allein eine *Punktkonstante* (des Punktes λ_2), aber auch eine *Intervallkonstante* (des Intervalls $\varDelta = (\lambda_1, \lambda_2)$). Dieser Fall ist als *Trivialfall* zu bezeichnen. Ist dagegen $\|G_{\lambda_2}^{(1)}\| = 0$, wird eine direkte Bestimmung einer Intervallkonstante $G_1(\varDelta) \leqq G_1(\lambda_2)$ notwendig.

Zweitens nehmen wir an, dass $G_1(\lambda_2) = G_1(\lambda_1)$. Es ist dann

$$\frac{\Delta g_{2n}(\lambda, s)}{G_1(\lambda_1)^{2n}} \to G_{\lambda_2}^{(1)}(s) - G_{\lambda_1}^{(1)}(s) = \Delta G_{\lambda}^{(1)}(s);$$

ist nun $G_{\lambda_2}^{(1)}(s) - G_{\lambda_1}^{(1)}(s) \neq 0$, dann ist $G_1(\lambda_1) = G_1(\lambda_2)$ nicht allein eine Punktkonstante (der beiden Punkte λ_1 und λ_2), aber auch eine Intervallkonstante (des Intervalls Δ). Dieser Fall ist ein Trivialfall. Ist dagegen $G_{\lambda_2}^{(1)}(s) - G_{\lambda_1}^{(1)}(s) = 0$, z. B. $G_{\lambda_2}^{(1)}(s) = G_{\lambda_1}^{(1)}(s) = 0$, wird eine direkte Bestimmung einer Intervallkonstante $G_1(\Delta) \leqq G_1(\lambda_1)$ notwendig.

§ 3. Bestimmung von Konstanten und karakteristischen Funktionen eines Intervalls.

Um nun eine direkte Bestimmung einer Intervallkonstante zu finden gehen wir von einer beliebigen Funktion $g(\lambda, s)$ aus; $g(\lambda, s)$ soll als Funktion von s der Klasse $L^{(2)}$ angehören. Es existiren also die beiden Längen $\|g(\lambda\,.)\|$ und $\|\Delta g(\lambda\,.)\|$.

Durch Iteration von $\Delta g(\lambda, s) = g(\lambda_2, s) - g(\lambda_1, s)$ wird gefunden:

$$\Delta g_1(\lambda, s) = (K(s\,.);\ \Delta g(\lambda\,.)), \ldots \Delta g_n(\lambda, s) = (K(s\,.);\ \Delta g_{n-1}(\lambda, .)), \ldots;$$

$g_n(\lambda, s)$ und $\Delta g_n(\lambda, s)$ gehören beide $L^{(2)}$. Ist M die »Schranke» des Kerns $K(s, t)$, dann ist nach *der Schwarzschen Ungleichheit*:

$$\|\Delta g_1(\lambda\,.)\|^2 \leqq \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b K(s, t)^2\,dt \cdot \int_a^b \Delta g(\lambda, s)^2\,ds \\ \sum_t K(s, t)^2 \cdot \sum_s \Delta g(\lambda, s)^2 \end{array} \right. \leqq M^2 \cdot \|\Delta g(\lambda\,.)\|^2,$$

also

$$\frac{\|\Delta g_1(\lambda\,.)\|}{\|\Delta g(\lambda\,.)\|} \leqq M, \text{ allgemein } \frac{\|\Delta g_n(\lambda\,.)\|}{\|\Delta g_{n-1}(\lambda\,.)\|} \leqq M.$$

Weiter finden wir:

$$\|\Delta g_n(\lambda\,.)\|^2 \leqq \begin{cases} \int\limits_a^b \Delta g_n(\lambda, s)^2\, ds = \int\limits_a^b \Delta g_n(\lambda, s)\, ds \int\limits_a^b K(s,t)\, \Delta g_{n-1}(\lambda, t)\, dt \\ \sum\limits_s \Delta g_n(\lambda, s)^2 = \sum\limits_s \Delta g_n(\lambda, s) \sum\limits_t K(s,t)\, \Delta g_{n-1}(\lambda, t)\, dt \end{cases} =$$

$$(\Delta g_{n+1}(\lambda\,.);\ \Delta g_{n-1}(\lambda\,.)) \leqq \|\Delta g_{n+1}(\lambda\,.)\| \cdot \|\Delta g_{n-1}(\lambda\,.)\|, \text{ d. h.}$$

$$\frac{\|\Delta g_n(\lambda\,.)\|}{\|\Delta g_{n-1}(\lambda\,.)\|} \leqq \frac{\|\Delta g_{n+1}(\lambda\,.)\|}{\|\Delta g_n(\lambda\,.)\|} \leqq M,$$

also

$$\frac{\|\Delta g_{n+1}(\lambda\,.)\|}{\|\Delta g_n(\lambda\,.)\|} \to G_1(\Delta) \leqq M, \tag{3}$$

wo Δ das Intervall: $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ bedeutet.

Wir bemerken noch die Tatsache, dass wenn 3 aufeinanderfolgende Glieder $\|\Delta g_n(\lambda\,.)\|$ eine geometrische Progression bilden, dann bilden sämtliche Längen $\|\Delta g_n(\lambda\,.)\|$ eine solche Progression. In jedem Falle ist also

$$\frac{\|\Delta g_{n+1}(\lambda\,.)\|}{\|\Delta g_n(\lambda\,.)\|} \leqq G_1(\Delta) = \frac{G_1(\Delta)^{n+1}}{G_1(\Delta)^n},$$

d. h.

$$\frac{\|\Delta g_{n+1}(\lambda\,.)\|}{G_1(\Delta)^{n+1}} \leqq \frac{\|\Delta g_n(\lambda\,.)\|}{G_1(\Delta)^n} \to V^{(1)}(\Delta) \geqq 0.$$

Wir haben also den Satz bewiesen:

