

REMARQUES GÉOMÉTRIQUES SUR LES ENVELOPPES ET LA PROPAGATION DES ONDES.

Par

J. HADAMARD

à PARIS.

Les considérations qui vont suivre se rattachent indirectement à l'œuvre de Fredholm par l'intermédiaire de nos recherches antérieures sur les équations aux dérivées partielles, telles qu'elles ont été exposées notamment dans ce Journal¹, les *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, le *Bulletin de la Société Mathématique de France*², les *Atti. Soc. It., per il Progresso delle Scienze*³, et récemment dans le *Journal de Mathématiques*.⁴

C'est, on le sait, à Fredholm⁵ que l'on doit l'une des premières et des plus fécondes impulsions dans la recherche des solutions élémentaires des équations linéaires aux dérivées partielles, c'est-à-dire dans la généralisation à ces équations du potentiel élémentaire classique $1/r$. Son analyse s'applique à toute équation linéaire à trois variables indépendantes et à coefficients constants, quel que soit son ordre, pourvu que tous les termes en soient du même ordre, et aussi aux systèmes d'équations à coefficients constants qui interviennent dans l'étude de l'Elasticité en milieu homogène anisotrope. L'équation du second ordre à coefficients analytiques quelconques a été traitée pour le cas de deux variables indépendantes,

¹ T. XLIX, p. 203—244 (*Mémoires publiés en l'honneur de G. MITTAG-LEFFLER*).

² *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup^{re}*, 3^e série t. XXI (1904), p. 535—566 et t. XXII (1905), p. 131—141. *Bull. Soc. Math. Fr.* t. LII (1924), p. 141—178. Voir aussi nos *Lectures on Cauchy's problem*, London—New Haven, 1923 (une traduction française est sous presse).

³ *XIII Congrès*, Naples, 1924.

⁴ T. VIII, 1929, p. 197 (*Mémoires publiés en l'honneur de MM. PICARD et APPELL*).

⁵ *Acta*, T. XXIII, 1900, p. 1—42. Ces recherches fondamentales de Fredholm ont été reprises dans d'importants travaux récents tels que ceux de MM. LE ROUX, ZEILON, HERGLOTZ.

grâce aux travaux de MM. PICARD, HILBERT et HEDRICK, SOMMERFELD¹, puis, pour une première forme, d'équations à trois variables, par M. HOLMGREN.² Nous avons réussi³ à former la solution élémentaire pour l'équation la plus générale du second ordre à coefficients analytiques, ou même non analytiques⁴, de manière à permettre l'intégration de toute équation de cette forme.

Par le fait même du rôle qu'elle joue dans ce dernier problème, la solution élémentaire intervient nécessairement dans toutes les études que le géomètre peut entreprendre sur le célèbre principe de Huyghens. Sous sa forme la plus simple (celle que nous avons appelée précédemment forme *A* ou « majeure » de Huyghens), ce principe se traduit par une sorte de théorème d'addition auquel elle satisfait; mais la formule d'addition dont il s'agit a la forme d'une équation intégrale, se rattachant ainsi à la grande idée introduite dans la science par FREDHOLM. Nous nous sommes proposé, dans les travaux cités plus haut, d'écrire cette formule pour les premières valeurs du nombre m des variables indépendantes et, dans le dernier d'entre eux, nous avons porté notre attention sur le cas de $m = 3$. On a alors l'avantage de pouvoir serrer de près sans difficulté, les figures étant construites dans l'espace ordinaire, le côté géométrique de la question.

C'est uniquement à cette étude géométrique que nous consacrons le présent travail. Nous y abordons, sous ce seul point de vue d'ailleurs, l'étude des ondes à caustiques, dont la nature nous offre de continuel exemples, sans que leur influence sur nos calculs d'intégration ait pu être formulée jusqu'ici.⁵ L'étude géométrique que nous entreprenons en ce moment est, à cet égard, un préliminaire indispensable.

Etant donné l'objet spécial ainsi visé, nous nous sommes bornés aux singularités de type courant, introduisant toutes les hypothèses qui peuvent nous être utiles, pourvu qu'elles soient réalisées dans les exemples concrets que nous offre (au nombre des dimensions près, puisque nous allons raisonner sur des phénomènes plans) la propagation de la lumière. Il y aurait assurément place pour une étude plus précise de ces hypothèses et, par conséquent, du degré de généralité de nos résultats.

