IVAR FREDHOLM.

»L'importance d'un fait se mesure donc à son rendement, c'est-à-dire, à la quantité de pensée qu'elle permet d'économiser.»

»Si un résultat nouveau a du prix, c'est quand, en reliant des éléments connus depuis longtemps, mais jusque-là épars et paraissant étrangers les uns aux autres, il introduit subitement l'ordre là où régnait l'apparence du désordre. Il nous permet alors de voir d'un coup d'œil chacun de ces éléments et la place qu'il occupe dans l'ensemble. Ce fait nouveau non-seulement est précieux par lui-même, mais lui seul donne leur valeur à tous les faits anciens qu'il relie.»

(POINCARÉ, Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici, Vol. I, p. 169.)

Dans le discours mémorable dont j'ai extrait les lignes ci-dessus, le premier des géomètres français, passant en revue tout ce que, en 1908, l'avenir des sciences mathémetiques lui paraissait promettre, insiste longuement sur l'importance présumable de la résolution générale, assez récente encore, des équations intégrales de Fredholm. Aujourd'hui que l'auteur de cette découverte est mort depuis à peu près trois ans, son œuvre compte parmi les grands événements classiques de l'histoire de la science.

Né à Stockholm le 7 avril 1866, ERIK IVAR FREDHOLM obtint après des études régulières le grade de docteur ès sciences à Upsal en 1898, après quoi il fut attaché à l'Université de Stockholm comme Maître de Conférences de Physique mathématique. Il a rempli cette charge jusqu'à ce que, en 1906, il fût nommé professeur de »Mécanique rationnelle et Physique mathématique» à la même université. Il mourut, le 17 août 1927, laissant en deuil sa femme et quatre enfants.

Ces quelques dates résument les principaux faits visibles d'une vie dont l'aspect retiré et sédentaire cachait une intense activité mentale. Si, de son vivant, Fredholm était, en dehors du monde scientifique, presque un inconnu dans son propre pays, la faute en est à lui-même. Son génie sincère, toujours soucieux d'étendre ses connaissances dans les directions les plus diverses, ne s'est jamais plu aux apparences de la gloire.

Le milieu, d'où est sorti Fredholm, on le rencontre souvent dans l'histoire de la civilisation moderne, surtout peut-être dans celle de l'Angleterre et des pays du Nord. La famille du père, qui était négociant à Stockholm, et celle de sa mère, née Stenberg, appartenaient toutes les deux à cette haute bourgeoisie commerciale, qui, par la diversité de ses intérêts ainsi que par la solidité de son éducation a si souvent joué un rôle prépondérant dans la vie intellectuelle du pays. A sa mère, dont la famille s'est distinguée par des facultés littéraires et artistiques, Ivar Fredholm devait sans doute son goût artistique inné, ce sentiment si sûr de la perfection dans le métier qui est tellement apparent dans toutes les occupations de sa vie et non moins dans sa production scientifique. Les premières années d'enfance se sont donc écoulées au sein d'une famille dont la position sociale était décidément enviable. On allait prendre les eaux à Ronneby, établissement fréquenté par la bonne société, et le jeune Ivar pouvait s'amuser à aller faire la promenade en équipage aux poneys. Plus tard, le père fit faillite et la situation de la famille devint très modeste.

Le premier certificat d'école primaire encore conservé atteste, en outre du bulletin d'application et de conduite irréprochables, que le futur mathématicien s'est montré »peu habile au calcul au tableau noir». Quoiqu'il en soit, il paraît qu'il est devenu plus tard un écolier brillant. L'examen de baccalauréat passé, il devint d'abord élève à l'école polytechnique de Stockholm. Les études techniques ne durérent qu'un an seulement, mais le fait ne manque pas d'intérêt. En effet Fredholm a, toute sa vie, conservé une grande inclination pour les problèmes techniques, et la belle exactitude de certains travaux de mécanique pratique l'a toujours enchanté.