Satz 5. *Ist $g(\lambda, s)$ eine Fnnktion von s der Klasse $L^{(2)}$, dann entspricht jedem Teilintervalle Δ des Intervalls $(-M, M)$ eine Konstante $G_1(\Delta) > 0$:*

$$\frac{\|\Delta g_{n+1}(\lambda\,.)\|}{\|\Delta g_n(\lambda\,.)\|} \to G_1(\Delta)$$

und eine Konstante $V^{(1)}(\Delta) \geqq 0$:

$$\frac{\|\Delta g_n(\lambda\,.)\|}{G_1(\Delta)^n} \to V^{(1)}(\Delta).$$

Wir haben jetzt bewiesen, dass wenn eben $V^{(1)}(\Delta) > 0$, dann wird durch starken Grenzübergang eine Grenzfunktion $G^{(1)}(\Delta, s)$ mit der Länge $V^{(1)}(\Delta)$ bestimmt. Diese starke Grenzfunktion ist bestimmt durch

$$\frac{\varDelta g_{2n}(\lambda, s)}{G_1(\varDelta)^{2n}} \to\to G^{(1)}(\varDelta, s). \tag{4}$$

Der Beweis ist nach dem klassischen Beispiel von Herrn ERHARD SCHMIDT[1] so zu formuliren:

$$\left\| \frac{\varDelta g_{2n+2m}(\lambda\,.)}{G_1(\varDelta)^{2n+2m}} - \frac{\varDelta g_{2n}(\lambda\,.)}{G_1(\varDelta)^{2n}} \right\|^2 = \frac{\|\varDelta g_{2n+2m}(\lambda\,.)\|^2}{G_1(\varDelta)^{4n+4m}} + \frac{\|\varDelta g_{2n}(\lambda\,.)\|^2}{G_1(\varDelta)^{4n}} - 2\,\frac{(\varDelta g_{2n+2m}(\lambda\,.);\ \varDelta g_{2n}(\lambda\,.))}{G_1(\varDelta)^{4n+2m}}.$$

Es ist aber hier

$$(\varDelta g_{2n+2m}(\lambda\,.);\ \varDelta g_{2n}(\lambda\,.)) = \|\varDelta g_{2n+m}(\lambda\,.)\|^2,$$

weil man in gewöhnlicher Weise den einen Index verkleinern und den andern vergrössern kann:

$$(\varDelta g_p(\lambda\,.);\ \varDelta g_q(\lambda\,.)) = \left(\begin{matrix} \int\limits_a^b K(s,t)\,\varDelta g_{p-1}(\lambda,t)\,dt \\ \sum K(s,t)\,\varDelta g_{p-1}(\lambda,t) \end{matrix} ;\ \varDelta g_q(\lambda\,.) \right)$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(s,t)\,\varDelta g_{p-1}(\lambda,t)\,\varDelta g_q(\lambda,s)\,ds\,dt \\ \sum\limits_{s,t} K(s,t)\,\varDelta g_{p-1}(\lambda,t)\,\varDelta g_q(\lambda,s) \end{matrix} \right. = (\varDelta g_{p-1}(\lambda\,.);\ \varDelta g_{q+1}(\lambda\,.)).$$

Es ist dann

$$\left\| \frac{\varDelta g_{2n+2m}(\lambda\,.)}{G_1(\varDelta)^{2n+2m}} - \frac{\varDelta g_{2n}(\lambda\,.)}{G_1(\varDelta)^{2n}} \right\|^2 = \frac{\|\varDelta g_{2n+2m}(\lambda\,.)\|^2}{G_1(\varDelta)^{4n+4m}} + \frac{\|\varDelta g_{2n}(\lambda\,.)\|^2}{G_1(\varDelta)^{4n}} - 2\,\frac{\|\varDelta g_{2n+m}(\lambda\,.)\|^2}{G_1(\varDelta)^{4n+2m}} \to V^{(1)}(\varDelta)^2 + V^{(1)}(\varDelta)^2 - 2\,V^{(1)}(\varDelta)^2 = 0.$$

Hiermit ist dann die Existenz der Grenzfunktion:

$$\frac{\varDelta g_{2n}(\lambda, s)}{G_1(\varDelta)^{2n}} \to\to G^{(1)}(\varDelta, s) \tag{4}$$

[1] ERHARD SCHMIDT, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Math. Ann. 63 (1907), pag. 456—457.

gesichert; dieselbe gehört $L^{(2)}$ als Funktion von s. Ausser dieser *Intervallfunktion* $G^{(1)}(\Delta, s)$ finden wir noch eine, nämlich:

$$(5)\qquad \frac{\Delta g_{2n+1}(\lambda, s)}{G_1(\Delta)^{2n+1}} = \left(K(s\,.\,);\ \frac{\Delta g_{2n}(\lambda\,.\,)}{G_1(\Delta)^{2n}}\right) \rightarrow\rightarrow (K(s\,.\,);\ G^{(1)}(\Delta\,.\,)) = G_1^{(1)}(\Delta, s).$$

Durch Iteration finden wir endlich:

$$(6)\qquad (K(s\,.\,);\ G_1^{(1)}(\Delta\,.\,)) = G_1(\Delta)^2\,.\,G^{(1)}(\Delta, s).$$

Die gefundenen Intervallfunktionen $G^{(1)}(\Delta, s)$ und $G_1^{(1)}(\Delta, s)$ haben die Längen:

$$(7)\qquad \| G^{(1)}(\Delta\,.\,)\| = V^{(1)}(\Delta);\ \| G_1^{(1)}(\Delta\,.\,)\| = G_1(\Delta)\,.\,V^{(1)}(\Delta).$$

Endlich finden wir unmittelbar durch Iteration der Intervallfunktion

$$\psi(\Delta, s) = \pm G_1(\Delta)\, G^{(1)}(\Delta, s) + G_1^{(1)}(\Delta, s)$$

die Gleichung

$$\psi_1(\Delta, s) = \pm G_1(\Delta)\, G_1^{(1)}(\Delta, s) + G_1(\Delta)^2\, G^{(1)}(\Delta, s) = \pm G_1(\Delta)\, \psi(\Delta, s).$$

Wir haben also mindestens *eine* Lösung der *Intervallgleichung*

$$(8)\qquad \varphi(\Delta, s) = \mu\, \varphi_1(\Delta, s)$$

gefunden, nämlich

$$(9)\qquad \mu, \varphi(\Delta, s) = \left\{ \frac{1}{\pm G_1(\Delta)},\ \pm G_1(\Delta)\, G^{(1)}(\Delta, s) + G_1^{(1)}(\Delta, s) \right\},$$

wo die Konstante $G_1(\Delta)$ und die Funktion $\pm G_1(\Delta)\, G^{(1)}(\Delta, s) + G_1^{(1)}(\Delta, s)$ sich mit dem Intervall Δ ändern.