¹ PICARD, *C. R. Ac. Sc.* 6 Août, 1891 et 5 juin, 1900. HILBERT, *Leçons de Göttingue* (1901) (non publié). HEDRICK, thèse Göttingue 1906, SOMMERFELD, *Encycl. der Math.-Wiss.* II A J C, 1900.

² *Arkiv för Mat., Astr. och Phys.*, t. 1.

³ loc. cit. p. 247 n. 2.

⁴ *C. R. Ac. Sc.* t. CLXX (1920) p. 149. Voir aussi l'ouvrage cité et E. E. LEVI, *Circolo Mat. di Palermo*, t. XXIV, 1907, p. 275.

⁵ Rappelons cependant les résultats bien connus de GOUY (*Annales de Chimie et Physique* 6^e série, tome 24, page 145). Voir à leur sujet JULIUS, *Arch. Néerl.* tome 28; ZEEMAN *ibid.* 2^e série, tome 5, 1901; SAGNAC-BOLTZMANN-*Festschr.*, 1904.

Ajoutons que la plus grande partie de celle-ci a été résumée dans une récente communication adressée au Congrès des Mathématiciens slaves (réunion de Varsovie, Septembre 1929).

1. Nous partons d'une famille de surfaces à deux paramètres

$$(1) \quad z = F(x, y, \alpha, \beta)$$

qui peut être considérée comme intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre (C). Cette dernière elle-même, dans les applications qui nous intéresseront, sera du second degré et proviendra d'une équation linéaire du second ordre (E) dont elle définira les caractéristiques. Nous adopterons d'ailleurs toujours la terminologie correspondant à cette dernière hypothèse, c'est-à-dire que nous appellerons »caractéristiques» les solutions de l'équation (C) et »bicaractéristiques», les caractéristiques de (C).

Nous portons tout d'abord notre attention sur une caractéristique particulière Γ_0 ainsi que sur une certaine bicaractéristique λ appartenant à Γ_0 . L'intégrale complète (1) sera supposée dépourvue de singularités. Mais il n'en sera pas de même de la surface Γ_0 , qui s'en déduit par la construction connue de Lagrange, c'est-à-dire comme une enveloppe, et ce sont précisément les singularités de Γ_0 qui vont nous intéresser. On ne diminuera d'ailleurs pas la généralité en admettant que la relation entre α et β qui, d'après la méthode de Lagrange, engendre Γ_0 n'est autre que $\beta = 0$, et que la bicaractéristique λ correspond à $\alpha = 0$, de sorte que les équations

$$(2) \quad z = F(x, y, \alpha, 0),$$

$$(2') \quad \frac{\partial F(x, y, \alpha, 0)}{\partial \alpha} = 0$$

définissent la bicaractéristique λ lorsqu'on y fait $\alpha = 0$ et la surface Γ_0 lorsqu'on élimine α entre elles.

D'un point quelconque¹ (x_2, y_2, z_2) pris sur λ , comme sommet, construisons le conoïde caractéristique, c'est-à-dire la solution de (C) obtenue en liant α et β par la relation

$$(3) \quad z_2 - F(x_2, y_2, \alpha, \beta) = 0.$$

Ainsi qu'il est bien connu, ce conoïde Γ_2 se raccorde à Γ_0 tout le long de

¹ Notation adoptée dans un but de concordance entre le Mémoire actuel et les précédents.

la bicaractéristique. Ceci correspond, en somme, au fait que, (2) et (2') étant vérifiées pour $\alpha = 0$, $x = x_2$, $y = y_2$, $z = z_2$, pendant que $\frac{\partial F}{\partial \beta}$ est différent de zéro¹,

la relation (3) donne $\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$ pour $\alpha = 0$, de sorte que l'équation

$$(3') \quad \frac{\partial F(x, y, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} + \frac{d\beta}{d\alpha} \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0,$$

qu'il faut lui adjoindre pour définir le conoïde Γ_2 , est vérifiée en même temps que (2'), en chaque point de λ .