C'est en 1886, à l'âge de vingt ans, qu'il commence sérieusement ses études mathématiques en s'inscrivant à l'Université d'Upsal. L'Université de Stockholm, dont il devait devenir plus tard l'élève le plus illustre et qui était alors, sous la direction de Mittag-Leffler, le centre florissant des mathématiques en Suède, était encore une école libre d'études supérieures et n'avait pas le droit de décerner les certificats d'examens académiques. Auprès de Stockholm, l'enseignement mathématique d'Upsal présentait à cette époque un aspect suranné. On y cultivait surtout certaines traditions géométriques, souvent assez stériles. C'est là du moins l'opinion que professe le novice; il travaille aux surfaces réglées et trouve cela »vraiment peu édifiant». Les cours officiels lui paraissant fades, à quelques exceptions près, comme celui du professeur agrégé Falk, dont il apprécie les conférences sur les fonctions elliptiques, *non seulement* à cause de l'onction remarquable avec laquelle le professeur prononce le nom de la fonction $\wp u$ de Weierstrass. Mais ce cours estimable devra bientôt cesser faute d'auditoire. A l'»Association physico-mathématique», club de discussion des étudiants, dont il devient bientôt un des membres les plus assidus, la bonne volonté est évidemment le plus souvent supérieure aux connaissances mathématiques. Elu secrétaire de cette union, il organise une séance très réussie; la conférence, qui a attiré beaucoup d'auditeurs, traite du développement en série élémentaire du nombre $\frac{\pi}{4}$. Un autre soir, quand il fait la conférence lui-même, l'auditoire, à trois ou quatre membres près, se fait graduellement invisible.

Dans ce monde paisible on entend prononcer le nom de Poincaré, évocateur d'un avenir scientifique bien autrement agité. »La théorie des fonctions fuchsiennes est une des découvertes les plus belles qu'on ait jamais faites. Poincaré est aujourd'hui sans doute un des mathématiciens les plus remarquables. On peut encore attendre beaucoup de lui — il n'a que 34 ans — pourvu que sa production ne tarisse pas.» Ces lignes sont écrites en 1888 et cette année même, après avoir conquis le diplôme de bachelier-ès-sciences, Fredholm se fait inscrire à l'Université de Stockholm. Ce fut peut-être le pas décisif de sa carrière scientifique.

Il devait bientôt acquérir une grande considération parmi l'élite des élèves qui entouraient Mittag-Leffler. Dès le début, il y prit une place à part par son inclination très nette vers la physique théorique. Cette inclination se montre encore dans son premier travail paru, bien que le sujet en appartienne au domaine des mathématiques pures. Dès 1890, sa production commence, et l'entrée est déjà brillante.

Cette première note, »Sur une classe de lignes singulières»[1], publiée en suédois, donne cet exemple particulièrement intéressant d'une fonction n'admettant pas de prolongement analytique au delà du cercle de convergence,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a^{\nu} x^{\nu^2} \qquad (|a| < 1).$$

La propriété en question se démontre d'une façon très élégante. En posant $a=e^v$, $x=e^t$, la fonction ci-dessus devient une solution de l'équation de la propagation de la chaleur

[1] Om en speciell klass af singulära linjer. Öfvers. Vet.-Ak. Stockholm 1890.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}.$$

D'un théorème connu de M^{me} Kowalewsky relatif aux solutions analytiques de cette équation, il s'ensuit immédiatement que φ, considéré comme fonction de t, ne peut être développé en série entière convergente en aucun point de l'axe imaginaire; cet axe constitue donc une frontière analytique de la fonction. Aux yeux de Fredholm, c'était justement la relation avec l'équation de la chaleur qui donnait de l'intérêt à sa série. Il n'a jamais approuvé que Mittag-Leffler, dans sa présentation de »la transcendante remarquable de M. Fredholm»[1], ait surtout insisté sur ce que la fonction possède des dérivées de tous les ordres, continues sur le cercle de convergence, propriété qu'il a regardée comme étant au fond assez banale. La série de Fredholm a sans doute joué un rôle considérable pour stimuler certaines recherches bien connues sur les séries de Taylor et leur comportement sur le cercle de convergence.

Outre celui que je viens de nommer, Fredholm n'a publié qu'un seul travail appartenant à la théorie des fonctions analytiques. C'est la petite note »Sur la méthode de prolongement analytique de M. Mittag-Leffler».[2] Il y présente cet exemple de »fonction génératrice», au sens de Mittag-Leffler,

$$f(u \mid \alpha) = \frac{\log(1-\beta u)}{\log(1-\beta)}, \quad \begin{matrix} \alpha = 1-\beta. \\ 0 \leqq \beta < 1. \end{matrix}$$

Cette fonction permet de représenter une fonction monogène à l'intérieur de l'étoile principale; les coefficients du développement de Mittag-Leffler correspondant sont donnés par des expressions très simples.