Wir sammeln diese Ergebnisse in dem folgenden Satz:

Satz 6. *Ist $g(\lambda, s)$ in Bezug auf s eine Funktion der Klasse $L^{(2)}$ und $G_1(\Delta)$ die dem Intervalle Δ entsprechende Konstante, dann werden, unter der Voraussetzung $V^{(1)}(\Delta) > 0$, durch starken Grenzübergang zwei Intervallfunktionen bestimmt:*

$$\frac{\Delta g_{2n}(\lambda, s)}{G_1(\Delta)^{2n}} \rightarrow\rightarrow G^{(1)}(\Delta, s),\quad \frac{\Delta g_{2n+1}(\lambda, s)}{G_1(\Delta)^{2n}} \rightarrow\rightarrow G_1^{(1)}(\Delta, s),$$

welche gleichfalls der Klasse $L^{(2)}$ angehören; die Intervallgleichung:

$$\varphi(\varDelta, s) = \mu \varphi_1(\varDelta, s) \tag{8}$$

wird durch die Lösung

$$\mu, \varphi(\varDelta, s) = \left\{ \frac{1}{\pm G_1(\varDelta)}, \ \pm G_1(\varDelta)\, G^{(1)}(\varDelta, s) + G_1^{(1)}(\varDelta, s) \right\} \tag{9}$$

genügt.

Wir wollen jetzt die Grösse der Intervallkonstante mit der Grösse der beiden Punktkonstanten der Endpunkte vergleichen und betrachten zu diesem Zwecke die Gleichung

$$\varDelta g_{2n}(\lambda, s) = g_{2n}(\lambda_2, s) - g_{2n}(\lambda_1, s) \tag{2}$$

und die 2 Punktkonstanten $G_1(\lambda_2)$ und $G_1(\lambda_1)$, so wie auch die Intervallkonstante $G_1(\varDelta)$. Es sei G die mittlere dieser 3 Konstanten; wir dividiren die einzelnen 3 Glieder mit G^{2n}; es konvergiren hiernach für $n \to \infty$ die 2 Glieder stark und deswegen auch das dritte Glied, weil ja die Eigenschaft der starken Konvergenz additiv ist. Hieraus folgt aber offenbar, dass *die mittlere und grössere der 3 Konstanten gleich sind.* Es gilt also der Satz:

Satz 7. *Sind die 2 Punktkonstanten $G_1(\lambda_2)$ und $G_1(\lambda_1)$ gleich, dann ist die Intervallkonstante $G_1(\varDelta)$ gleich oder kleiner als die beiden; sind $G_1(\lambda_2)$ und $G_1(\lambda_1)$ ungleich, dann ist $G_1(\varDelta)$ gleich der grösseren dieser Konstanten.*

In ähnlicher Weise beweist man den Satz:

Satz 8. *Ist das Intervall $\varDelta$ in 2 Teile $\varDelta'$ und $\varDelta''$ geteilt, dann sind die 2 der 3 Konstanten $G_1(\varDelta)$, $G_1(\varDelta')$, $G_1(\varDelta'')$ gleich, die dritte gleich oder kleiner.*

Es ist nämlich

$$\varDelta g_{2n}(\lambda, s) = \varDelta' g_{2n}(\lambda, s) + \varDelta'' g_{2n}(\lambda, s),$$

und man braucht nur mit G^{2n} zu dividiren, wo G die mittlere der 3 Konstanten ist. — Wegen der folgenden Ausführungen müssen wir uns gelegentlich auf den Fall beschränken, dass die 3 *Konstanten, die den Intervallen* $(0, \lambda_1)$, $(0, \lambda_2)$, (λ_1, λ_2) *entsprechen, alle gleich sind.* Die vorhergehenden 2 Sätze geben uns die Mittel uns über diese Frage zu orientiren. Wir nennen vorläufig die 3 Intervallkonstanten: $k_{0\lambda_1}$, $k_{0\lambda_2}$, $k_{\lambda_1\lambda_2}$ und die 3 Punktkonstanten: k_0, k_{λ_1}, k_{λ_2}, die entsprechenden Punktfunktionen: $G_0^{(1)}(s)$, $G_{\lambda_1}^{(1)}(s)$, $G_{\lambda_2}^{(1)}(s)$.

I. Es seien die 3 Punktkonstanten ungleich z. B.

$$k_0 < k_{\lambda_1} < k_{\lambda_2}.$$

Nach Satz 7. ist dann:

$$k_{0\,\lambda_1} = k_{\lambda_1},\ k_{0\,\lambda_2} = k_{\lambda_2},\ k_{\lambda_1\,\lambda_2} = k_{\lambda_2},\ \text{d. h.}$$

die 2 Intervallkonstanten sind gleich, die dritte kleiner. Aus der Gleichung

$$\Delta\, g_{2n}(\lambda, s) = g_{2n}(\lambda_2, s) - g_{2n}(\lambda_1, s)$$

erhalten wir durch Division mit $k_{\lambda_2}^{2n}$ und $n \to \infty$:

$$G^{(1)}(\Delta, s) = G_{\lambda_2}^{(1)}(s).$$

Es kommt dieser Fall nicht später in Betracht.