Nous couperons les deux surfaces Γ_0 et Γ_2 par une même surface arbitraire S_1 , sorte d'écran² sur lequel elles seront représentées par leurs traces. L'équation (C) étant supposée du second degré, ou, plus généralement, le cône (enveloppe de plans) qu'elle définit en chaque point étant supposé convexe, S_1 sera supposé être une »surface d'espace», c'est-à-dire que son plan tangent en chaque point sera extérieur au cône défini par l'équation au même point: il en résulte qu'un plan parallèle à celui-là coupera suivant une courbe fermée le cône analogue ayant pour sommet un point infiniment voisin quelconque. Dès lors, pour des raisons de continuité, il en sera de même lorsqu'on remplacera le plan tangent par la surface S_1 elle-même et le cône par le conoïde caractéristique de même sommet. Nous admettrons non seulement qu'il en est ainsi, mais qu'il continuera à en être de même lorsque le sommet du conoïde occupera sur la bicaractéristique λ les diverses positions que nous serons conduits à envisager pour lui: ceci est évidemment une condition que nous pouvons imposer à notre écran S_1 .

Γ_0 se raccorde, tout le long de λ , avec l'intégrale complète G qui est représentée par l'équation (1) lorsqu'on fait, dans cette dernière, $\alpha = \beta = 0$. Nous pouvons d'ailleurs admettre que G est le plan des x, y ; la ligne bicaractéristique λ , l'axe des x et l'écran S_1 , un plan $x = x_1$ parallèle au plan des y, z .

2. Le point 2, — c'est-à-dire le point (x_2, y_2, z_2) —, étant d'abord placé au point 0 d'intersection de λ avec l'écran, déplaçons le progressivement sur λ dans un sens déterminé que nous considérons comme positif. La courbe fermée γ_2 , trace du conoïde correspondant, d'abord infiniment petite, se déformera progressivement tout en restant tangente, à l'origine, à la trace γ_0 de la surface Γ_0 .

¹ S'il en était autrement, on serait présence d'une intégrale singulière de l'équation (C), hypothèse que nous excluons.

² C'est le rôle qu'elle jouerait dans l'interprétation optique des considérations actuelles.

Proposons nous d'étudier l'influence que le déplacement du sommet 2 exerce sur les relations mutuelles des deux courbes.

Plus spécialement, notre caractéristique I_0 , enveloppe de la famille de surfaces (2), pourra admettre une arête de rebroussement A , même si, comme nous le supposerons, chacune des surfaces (2) et, d'une manière générale, l'intégrale complète (1) est dépourvue de singularités. Cette arête ou, comme nous l'appellerons encore, cette *caustique*, est tangente, comme on le sait, à une série de bicaractéristiques successives. Nous allons voir que si elle l'est à λ , et si le point 2 vient coïncider avec le point de contact, *les deux courbes γ_0, γ_2 auront entre elles, à ce moment là, un contact du second ordre.*

Le point de contact de λ avec la caustique s'obtient en adjoignant à (2), (2') la troisième équation

$$(2'') \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = 0.$$

D'autre part, sur la surface du conoïde, c'est-à-dire en considérant α et β comme liés par la relation (3), la valeur de $\frac{d\beta}{d\alpha}$ est donnée par β' et celle de $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ par la condition (où x, y, z sont encore remplacés par x_2, y_2, z_2)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{d\beta}{d\alpha} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \left(\frac{d\beta}{d\alpha} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = 0.$$

Ecartons toujours l'hypothèse où $\frac{\partial F}{\partial \beta}$ s'annulerait au point 2 en même temps que $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$. Nous voyons que pour toute position de ce point sur la bicaractéristique λ , la relation (3) donne

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

et que, lorsqu'il vient au point de contact de λ avec l'arête de rebroussement, elle donne en outre

$$(4) \quad \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = 0.$$

D'après cela si nous figurons, dans le plan des $\alpha\beta$, la ligne L représentée par l'équation (3), nous voyons qu'à l'origine des coordonnées dans ce plan, elle a

un contact du second ordre avec l'axe des α (autrement dit, en général, un point d'inflexion).

Or, ainsi qu'il est bien connu, entre cette ligne L et la section qui nous intéresse, les relations (3), (3') établissent une transformation de contact¹; et d'autre part, on sait qu'une transformation, si elle se présente régulièrement (au sens qui va être précisé dans un instant), conserve les ordres de contact. Il est aisé de vérifier, que les choses se passent bien ainsi. Soit, pour abrégé l'écriture,

$$z = F[x, y, \alpha, g(\alpha)] = \Phi(x, y, \alpha).$$

l'équation qu'on déduit de (1) en y remplaçant β par sa valeur en fonction de α , soit $\beta = g(\alpha)$ — en fait, par celle qu'on obtient en résolvant, par rapport à β , l'équation (3). Les dérivées partielles successives de la fonction Φ par rapport à α contiendront seulement, outre celles de F , les dérivées de même ordre au plus de β par rapport à α . L'équation (3') qui, jointe à (3), définit le conoïde s'écrit