J'ai dit que l'intérêt de Fredholm s'était dirigé de bonne heure vers la physique mathématique. Il proclamera plus tard bien expressément cette prédilection, en refusant de participer au concours pour une chaire de mathématiques pures à Stockholm; il trouve une telle charge peu désirable »ayant toujours eu l'ambition de contribuer au développement de la physique mathématique».[3]

Le premier des grands problèmes auxquels sera vouée la substance de son œuvre, est attaqué dans la thèse »Sur les équations de l'équilibre des milieux élastiques anisotropes».[4] (1898.) Les travaux de W. Voigt avaient à cette époque

---

[1] Acta math. T. 15 (1891).
[2] Övers. Vet.-Ak. Stockholm 1901.
[3] Lettre à Mittag-Leffler.
[4] Acta math. T. 23 (1900).

rendu très actuelles les propriétés des cristaux et indiqué que leur étude devait servir à avancer notablement les connaissances de la nature des forces élastiques. Il importait en premier lieu de déterminer la déformation d'un corps cristallin sollicité par des forces extérieures données. Il y avait déjà longtemps que KELVIN (dans sa *Natural Philosophy*) avait démontré que, pour les milieux isotropes, le traitement mathématique de ce problème pouvait être rattaché à l'étude des déformations produites par une seule force localisée en un point arbitraire. Par la supposition de solutions de ce type on saurait représenter la solution correspondant à des forces quelconques distribuées sur certaines frontières. En particulier le cas d'une frontière plane illimitée était important.

En termes modernes, Kelvin traite son problème par la méthodes des solutions fondamentales et le problème analogue, résolu par Fredholm, consiste dans la construction des solutions fondamentales d'un système d'équations aux dérivées partielles, beaucoup plus compliqué et plus général que celui de Kelvin. Partant de l'analogie entre les intégrales de Kelvin et le potentiel newtonien $\frac{1}{r}$, Fredholm se propose la question de trouver, dans le cas anisotrope, des intégrales jouissant des mêmes propriétés essentielles, savoir celles d'être homogènes du degré -1 et d'avoir un seul point singulier réel à distance finie. Il montre d'abord qu'une équation aux dérivées partielles et à coefficients constants de la forme $f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) u = 0$, où f est une forme définie, admet toujours un certain nombre de telles intégrales, pour lesquelles, par un calcul très élégant il donne l'expression

$$u = \sum_1^n \frac{\psi(\xi_\nu, \eta_\nu)}{x_1 f_2(\xi_\nu, \eta_\nu) - x_2 f_1(\xi_\nu, \eta_\nu)}; \quad \left(f_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \ f_2 = \frac{\partial f}{\partial \eta}\right).$$

Ici ψ est un polynome du degré $n-2$, et les ξ_ν, η_ν sont algébriquement déterminés comme les points d'intersection des lignes

$$f(\xi, \eta) = f(\xi, \eta, 1) = 0; \quad x_1 \xi + x_2 \eta + x_3 = 0.$$

Prenant ensuite les équations générales du milieu anisotrope dans la forme

$$\sum_{\mu=1}^{3} \Delta_{\mu\lambda}\, u_\mu = 0, \quad \sum_{\lambda=1}^{3} \Delta_{\lambda\mu}\, v_\lambda = 0,$$

avec

$$\Delta_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha\beta} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}; \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

et dénotant par $\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$ une certaine constante, il trouve par élimination une équation aux dérivées partielles, savoir

$$\begin{vmatrix} \varDelta_{11} & \varDelta_{12} & \varDelta_{13} \\ \varDelta_{21} & \varDelta_{22} & \varDelta_{23} \\ \varDelta_{31} & \varDelta_{32} & \varDelta_{33} \end{vmatrix} v = f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) v = 0,$$

où f est encore une forme définie. Les intégrales homogènes de f, déterminées par la formule ci-dessus, donnent alors la solution du problème de la déformation d'un corps anisotrope illimité, sollicité par une seule force ponctuelle, à condition toutefois que la déformation à l'infini soit nulle. Introduisant finalement ces intégrales dans la formule de Green correspondant au système en question, on obtient des formules intégrales, qui, au cas où les forces sont distribuées arbitrairement à l'intérieur ou sur la frontière d'un corps quelconque, représentent l'analogie complète des formules de Kelvin.

Plus tard[1], Fredholm a complété ces résultats en montrant que les dites intégrales homogènes du degré -1 forment l'ensemble des dérivées d'ordre $n-2$ d'une même intégrale de l'équation $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u = 0$, représentée par la belle formule

$$P = \sum_{1}^{\frac{n}{2}}{}_{\nu} \int_{\xi_0 \eta_0}^{\xi_\nu \eta_\nu} \frac{(\xi x + \eta y + z)^{n-2}}{f_2(\xi, \eta)} d\xi.$$

Cette expression, où l'on suppose toutefois que le genre de la courbe $f(\xi, \eta) = 0$ atteint sa valeur maxima $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, est donc formée par une somme de certaines intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe algébrique

$$f(\xi, \eta) = 0,$$

étendues d'un point arbitraire ξ_0, η_0 jusqu'à ceux des points d'intersection de la courbe avec la ligne droite

$$\xi x + \eta y + z = 0$$

pour lesquelles la partie imaginaire de ξ est positive.