II. Es seien die 2 Punktkonstanten gleich, die dritte kleiner oder grösser:

(1) $$k_{\lambda_1} = k_{\lambda_2} < k_0.$$

Dann ist

$$k_{\lambda_1\,\lambda_2} \leqq k_{\lambda_2},\ k_{0\,\lambda_1} = k_0,\ k_{0\,\lambda_2} = k_0,$$

also wieder: *die 2 Intervallkonstanten sind gleich, die dritte kleiner.*

Diesmal finden wir:

$$\frac{\Delta\, g_{2n}(\lambda, s)}{k_{\lambda_1}^{2n}} \rightarrow G_{\lambda_2}^{(1)}(s) - G_{\lambda_1}^{(1)}(s) = \Delta\, G_{\lambda}^{(1)}(s).$$

Ist

$$G_{\lambda_2}^{(1)}(s) \neq G_{\lambda_1}^{(1)}(s),$$

dann ist:

$$k_{\lambda_1\,\lambda_2} = k_{\lambda_1},\ G^{(1)}(\Delta, s) = \Delta\, G_{\lambda}^{(1)}(s)\ \text{(Trivialfall)};$$

ist dagegen

$$G_{\lambda_2}^{(1)}(s) = G_{\lambda_1}^{(1)}(s),$$

dann ist

$$k_{\lambda_1\,\lambda_2} \leqq k_{\lambda_1};$$

ist hier eben

$$k_{\lambda_1\,\lambda_2} = k_{\lambda_1},\ \text{ folgt }\ G^{(1)}(\Delta, s) = \Delta\, G_{\lambda}^{(1)}(s) = 0;$$

ist aber

$$k_{\lambda_1 \lambda_2} < k_{\lambda_1},$$

braucht $G^{(1)}(\Delta, s)$ nicht zu verschwinden.

Abgesehen vom obengenannten Trivialfall beschäftigen wir uns nicht später mit diesem Fall.

(2) $$k_0 < k_{\lambda_1} = k_{\lambda_2}.$$

Dann ist

$$k_{\lambda_1 \lambda_2} \leqq k_{\lambda_1}, \quad k_{0\,\lambda_1} = k_{\lambda_1} = k_{0\,\lambda_2}, \text{ d. h.}$$

die 2 Intervallkonstanten sind gleich, die dritte gleich oder kleiner. Wir finden

$$\frac{\Delta g_{2n}(\lambda, s)}{k_{\lambda_1}^{2n}} \rightarrow\rightarrow G_{\lambda_2}^{(1)}(s) - G_{\lambda_1}^{(1)}(s) = \Delta G_{\lambda}^{(1)}(s).$$

Ist

$$G_{\lambda_2}^{(1)}(s) \neq G_{\lambda_1}^{(1)}(s),$$

dann ist

$$k_{\lambda_1 \lambda_2} = k_{\lambda_1}, \quad G^{(1)}(\Delta, s) = \Delta G_{\lambda}^{(1)}(s) \text{ (Trivialfall).}$$

Ist dagegen

$$G_{\lambda_2}^{(1)}(s) = G_{\lambda_1}^{(1)}(s),$$

dann ist

$$k_{\lambda_1 \lambda_2} \lesseqgtr k_{\lambda_1};$$

damit die 3 Intervallkonstanten gleich seien:

$$k_{\lambda_1 \lambda_2} = k_{0\,\lambda_1} = k_{0\,\lambda_2} = k_{\lambda_1},$$

muss auch

$$G^{(1)}(\Delta, s) = 0.$$

Auch hier beschäftigt uns später nur der Trivialfall.

(3) $$k_0 = k_{\lambda_1} < k_{\lambda_2}.$$

Dann ist

$$k_{\lambda_1 \lambda_2} = k_{0\,\lambda_2} = k_{\lambda_2}; \quad k_{0\,\lambda_1} \lesseqgtr k_{\lambda_1} < k_{\lambda_2},$$

also: *die 2 Intervallkonstanten sind gleich, die dritte kleiner.* Ausserdem finden wir:

$$G^{(1)}(\Delta, s) = G_{\lambda_2}^{(1)}(s).$$

Auch dieser Fall verschwindet aus der späteren Betrachtung.

(4) $$k_{\lambda_1} < k_{\lambda_2} = k_0.$$

Dann ist

$$k_{0\,\lambda_1} = k_{\lambda_1\,\lambda_2} = k_{\lambda_2}, \quad k_{0\,\lambda_2} \lesseqgtr k_{\lambda_2}, \text{ d. h.}$$

die 2 Intervallkonstanten sind gleich, die dritte gleich oder kleiner. Wir finden:

$$G^{(1)}(\varDelta, s) = G^{(1)}_{\lambda_2}(s).$$

Hier interessirt uns der Fall:

$$k_{0\,\lambda_2} = k_{0\,\lambda_1} = k_{\lambda_1\,\lambda_2}.$$

III. Es seien alle 3 Punktkonstanten gleich:

$$k_0 = k_{\lambda_1} = k_{\lambda_2} = k.$$

Dann ist:

$$k_{0\,\lambda_1} \lesseqgtr k, \quad k_{0\,\lambda_2} \lesseqgtr k, \quad k_{\lambda_1\,\lambda_2} \lesseqgtr k.$$

Wir finden

$$\frac{\varDelta g_{2n}(\lambda, s)}{k^{2n}} \to G^{(1)}_{\lambda_2}(s) - G^{(1)}_{\lambda_1}(s) = \varDelta G^{(1)}_{\lambda}(s);$$

ist also

$$G^{(1)}_{\lambda_2}(s) \neq G^{(1)}_{\lambda_1}(s),$$

dann ist

$$k_{\lambda_1\,\lambda_2} = k,$$

also

$$G^{(1)}(\varDelta, s) = \varDelta G^{(1)}_{\lambda}(s) \text{ (Trivialfall).}$$