$$(5') \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0$$

et le fait classique du contact entre l'enveloppe et l'enveloppée qui en résulte s'exprime, en ce qui regarde leurs traces sur S_1 , c'est-à-dire y faisant $x = x_1$, par la relation

$$(6) \quad \frac{dz}{dy} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

La valeur de dz/dy est donc indépendante de la valeur que prend la dérivée $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$ telle qu'on la tire de l'équation implicite (5'). Mais pour que la transformation de contact qui permet de passer de l'équation (3) à (2) soit dite se comporter régulièrement, il importe de s'assurer que cette dernière dérivée n'est ni nulle ni infinie pour $y = z = \alpha = 0$. Or, en vertu de l'équation

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

qui la fournit, la première circonstance se présenterait pour

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial y} = 0,$$

¹ On sait le parti que M. VESSIOT a déjà tiré de cette circonstance pour l'étude des ondes.

la seconde pour

$$(5'') \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = 0.$$

L'un et l'autre cas seront exclus. Le premier donnerait, puisque $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ est supposé identiquement nul en x pour $y=0$, un point singulier de la ligne (5'), c'est-à-dire de la bicaractéristique considérée comme définie par cette équation. Celle-ci, s'il se produisait, définirait en général, dans le plan des xy , outre l'axe des x , une seconde ligne coupant cet axe au point $x=x_1$. La seconde hypothèse (5'') signifierait que le point $(x, 0, 0)$ appartiendrait à l'arête de rebroussement du conoïde Γ_2 . Nous supposons toujours le point z assez rapproché de l'écran S_1 pour qu'une telle circonstance ne puisse pas se produire.

Ceci acquis, la dérivée seconde $d^2 z/dy^2$ n'est autre que la dérivée totale, par rapport à y , de l'expression (5), soit (en tenant compte de (5'))

$$(9) \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} \left(\frac{d\alpha}{dy} \right)^2.$$

Dans cette formule, la quantité $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$ est fournie par (7). En résumé, les dérivées partielles de Φ par rapport à α qui figurent dans le calcul de $d^2 z/dy^2$ sont les dérivées première et seconde, et tels sont, par conséquent, les ordres des dérivées de β par rapport à α qui interviennent dans ce calcul. Si donc $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}$ sont nuls à l'origine, la valeur initiale de $d^2 z/dy^2$ sur la trace du conoïde défini par les équations (5), (5') sera bien la même que sur la trace de la surface Γ_0 .

3. L'enveloppe Γ_0 , qui est singulière tout le long de la caustique, peut présenter (et, dans les cas que nous examinerons plus loin, présente nécessairement) en des points isolés, une singularité plus élevée: il en est ainsi pour tout point où l'on a, outre (2), (2), et (2'')

$$(2''') \quad \frac{\partial^3 F}{\partial \alpha^3} = 0.$$

Un tel point, ainsi qu'il est connu et que nous le constaterons à nouveau un peu plus loin, est, pour la caustique A , un point de rebroussement. Mais avant de le considérer en lui-même, restons encore au point de vue où nous

venons de nous placer et examinons l'effet qui en résulte en ce qui concerne les relations des deux courbes (γ_0) et (γ_2) , traces de Γ_0 et du conoïde Γ_2 sur l'écran S_1 .

Lorsqu'au point 2, sommet du conoïde, les relations (2), (2'), (2''), (2''') sont vérifiées simultanément, les deux lignes γ_0 et γ_2 ont, au point $y = z = 0$, un contact du troisième ordre. C'est ce qu'on voit par un raisonnement tout semblable à celui qui précède. En premier lieu, la différentiation totale de la relation (3) donne évidemment une nouvelle relation où tous les termes contiennent en facteur $\frac{d\beta}{d\alpha}$ ou $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$, sauf deux: nous n'aurons donc à écrire que ces deux derniers, savoir

$$\frac{\partial^3 F}{\partial \alpha^3} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{d^3 \beta}{d \alpha^3}$$

et, d'après (2'''), on a, en (x_2, y_2, z_2) et pour $\alpha = 0$, $\frac{\partial^3 F}{\partial \alpha^3} = 0$, avec $\frac{\partial F}{\partial \beta} \neq 0$.