[1] Sur l'intégrale fondamentale d'une équation différentielle elliptique à coefficients constants. Rend. Circ. Mat. Palermo. T. 25 (1908).

Si maintenant cette fonction P est introduite dans la formule de Green relative à l'équation f, on trouve que, par rapport à la représentation d'une solution quelconque de cette équation, elle rend le même service que la fonction $\frac{1}{r}$ dans la théorie de l'équation de Laplace. Ainsi la formule ci-dessus, aux rapports si intéressants avec la théorie des intégrales abéliennes, résout le problème de déterminer l'intégrale fondamentale d'une équation quelconque aux dérivées partielles de type elliptique et à coefficients constants.

L'année qui suivit sa thèse et sa nomination de docent à Stockholm devait être dans la vie de Fredholm et dans l'histoire de la science de la plus grande importance. Il passe le printemps 1899 à Paris en compagnie de E. LINDELÖF. Ce premier et unique voyage d'études proprement dit qu'il ait jamais entrepris, devait le mettre en un précieux contact personnel avec le monde mathématique de l'époque vers lequel il se sentait attiré depuis longtemps déjà. Il entendit les cours de POINCARÉ, de PICARD, d'HADAMARD. Son français, au début peu coulant, lui parut bientôt suffisant pour faire une visite au mathématicien qui, plus que tout autre, avait suscité son admiration. Il raconte que Lindelöf, qui avait déjà fait cette visite, avait trouvé le silence de Poincaré extrêmement pénible; mais il ajoute: »Comme j'étais préparé à cette possibilité de parler surtout moi-même, ma visite réussit assez bien». On ne peut pas nier que celui qui, par la suite, allait rendre visite à Fredholm, n'eût pas, parfois, à regretter de se préparer de la sorte.

Ses lettres de famille parlent aussi de ses relations libres et cordiales avec ses jeunes collègues, PAINLEVÉ, bien connu depuis ses conférences à Stockholm en 1895, BOREL, HADAMARD et d'autres. En été 1899, on était loin d'être calme, à Paris; les discussions mathématiques furent sans doute plus d'une fois laissées pour »l'Affaire». Tout le monde était passionné par le conflit alors à l'ordre du jour de Painlevé avec le général Gonse, et l'on se réjouissait de la décision de la Cour de Cassation de réviser le procès, bien que, dans ce cercle de jeunes radicaux, on eût une méfiance justifiée dans l'impartialité du Conseil de guerre de Rennes. Pour un homme aussi curieux des aspects variés de la culture que Fredholm, Paris ne manquait d'ailleurs pas d'autres sensations. Parmi les 7000 tableaux du Salon, seuls »quelques hommes violets aux cheveux verts» réussissent bien à provoquer son admiration, mais la musique promet davantage; la saison offre événement sur événement. Au Châtelet, on célèbre le cinquantenaire de la mort de Beethoven, et, aux régulières soirées musicales du vieux mathématicien Lemoine, Fredholm entend de la musique de chambre, des concertos de Bach: »on aurait dit que c'était choisi pour moi». Mais, bien qu'il n'oubliât pas non plus les cabarets artistiques, ni Sarah Bernhardt dans »La dame aux camélias», ce sont pourtant les mathématiques qui passent au premier rang, et à Paris »elles sont à un plus haut degré que nulle part ailleurs au monde». Quand, le 19 mai 1899, on l'entend dire que »ces derniers temps, il n'a pas vu ou entendu grand chose [à Paris], mais qu'il a surtout réfléchi aux problèmes de mathématiques», on peut avancer qu'il fait allusion aux questions extrêmement importantes qui, depuis longtemps, avaient germé dans son esprit et s'épanouissaient enfin dans la clarté.

Le 8 août 1899, immédiatement après son retour, il écrit à Mittag-Leffler une lettre dont je reproduis ici les passages essentiels[1].

»Je m'occupe actuellement de certaines recherches d'une assez grande importance pour tous ces problèmes de la physique mathématique qui sont analogues au problème de Dirichlet. Comme certains des résultats sont d'intérêt aussi du point de vue mathématique, vous me permettrez d'en communiquer quelques uns ici.