Ist dagegen $G^{(1)}_{\lambda_2}(s) = G^{(1)}_{\lambda_1}(s)$, kann man nur behaupten, das $k_{\lambda_1\,\lambda_2} \lesseqgtr k$; auch in diesem Falle ist es möglich, dass die 3 Intervallkonstanten alle gleich sind:

$$k_{0\,\lambda_1} = k_{0\,\lambda_2} = k_{\lambda_1\,\lambda_2}.$$

Wir wollen sofort ein Beispiel durchrechnen, indem wir als Ausgangsfunktion $g(\lambda, s)$ eben die Funktion $K(\lambda, s)$ benutzen; zwar lässt dieses Beispiel sich nur in der Theorie der Integralgleichungen benutzen, weil ja λ ein Intervall durchlaufen soll. Wir setzen also

$$g(\lambda, s) = K(\lambda, s)$$

und finden durch Iteration

$$g_1(\lambda, s) = (K(s\,.);\ K(\lambda,\,.)) = K_2(\lambda, s)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$g_n(\lambda, s) = K_{n+1}(\lambda, s).$$

Es wird dann

$$\frac{\|\Delta g_n(\lambda\,.)\|}{\|\Delta g_{n-1}(\lambda\,.)\|} = \frac{\|\Delta K_{n+1}(\lambda\,.)\|}{\|\Delta K_n(\lambda\,.)\|} \to \Omega_1(\Delta).$$

In der oben zitirten Abhandlung, die zwar nur den algebraischen Fall behandelt, sind als Ausgangsfunktionen die Grundfunktionen benutzt, d. h. die Funktionen

$$E_u(s) = \begin{cases} 0 & s \neq u \\ 1 & s = u \end{cases}, \quad u = 1, 2, \dots$$

Man findet dann als erste Iteration die Funktion $K(s, u)$, $u = 1, 2, \dots$ und könnte also in der Tat ebenso gut die Funktion $K(s, u)$, $u = 1, 2, \dots$ als Ausgangsfunktion benutzen. Die Konstante wurde dann $\Omega_{u,1}$ bezeichnet; man hatte hiernach die Grenzübergänge:

$$\frac{K_{2n}(u, s)}{\Omega_{u,1}^{2n}} \to\to H_u^{(1)}(s), \quad \frac{K_{2n+1}(u, s)}{\Omega_{u,1}^{2n}} \to\to H_{u,1}^{(1)}(s),$$

$$\frac{\|K_n(u,\,.)\|}{\Omega_{u,1}^n} \to U_u^{(1)}$$

in Betracht zu ziehen. Wir brauchen hier dieselben Bezeichnungen. Es wird also erstens

$$\frac{\|\Delta K_{n+1}(\lambda\,.)\|}{\|\Delta K_n(\lambda\,.)\|} \to \Omega_1(\Delta).$$

Um die Grösse dieser Konstante $\Omega_1(\Delta)$ abzuschätzen betrachten wir die Gleichung

$$\Delta g_{2n}(\lambda, s) = \Delta K_{2n+1}(\lambda, s) = K_{2n+1}(\lambda_2, s) - K_{2n+1}(\lambda_1, s)$$

oder vielmehr die hiervon abgeleitete:

$$\| \varDelta g_{2n}(\lambda\,.)\|^2 = \| \varDelta K_{2n+1}(\lambda\,.)\|^2 = \| K_{2n+1}(\lambda_2\,.)\|^2 + \| K_{2n+1}(\lambda_1\,.)\|^2 - 2K_{4n+2}(\lambda_2, \lambda_1).$$

1) Ist nun $\Omega_{\lambda_2,1} = \Omega_{\lambda_1,1}$, erhalten wir

$$\frac{\| \varDelta K_{2n+1}(\lambda\,.)\|^{2n}}{\Omega^{2n}_{\lambda_1,1}} \to (U^{(1)}_{\lambda_2})^2 + (U^{(1)}_{\lambda_1})^2 - 2H^{(1)}_{\lambda_2}(\lambda_1);$$

ist rechte Seite $\neq 0$, haben wir einen Trivialfall. Ist dagegen

$$(U^{(1)}_{\lambda_2})^2 + (U^{(1)}_{\lambda_1})^2 = 2H^{(1)}_{\lambda_2}(\lambda_1),$$

dann ist

$$\Omega_1(\varDelta) \lesseqgtr \Omega_{\lambda_1,1}.$$

2) Ist dagegen

$$\Omega_{\lambda_1,1} < \Omega_{\lambda_2,1} = \Omega_1(\varDelta),$$

dann wird

$$H^{(1)}_1(\varDelta, s) = H^{(1)}_{\lambda_2,1}(s).$$

§ 4. Intervallfunktionen als Zuwächse von Punktfunktionen.

In einer Reihe von Fällen haben wir im vorhergehenden die Gleichung

$$G^{(1)}(\varDelta, s) = \varDelta G^{(1)}_{\lambda}(s) \tag{10}$$

gefunden; es ist hier $G^{(1)}(\varDelta, s)$ die charakteristische Funktion, die dem Intervall (λ_1, λ_2) entspricht, während $G^{(1)}_{\lambda}(s)$ die charakteristische Funktion des Punktes λ ist. Die Richtigkeit der Gleichung (10) war aber auf Trivialfälle beschränkt, d. h. auf solche Fälle, wo eben die direkte Iteration des Zuwachses $\varDelta g(\lambda, s)$ überflüssig ist, indem man sich mit der Iteration der Funktion $g(\lambda, s)$ begnügen kann. Abgesehen von diesen Fällen beschränken wir uns auf die Fälle, wo *die 3 Intervallkonstanten der Intervalle* $(0, \lambda_1)$, $(0, \lambda_2)$, (λ_1, λ_2) *gleich sind* und wollen hier eben mittels der Intervallfunktionen eine Punktfunktion in der Weise definiren, dass die Gleichung (10) ihre Gültigkeit behält.