La ligne L lieu du point (α, β) et la droite $\beta = 0$ ayant ainsi un contact du troisième ordre, il doit en être de même des lignes (γ_2) , (γ_0) qui, nous l'avons déjà noté, leur correspondent par une même transformation de contact. C'est ce qui résulte bien du calcul de $d^3 z/dy^3$ à l'aide de (5) et de (5'). Cette dérivée, d'une manière analogue à (9), s'exprime en effet par les dérivées partielles de Φ jusqu'au troisième ordre et les dérivées de α par rapport à y jusqu'au second, le coefficient de la dérivée troisième étant nul d'après (5'). Or ces dernières dérivées $d^h \alpha/dy^h$, qui se déduisent de (5'), n'introduisent elles mêmes, pour $h = 1, 2$, que les dérivées de Φ jusqu'au troisième ordre et, par conséquent, les dérivées de g jusqu'au troisième ordre.

Inversement, si les lignes γ_0 et γ_2 tracées sur l'écran S_1 ont entre elles un contact du troisième ordre, la même relation existe entre les deux lignes qui leur correspondent dans la transformation de contact, à savoir l'axe des α et la ligne L définie par l'équation (3), de sorte que $\frac{d^3 \beta}{d \alpha^3}$ est nul à l'origine sur cette dernière: la relation (2''') est donc vérifiée au point 2.

4. Une première conséquence, aisément vérifiable sur les modèles de surfaces enveloppes de l'espèce que nous étudions en ce moment, ressort de ce que nous venons de trouver: *la caustique ne peut pas être la première singularité qui se présente lorsqu'on se déplace sur la surface Γ_0 , — par exemple sur une bicaractéristique quelconque, à des bicaractéristiques exceptionnelles près —, en partant de la courbe γ_0 . Avant d'arriver à cette caustique, on rencontre d'abord nécessairement une ligne double de la surface.*

Considérons en effet, à mesure que le point z se déplace sur la bicaractéristique λ , la déformation correspondante de la courbe γ_2 , trace du conoïde qui a ce point pour sommet. Initialement, γ_2 sera une courbe fermée très petite tangente à γ_0 et entièrement située d'un même côté de cette dernière ligne.

Au contraire, lorsque le point mobile z sera parvenu au point de contact de λ avec la caustique, nous venons de voir qu'il y aura entre γ_0 et γ_2 un contact du second ordre et, s'il s'agit d'un point ordinaire de la caustique, du second ordre seulement. Dès lors, en un tel point de contact, les deux courbes devront se traverser, toute une partie, non infiniment petite, de la ligne γ_2 ayant changé de côté par rapport à γ_0 .

Le passage direct entre une telle disposition et celle qui se présentait au point de départ est impossible. Il est nécessaire que, préalablement, la courbe γ_2 tout en restant tangente à γ_0 au pied de la bicaractéristique λ , l'ait traversée par ailleurs et que, tout d'abord, elle lui ait été tangente en un point distinct du premier. A ce moment, le point z devait appartenir à une seconde bicaractéristique tracée sur Γ_0 et, par conséquent, se trouver sur une ligne double de cette surface.

Ce raisonnement ne souffre d'exception que si la position finale du point z correspond à un contact du troisième ordre entre γ_2 et γ_0 , c'est-à-dire à la singularité considérée au n° précédent; dans le cas les deux courbes γ_0 et γ_2 peuvent ne pas se traverser au moment où l'ordre du contact s'élève.

5. L'une des difficultés des questions que nous avons à traiter provient assurément de la forme géométrique assez compliquée que présentent des surfaces telles que Γ_0 , au voisinage de singularités telles que celles dont nous venons de parler. Mais il existe aujourd'hui des modèles en fils bien connus de surfaces de cette espèce, visibles dans toutes les collections de Géométrie. Le plus classique est la surface de pente constante passant par une ellipse.