Um eine solche Punktfunktion $G^{(1)}(\lambda, s)$ zu bilden setzen wir *erstens*

$$G^{(1)}(0, s) = 0 \tag{11}$$

und *zweitens*

$$G^{(1)}(\lambda, s) = G^{(1)}(\underline{\lambda}, s), \tag{12}$$

wo $\underline{\lambda}$ *das Intervall* $(0, \lambda)$ *bezeichnet.*

Dann ist

$$G^{(1)}(\underline{\lambda}, s) = G^{(1)}(\lambda, s) - G^{(1)}(0, s).$$

Wir betrachten nun die Intervalle: $\varDelta = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\varDelta' = (0, \lambda_1)$, $\varDelta'' = (0, \lambda_2)$ mit der gemeinsamen Konstante $G_1(\varDelta)$; aus der Gleichung

$$\varDelta g_{2n}(\varDelta, s) = \varDelta'' g_{2n}(\lambda, s) - \varDelta' g_{2n}(\lambda, s)$$

erhalten wir dann

$$G^{(1)}(\varDelta, s) = G^{(1)}(\varDelta'', s) - G^{(1)}(\varDelta', s) = G^{(1)}(\lambda_2, s) - G^{(1)}(\lambda, s) = \varDelta\, G^{(1)}(\lambda, s).$$

Unter der genannten Beschränkung gilt also der Satz:

Satz 9. *Die Intervallfunktion* $G^{(1)}(\varDelta, s)$ *ist der Zuwachs der Punktfunktion* $G^{(1)}(\lambda, s)$.

In diesem Falle (dem »*Normalfalle*») haben wir eine Lösung der Zuwachsgleichung (1) gefunden. Wir fanden nämlich oben eine Lösung der Intervallgleichung:

$$\varphi(\varDelta, s) = \mu \varphi_1(\varDelta, s),$$

nämlich

$$\mu;\ \varphi(\varDelta, s) = \left\{ \pm \frac{1}{G_1(\varDelta)},\ \pm G_1(\varDelta)\, G^{(1)}(\varDelta, s) + G_1^{(1)}(\varDelta, s) \right\}$$

$$= \left\{ \pm \frac{1}{G_1(\varDelta)},\ \pm G_1(\varDelta)\, \varDelta\, G^{(1)}(\lambda, s) + \varDelta\, G_1^{(1)}(\lambda, s) \right\}.$$

Die Gleichung

$$\varDelta \varphi(\lambda, s) = \mu \varDelta \varphi_1(\lambda, s) \tag{1}$$

wird also von der Lösung

$$\mu;\ \varphi(\lambda, s) = \pm \frac{1}{G_1(\varDelta)};\ \pm G_1(\varDelta)\, G^{(1)}(\lambda, s) + G_1^{(1)}(\lambda, s) \tag{13}$$

befriedigt.

§ 5. Fortsetzung der Iteration.

Um nun die Funktion $g(\lambda, s)$ weiter ausnützen zu können setzen wir:

$$g(\lambda, s) = G^{(1)}(\lambda, s) + g^{(2)}(\lambda, s) \tag{14}$$

$$\varDelta g(\lambda, s) = \varDelta G^{(1)}(\lambda, s) + \varDelta g^{(2)}(\lambda, s), \tag{15}$$

wo *die letzte Spaltung orthogonal ist:*

$$(\varDelta G^{(1)}(\lambda .);\ \varDelta g^{(2)}(\lambda .)) = 0. \tag{16}$$

Durch Iteration entsteht:

$$\varDelta g_1(\lambda, s) = \varDelta G_1^{(1)}(\lambda, s) + \varDelta g_1^{(2)}(\lambda, s).$$

Wäre nun *der Quotient* $\frac{\|\varDelta g_{n+1}(\lambda .)\|}{\|\varDelta g_n(\lambda .)\|}$ *konstant,* dann wäre schon $\varDelta g_1^{(2)}(\lambda, s) = 0$ und $\varDelta g^{(2)}(\lambda, s)$ *eine Nullösung*, d. h.

$$(K(s .);\ \varDelta g^{(2)}(\lambda .)) = 0.$$

Sind dagegen die Quotienten $\frac{\|\varDelta g_{n+1}(\lambda .)\|}{\|\varDelta g_n(\lambda .)\|}$ verschieden, dann ist $\varDelta g_1^{(2)}(\lambda, s) \neq 0$; um $\varDelta g_1(\lambda, s)$ weiter auszuleeren, setzen wir die Iteration fort: Konstantenbestimmung, starker Grenzübergang, Abspaltung, wofern wir wieder die 2 Voraussetzungen machen 1) $\| V^{(2)}(\varDelta) \| > 0$ (§ 2, 7) und 2) den »Normalfall» (den Satz 9). Wir finden dann:

$$\varDelta g(\lambda, s) = \varDelta G^{(1)}(\lambda, s) + \varDelta G^{(2)}(\lambda, s) + \varDelta g^{(3)}(\lambda, s)$$

$$\varDelta g_1(\lambda, s) = \varDelta G_1^{(1)}(\lambda, s) + \varDelta G_1^{(2)}(\lambda, s) + \varDelta g_1^{(3)}(\lambda, s).$$

Ist jetzt $\frac{\|\varDelta g_{n+1}^{(2)}(\lambda .)\|}{\|\varDelta g_n^{(2)}(\lambda .)\|}$ konstant, dann ist $\varDelta g_1^{(3)}(\lambda, s) = 0$, und $\varDelta g_1(\lambda, s)$ ist schon durch die 2 orthogonale Glieder erschöpft:

$$\varDelta g_1(\lambda, s) = \varDelta G_1^{(1)}(\lambda, s) + \varDelta G_1^{(2)}(\lambda, s),$$

und $\varDelta g^{(3)}(\lambda, s)$ ist eine Nullfunktion.

Im entgegengesetzten Falle setzt die Iteration sich fort. Wenn wir voraussetzen, dass *erstens* die Grössen $V^{(1)}(\varDelta) > 0$ (§ 2, 7), und *zweitens* dass der Normalfall des Satzes 9 immer eintritt, finden wir eine abnehmende Konstantenfolge:

$$G_1(\Delta) > G_2(\Delta) > G_3(\Delta) \ldots$$

mit entsprechenden Intervallfunktionen:

$$\Delta\, G^{(1)}(\lambda, s),\ \Delta\, G^{(2)}(\lambda, s), \ldots$$

und

$$\Delta\, G_1^{(1)}(\lambda, s),\ \Delta\, G_1^{(2)}(\lambda, s), \ldots,$$

wo beide Summen

$$\sum_\nu \Delta\, G^{(\nu)}(\lambda, s) \text{ und } \sum_\nu \Delta\, G_1^{(\nu)}(\lambda, s)$$

absolut und stark konvergiren.

Erschöpft die Summe $\sum\limits_\nu \Delta\, G_1^{(\nu)}(\lambda, s)$ immer noch nicht den Zuwachs $\Delta\, g_1(\lambda, s)$, dann lässt sich, immer unter den zwei obengenannten Voraussetzungen, die Iteration wieder fortsetzen, indem man von der Funktion

$$\Delta\, g^*(\lambda, s) = \Delta\, g(\lambda, s) - \sum_\nu \Delta\, G^{(\nu)}(\lambda, s)$$

ausgeht; die neue abnehmende Konstantenfolge liegt gänzlich unter der vorigen.

Wenn die zwei genannten Voraussetzungen immer zutreffen, nennen wir die Funktion $g(\lambda, s)$ *eine Funktion mit durchlaufender Zuwachsiteration.* Nach einer abzählbaren Anzahl von Schritten bricht die Iteration ab; wir haben dann eine abzählbare Anzahl von Konstanten und charakteristischen Funktionen gefunden; geben wir diesen Mengen durch zweckmässige Permutation den Typus ω, dann schreiben wir das Ergebnis:

Satz 10 (*Entwicklungssatz*). *Es sei $K(s, t)$ ein beschränkter Kern und $g(\lambda, s)$ eine Funktion von $L^{(2)}$ (in Bezug auf s) von durchlaufender Zuwachsiteration; der Zuwachs der Iterirten:*

$$\Delta\, g_1(\lambda, s) = g_1(\lambda_2, s) - g_1(\lambda_1, s)$$

lässt sich dann in einer absolut und stark konvergirenden Reihe nach den Zuwächsen der charakteristischen Funktionen: $\Delta\, G_1^{(\nu)}(\lambda, s)$ entwickeln;

$$\Delta g_1(\lambda, s) = \sum_\nu \Delta G_1^{(\nu)}(\lambda, s). \tag{17}$$

Die entsprechende Reihe $\sum_\nu \Delta G^{(\nu)}(\lambda, s)$ *konvergirt gleichfalls absolut und stark, und die Differenz*

$$\Delta g(\lambda, s) - \sum_\nu \Delta G^{(\nu)}(\lambda, s)$$

ist eine Nullfunktion des Kerns oder verschwindet identisch.

Die Zuwachsgleichung

$$\Delta \varphi(\lambda, s) = \mu \Delta \varphi_1(\lambda, s)$$

hat die Lösungen

$$\mu;\ \varphi(\lambda, s) = \pm \frac{1}{G_\nu(\Delta)};\quad \pm G_\nu(\Delta)\, G^{(\nu)}(\lambda, s) + G_1^{(\nu)}(\lambda, s), \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

§ 6. Die inhomogene Zuwachsgleichung.

Es sei nun die inhomogene Zuwachsgleichung

$$\Delta u(\lambda, s) = \Delta h(\lambda, s) - \mu \Delta h_1(\lambda, s) \tag{18}$$

vorgelegt; $u(\lambda, s)$ *sei eine gegebene Funktion,* die in Bezug auf s $L^{(2)}$ gehört und ausserdem im Sinne von § 4 *durchlaufende Zuwachsiteration besitzt*; $h(\lambda, s)$ ist die unbekannte Funktion, welche in derselben Weise $L^{(2)}$ angehören soll.

Wir bemerken zuerst, dass wie gewöhnlich die Differenz zweier Lösungen von (18) eine Lösung der homogenen Gleichung

$$0 = \Delta h(\lambda, s) - \mu \Delta h_1(\lambda, s)$$

ist; es dreht sich deshalb vor allen Dingen darum eine einzelne Lösung von (18) zu finden. Zu diesem Zwecke bestimmen wir das Iterationssystem von $\Delta u(\lambda, s)$:

Intervallkonstanten: U_1, U_2, U_3, ..., charakteristische Funktionen: $U^{(n)}(\lambda, s)$, $U_1^{(n)}(\lambda, s)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, Lösungen der homogenen Gleichung:

$$\pm \frac{1}{U_\nu},\quad \pm U_\nu \Delta U^{(\nu)}(\lambda, s) + \Delta U_1^{(\nu)}(\lambda, s).$$

Ist $U_\nu \Delta U^{(\nu)}(\lambda, s) + \Delta U_1^{(\nu)}(\lambda, s) = 0$, dann ist $-\frac{1}{U_\nu}$, $U^{(\nu)}(\lambda, s)$ eine Lösung;

ist $-U_\nu \varDelta U^{(\nu)}(\lambda, s) + \varDelta U_1^{(\nu)}(\lambda, s) = 0$, dann ist $\frac{1}{U_\nu}$, $U^{(\nu)}(\lambda, s)$ eine Lösung. Sind beide Ausdrücke von Null verschieden, dann sind $\pm\frac{1}{U_\nu}$ beide Eigenwerte. Wir beweisen zunächst den Satz:

Satz 11. *Ist* $\mu^2 \neq \frac{1}{U_n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$, *und ist* μ^2 *auch keine Verdichtungsstelle der Grössen* $\frac{1}{U_n^2}$, *dann konvergirt die Reihe*

$$\varDelta j(\lambda, s) = \sum_n \frac{\mu \varDelta U_1^{(n)}(\lambda, s) + \mu^2 U_n^2 \varDelta U^{(n)}(\lambda, s)}{1 - \mu^2 U_n^2} \tag{19}$$

absolut und stark in Bezug auf s; die Reihe definirt eine Funktion $j(\lambda, s)$, *die in Bezug auf s* $L^{(2)}$ *angehört.* Beweis: Die Reihen $\sum_n \varDelta U_1^{(n)}(\lambda, s) = u_1(\lambda, s)$ und $\sum_n U_n^2 \varDelta U^{(n)}(\lambda, s) = u_2(\lambda, s)$ konvergiren beide absolut und, in Bezug auf s, stark; schreiben wir dann