Par contre, on ne connaissait, jusqu'à ces derniers temps, aucun exemple analogue dans lequel la surface Γ_0 soit elle même un conoïde, cas le plus intéressant de tous au point de vue de notre étude générale, parce que c'est celui de l'onde directe issue d'un point unique et qu'il se présente nécessairement lorsqu'on veut résoudre le problème de Cauchy, à l'exclusion des problèmes mixtes (donc de la réflexion), pour une équation aux dérivées partielles du second ordre. Dans les cas classiques où l'on sait intégrer l'équation des géodésiques et, par conséquent, déterminer le conoïde caractéristique, celui-ci ne présente pas d'arête de rebroussement. A vrai dire, indépendamment des équations à coefficients

constants pour lesquels les conoïdes caractéristiques sont des cones ordinaires, on ne peut guère citer, au moins à première vue, que le cas où l'élément linéaire initial est l'élément non euclidien de Lobatchewsky ou de Riemann: mais alors les conoïdes caractéristiques sont dépourvus de singularité autre que leur sommet (géométrie de Lobatchewsky) ou présentent (géométrie de Riemann) une singularité tout exceptionnelle et aberrante, à savoir un second point conique antipode du sommet.

Cette lacune a été complétée dans un récent travail de M. Galbrun¹ consacré à la propagation du son dans une atmosphère en mouvement. Le phénomène est d'ailleurs étudié dans l'espace ordinaire et, par conséquent, dans l'espace-temps à quatre dimensions: l'équation des caractéristiques, telle qu'on la déduit des équations dynamiques du problème, est

$$(10) \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} + u \frac{\partial \Pi}{\partial x} + v \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)^2 - c^2 \left[\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0$$

où $\Pi(x, y, z, t)$ est le premier membre de l'équation d'un front d'onde: u, v, c , des fonctions données de la variable z . Il est aisé de se placer dans les conditions qui nous intéressent actuellement, c'est-à-dire dans l'espace-temps à trois dimensions, en considérant les solutions indépendantes de y et supposant nulle, à cet effet, la quantité v .

Les bicaractéristiques ou rayons sonores se déterminent par quadratures.²

La discussion de leur forme (voir le Mémoire cité de M. Galbrun) met en évidence deux catégories, suivant que l'altitude y varie ou non toujours dans un même sens; et si l'on compare ceux de ces rayons qui partent d'un même point à un même instant, on constatera que ceux d'entre eux pour lesquels l'altitude présente un maximum touchent une même courbe, caustique de la surface d'onde.

Pour certains d'entre eux se présente même la singularité supérieure dont

¹ *Journal de Mathématiques*, tome VII, 1928 (volume dédié MM. Appell et Picard) p. 289—318.

² L'équation (C) admet l'intégrale complète

$$\alpha x + \beta t + \gamma y + \delta + \varpi(z), \quad \varpi(z) = \int \sqrt{\frac{1}{c^2}(\beta + \alpha u + \gamma v)^2 - \alpha^2 - \gamma^2} dz$$

aux constantes arbitraires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, d'où l'on déduit immédiatement les équations des bicaractéristiques cherchées (équations (23)—(28) de M. Galbrun). C'est cette intégrale (en y annulant la fonction v et la constante γ) qui, résolue par rapport à z , donnerait, en l'espèce, l'équation (1) qui nous sert de point de départ.

il a été question aux numéros précédents, à savoir un point de rebroussement de la caustique.

6. Dans une discussion qu'il se contente de résumer sommairement dans le travail cité, mais dont il a eu l'amabilité de me communiquer le détail, M. Galbrun étudie la forme de la surface autour d'un point ω de cette nature. Les résultats d'une telle étude ont d'ailleurs (voir le travail cité) des conséquences importantes au point de vue des phénomènes sonores. Géométriquement (du moins dans le cas simplifié où nous nous plaçons ici en faisant abstraction de l'une des variables), ils mettent en évidence une forme tout analogue à celle que l'on constate dans les mêmes conditions (c'est-à-dire au voisinage des points ω) sur la surface de pente constante menée par une ellipse, et qui, pour les surfaces algébriques, a été décrite par G. Fontené.¹

Il est aisé de voir que cette forme, — sorte de trièdre à deux dièdres nuls ayant son sommet au point ω — s'applique au cas général d'une enveloppe telle que nous l'avons considérée dans ce qui précède.