$$\sum_n \varDelta U_1^{(n)}(\lambda, s) = \sum_n \frac{\varDelta U_1^{(n)}(\lambda, s)}{\|\varDelta U_1^{(n)}(\lambda\,.)\|} \cdot \|\varDelta U_1^{(n)}(\lambda\,.)\|$$

und

$$\sum_n U_n^2 \varDelta U^{(n)}(\lambda, s) = \sum_n \frac{\varDelta U^{(n)}(\lambda, s)}{\|\varDelta U^{(n)}(\lambda\,.)\|} \cdot U_n^2 \|\varDelta U^{(n)}(\lambda\,.)\|,$$

konvergiren die Quadratsummen

$$\sum_n \|\varDelta U_1^{(n)}(\lambda\,.)\|^2 \quad \text{und} \quad \sum_n U_n^4 \|\varDelta U^{(n)}(\lambda\,.)\|^2;$$

es dreht sich nur darum, einzusehen, dass auch die Ouadratsummen

$$\sum_n \frac{\|\varDelta U_1^{(n)}(\lambda\,.)\|^2}{(1-\mu^2 U_n^2)^2} \quad \text{und} \quad \sum_n \frac{U_n^4 \|\varDelta U^n(\lambda\,.)\|^2}{(1-\mu^2 U_n^2)^2}$$

konvergiren. Dieses folgt aber unmittelbar aus dem Umstand, dass die Grössen $\frac{1}{(1-\mu^2 U_n^2)^2}$ zwischen 2 positiven Konstanten liegen. Es ist also durch (19) die Funktion $j(\lambda, s)$ definirt.

Wir wollen nun den Ausdruck $\varDelta j(\lambda, s) - \mu \varDelta j_1(\lambda, s)$ berechnen; zunächst finden wir durch Iteration:

$$\Delta j_1(\lambda, s) = \sum_n \frac{\mu\, U_n^2 \Delta\, U^{(n)}(\lambda, s) + \mu^2\, U_n^2 \Delta\, U_1^{(n)}(\lambda, s)}{1 - \mu^2\, U_n^2}.$$

Es ist also

$$\Delta j(\lambda, s) - \mu \Delta j_1(\lambda, s) = \sum_n \frac{\mu \Delta\, U_1^{(n)}(\lambda, s) - \mu^3\, U_n^2 \Delta\, U_1^{(n)}(\lambda, s)}{1 - \mu^2\, U_n^2} \tag{20}$$

$$= \mu \sum_n \Delta\, U_1^{(n)}(\lambda, s) = \mu \Delta\, u_1(\lambda, s).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung wird die vorgelegte Gleichung (18) zu der folgenden reduzirt:

$$\Delta\, u(\lambda, s) - \mu \Delta\, u_1(\lambda, s) = \Delta(h(\lambda, s) - j(\lambda, s)) - \mu \Delta(h_1(\lambda, s) - j_1(\lambda, s)). \tag{21}$$

Die Gleichung (21) wird aber genügt, wenn wir

$$h(\lambda, s) = u(\lambda, s) + j(\lambda, s) \tag{22}$$

setzen. Wir drücken dieses Resultat in den folgenden Satz aus:

Satz 12. *Ist* $\mu^2 \neq \frac{1}{U_n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$, *und ist* μ^2 *auch keine Verdichtungsstelle der Grössen* $\frac{1}{U_n^2}$, *dann hat die inhomogene Gleichung*

$$\Delta\, u(\lambda, s) = \Delta\, h(\lambda, s) - \mu \Delta\, h_1(\lambda, s) \tag{18}$$

die Lösung

$$h(\lambda, s) = u(\lambda, s) + j(\lambda, s),$$

wo $j(\lambda, s)$ *durch die Gleichung*

$$\Delta j(\lambda, s) = \sum_n \frac{\mu \Delta\, U_1^{(n)}(\lambda, s) + \mu^2\, U_n^2 \Delta\, U^{(n)}(\lambda, s)}{1 - \mu^2\, U_n^2} \tag{19}$$

bestimmt wird.

§ 7. Die Zuwachsgleichung erster Art.

Wir betrachten schliesslich die Gleichung erster Art:

$$\Delta\, g_1(\lambda, s) = (K(s\,.);\ \Delta\, g(\lambda\,.)); \tag{23}$$

es sei hier $g_1(\lambda, s)$ *eine gegebene* Funktion der Klasse $L^{(2)}$, $g(\lambda, s)$ *eine unbekannte* Funktion derselben Klasse. Obwohl nun $g(\lambda, s)$ eine unbekannte Funktion ist, ist das Iterationssystem doch bekannt, nämlich dasselbe wie das Iterationssystem der bekannten Funktion $\varDelta g_1(\lambda, s)$. Wir setzen voraus, dass $\varDelta g_1(\lambda, s)$ durchlaufende Iteration besitzt. Wir beweisen jetzt den folgenden Satz:

Satz 13. *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichuny*

$$\varDelta g_1(\lambda, s) = (K(s\,.);\ \varDelta g(\lambda\,.)) \tag{23}$$

sind:

1) *Die Reihe* $\Sigma \varDelta G^{(\nu)}(\lambda, s)$ *muss absolut und, in Bezug auf* s, *stark konvergiren,*

2) *Die absolut und stark konvergirende Reihe* $\Sigma \varDelta G_1^{(\nu)}(\lambda, s)$ *muss die Summe* $\varDelta g_1(\lambda, s)$ *haben.*

Die Notwendigkeit der Bedingungen leuchtet ein; denn (1) und (2) sind ja beide erfüllt, wenn $g(\lambda, s)$ eine gegebene, in Bezug auf s, $L^{(2)}$ angehörige Funktion ist. Anderseits, ist $\Sigma \varDelta G^{(\nu)}(\lambda, s)$ absolut und stark konvergent, dann ist

$$(K(s\,.);\ \sum_{\nu} \varDelta G^{(\nu)}(\lambda\,.)) = \sum_{\nu} (K(s\,.);\ \varDelta G^{(\nu)}(\lambda\,.)) = \sum_{\nu} \varDelta G_1^{(\nu)}(\lambda, s) = \varDelta g_1(\lambda, s).$$