Si la famille de surfaces (2) est telle que, pour $x=y=0$, $\alpha=0$, on ait, outre $F=0$, les relations (2'), (2''), (2'''), on peut, par un changement de variable régulier exécuté sur le paramètre α , combiné avec une transformation ponctuelle régulière sur le point (x, y, z) , écrire son équation générale sous la forme

$$(11) \quad z = F(x, y, \alpha) = \alpha y - \alpha^2 x + \alpha^3 (lx + my + \dots) + \alpha^4 (1 + \dots) + \dots$$

L'équation (2') s'écrit

$$(11') \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 = y - 2\alpha x + 3\alpha^2 (lx + my + \dots) + 4\alpha^3 (1 + \dots) + \dots,$$

et peut se résoudre par rapport à y sous la forme

$$(12) \quad y = (2\alpha - 3l\alpha^2)x - 4\alpha^3(1 + \dots) + \dots = \psi(x, \alpha),$$

le premier membre de (11') ne différant d'ailleurs de $y - \psi(x, \alpha)$ que par un »facteur unité», c'est-à-dire par un facteur développable (au moins jusqu'à un certain ordre) suivant les puissances de x, y, α avec un terme constant différent

¹ *Nouv. Ann. de Math.* 1907, p. 433 et suiv. Voir particulièrement p. 437 et la figure correspondante.

de zéro. Les équations (II) et (II') ou (12) définissent notre enveloppe. Celle qu'il faut les adjoindre pour définir la caustique s'écrit

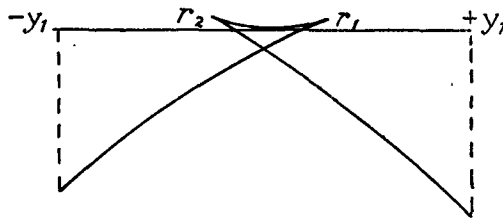
$$(II'') \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = (2 - 6l\alpha)x - 12\alpha^2(1 + \dots) + \dots = 0$$

Les valeurs de x, y, z , telles que les fournissent successivement, en fonction de α , les équations (II''), (II'), (II), commençant respectivement par de termes en $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$, on voit bien, tout d'abord, que la caustique présente un rebroussement à l'origine.

Donnons maintenant à x une valeur déterminée très petite et étudions la section correspondante de la surface. Soit d'abord $x > 0$. Pour α infiniment petit, il apparaît sur les équations (12) et (II) que z aura le signe + et y le signe de α ; que, en outre, y est fonction croissante de α dans un certain intervalle de valeurs de α autour de zéro, intervalle limité par les deux valeurs $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 < 0$ de α pour lesquelles $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$ s'annule.

Lorsque α atteint et dépasse en croissant la valeur α_1 (ou, en décroissant, la valeur α_2), $\frac{dy}{d\alpha}$ s'annule et change de signe, et il en est de même de la quantité

$$(13) \quad \frac{dz}{d\alpha} = \frac{dy}{d\alpha} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dy}{d\alpha} (\alpha + \dots)$$



dz/dy est d'ailleurs, d'après cette dernière équation, fonction croissante de α pour x et α assez petits, de sorte que, aux deux points r_1, r_2 correspondant à $\alpha = \alpha_1, \alpha_2$ (points de la caustique) prennent respectivement naissance deux nouveaux arcs entièrement situés au dessous de l'arc primitif (fig. ci jointe). Sur chacun d'eux, y , d'abord décroissant en valeur absolue, continue à varier dans un sens constant: il croîtra sur l'un de ces nouveaux arcs au moins jusqu'à une certaine

valeur positive fixe y_1 et décroîtra sur l'autre au moins jusqu'à $y = -y_1$. Si x a été pris assez petit en valeur absolue pour que les y de l'arête de rebroussement soient compris entre $-y_1$ et $+y_1$, les deux arcs en question devront se couper. La figure ainsi obtenue est bien celle à laquelle est arrivé M. Galbrun et conforme à ce que l'on constate sur le modèle connu de surface à pente constante.

Pour $x < 0$, les choses sont plus simples: dans un certain intervalle de valeurs du paramètre, z est toujours négatif et y du signe de $-\alpha$, de sorte qu'on a une nappe d'apparence régulière, située au dessous du plan des xy .

L'arc primitif, tangent au plan des xy , engendre, lorsque x varie en restant positif, une première face (face supérieure) du trièdre, caractérisée, comme on le voit, par le fait que le premier membre de (11'') est positif; les deux autres arcs, sur lesquels $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$ est négatif, engendrent, pour $x > 0$, deux faces inférieures se coupant suivant une ligne double et continuant, de part et d'autre de l'axe des x , la nappe unique qui correspond à $x < 0$.

Chaque bicaractéristique voisine de l'axe des x a, avec l'arête de rebroussement, un point de contact dont l'abscisse x' , toujours positive, est donnée par (11''). La face supérieure du trièdre est engendrée par les arcs de bicaractéristiques correspondant à $x > x'$; les arcs correspondant à $x < x'$ engendrent respectivement les deux faces inférieures et, pour $x < 0$, la nappe sans singularité.

On voit en particulier, conformément à ce que nous aurons à constater dans un instant, qu'un point tel que ω appartient à une ligne double de la surface, ligne qui s'arrête en ce point. Il appartient d'ailleurs à la catégorie connue des »points pinces«.

7. Sur la surface S_1 , qui est toujours supposée surface d'espace, soit tracée la courbe γ_0 supposée fermée, délimitant, sur S_1 , une aire déterminée, et prenons pour Γ_0 l'une des deux nappes caractéristiques qui passent par cette courbe. Supposons que chacune des bicaractéristiques tracées sur Γ_0 donne un point de l'arête de rebroussement et, par conséquent, d'après ce qui précède, un point de la ligne double, de sorte que l'une et l'autre de ces lignes sont fermées.

Existera-t-il sur la première d'entre elles des points de rebroussement?

Au premier abord, il n'y a aucune raison pour qu'il en soit ainsi. Prenant une courbe fermée A arbitraire — donc, en général, dépourvue de points de rebroussement —, rien n'empêche de mener, par chacun de ses points, une surface Γ_0 ayant avec elle un contact du second ordre. L'enveloppe de ces surfaces aurait A pour arête de rebroussement.

Il en est autrement lorsque la surface variable vérifie une équation aux dérivées partielles de la catégorie considérée dans ce qui précède, c'est-à-dire dont le cône caractéristique en chaque point est convexe. C'est ce que nous allons montrer moyennant une précision apportée sur un point à nos hypothèses géométriques précédentes. Nous supposons que S_1 fait partie d'une famille à un paramètre composée de surfaces, qui toutes sont surfaces d'espace en chacun de leurs points et dont il passe une et une seule par chaque point de la région considérée.¹

Cette hypothèse permet évidemment de distinguer, sur chaque cône caractéristique et sur chaque conoïde caractéristique, une nappe positive et une nappe négative, chacune de ces nappes variant d'une manière continue avec la position du sommet, et d'assigner de même, sur chaque bicaractéristique, un sens positif.

Soient alors considérées, en un point quelconque 2 de I_0 situé entre la ligne γ_0 et la ligne double, la bicaractéristique correspondante λ et la bande infiniment petite de surface voisine de cette bicaractéristique. Nous serons conduits à distinguer, sur cette bande ou sur toute autre surface caractéristique tangente, un côté droit et un côté gauche, à savoir ceux que distinguerait un observateur placé suivant le sens positif de la bicaractéristique et regardant l'intérieur de la nappe positive.

En particulier, il en résulte un choix déterminé de sens direct sur la ligne γ_0 .

Si, au point 2, deux surfaces caractéristiques se coupent et si, sur la tangente à la ligne d'intersection, on fait choix d'un sens, il est clair que la demi-droite ainsi considérée sera de côtés différents par rapport aux deux directions bicaractéristiques.

Or, c'est précisément ce qui se produira en un point 2 pris arbitrairement sur la ligne double de notre surface I_0 et par lequel passent deux bicaractéristiques issues respectivement de deux points 1 et 1' de γ_0 .

Tant que les deux points 1 et 1' et, par conséquent, aussi les deux plans tangents au point 2 seront distincts, il existera, en vertu du théorème des fonctions implicites, un arc de ligne double comprenant ce point à son intérieur et le long duquel on pourra cheminer dans un sens déterminé quelconque. Il résulte de ce qui précède que, dans ce cheminement, *les deux points 1 et 1' se déplaceront en sens contraires.*

¹ Dans toutes les applications de Physique mathématique, les surfaces $t = \text{const.}$, t désignant le temps, possèdent la propriété dont il s'agit.

Un tel cheminement ne pourra être arrêté que par l'une des deux circonstances suivantes:

1° ou bien le point z s'éloignera à l'infini sur la nappe de surface Γ_0 ;

2° ou bien les points 1 et $1'$ viendront à coïncider.

Nous avons, par hypothèse, exclu le premier de ces deux cas. Dans le second, le conoïde caractéristique de sommet $2a$, avec la ligne γ_0 , quatre intersections confondues, ce qui montre que z est un point de rebroussement de la caustique.

C. Q. F. D.