Soit $f(x, y)$ une fonction continue des variables réelles x, y, définie par exemple pour des x, y, situés entre 0 et 1. Le problème que je traite est, dans sa forme la plus simple, celui-ci:

Trouver une fonction $\varphi(x)$ qui satisfasse à »l'équation intégrale»

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, y) \varphi(y)\, dy = \psi(x),$$

où λ est un paramètre arbitraire et $\psi(x)$ une fonction donnée d'avance.

On peut prouver que la solution de cette équation existe en général, et qu'elle est le rapport de deux séries entières en λ, toujours convergentes. Ces séries de puissances peuvent se représenter d'une façon assez élégante. Le dénominateur, par exemple, est une expression de la forme

$$D = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\underline{|n}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n,$$

où

[1] Voir aussi le fac-similé inséré dans ce volume.

$$f(x_1 \cdots x_n) = \begin{vmatrix} f(x_1, x_1), & f(x_1, x_2), \ldots f(x_1, x_n) \\ f(x_2, x_1), & f(x_2, x_2), \ldots f(x_2, x_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f(x_n, x_1), & f(x_n, x_2), \ldots f(x_n, x_n) \end{vmatrix}.$$

La convergence peut être prouvée à l'aide d'un théorème sur les déterminants, que je n'ai vu cité nulle part, et qui s'énonce de la manière suivante

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{matrix} \right\| < \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2}\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2} \cdots \sqrt{a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \cdots + a_{nn}^2}.$$

Si donc f est la valeur maxima du module de $f(x, y)$ il s'ensuit évidemment que, selon le théorème sur les déterminants, le coefficient de λ^n est inférieur à

$$\frac{f^n \sqrt{n^n}}{\underline{|n}}.$$

Mais la limite de la racine $n^{\text{ième}}$ de cette expression est égale à zéro, et la série D est une fonction entière. Je n'ai pas encore réussi à traiter complètement le cas où $f(x, y)$ devient infini.»

Des quelques indications qu'a données Fredholm on peut conclure qu'il a dû démontrer le théorème relatif aux déterminants par une méthode d'orthogonalisation. Il n'a pas publié sa preuve, car en présentant, en 1900, la première édition de la théorie des équations intégrales, il savait déjà que le théorème était connu; ce théorème, illustre à cause de son importance pour la théorie de Fredholm, porte désormais, on le sait bien, le nom de M. Hadamard.[1]

Les sept petites pages in-8° de la note »Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet»[2] contiennent déjà l'essentiel de la théorie de l'équation de Fredholm, y comprise »l'alternative» ainsi que l'application au problème du potentiel, son point de départ. On n'y trouve aucune indication sur le procédé inductif qui avait fait ressortir ces formules comme un cas limite des formules élémentaires des systèmes d'équations linéaires. Dans le mémoire définitif, »Sur une classe d'équations fonctionnelles»[3], paru trois ans plus tard,

[1] Cf. l'exposé de Hellinger-Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. (Encyklopädie der math. Wissenschaften II C 13, p. 1356.)

[2] Övers. Vet.-Ak. Stockholm 1900.

[3] Acta mathematica. T. 27 (1903).

les résultats sont exposés de la même façon synthétique, mais la théorie est complétée sous certains rapports importants. D'abord, l'analogie avec les systèmes d'équations est rendue parfaite par l'introduction des »mineurs» successifs du déterminant D et par la preuve que, dans le cas où λ est une racine multiple d'ordre m de l'équation déterminante $D(\lambda)=0$, l'équation intégrale homogène admet n solutions linéairement distinctes; on a

$$1 \leqq n \leqq m$$

et n est justement l'ordre du premier mineur qui ne s'annule pas identiquement. Ensuite le mémoire donne les conditions pour que, dans ce cas, l'équation non homogène possède une solution, et finalement, par l'artifice des »noyaux»[1] itérés les résultats sont étendus au cas, important pour les applications, où la fonction $f(x, y)$ devient infinie sur la »diagonale» $x=y$, mais de telle façon que $|x-y|^\alpha f(x, y)$ reste fini.

Dans ses derniers travaux publiés[2] Fredholm est revenu aux équations intégrales. Les formules générales, si belles du point de vue théorique, s'adaptent très mal au calcul pratique, et le nombre des équations résolubles explicitement est encore très restreint. Ce défaut, il l'a toujours vivement senti; en se demandant s'il n'était pas possible d'élargir nos connaissances dans cette direction, il a été amené à étudier l'équation correspondant au problème de Neumann pour le demi-plan, savoir

$$\varphi(t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s)\, \varphi(s)\, ds = \alpha(t),$$

où

$$f(t, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)},$$

la variable complexe parcourant la courbe C quand s varie entre $-\infty$ et $+\infty$. Dans le cas où $x(s)+iy(s)=\Phi(s)$ est une fonction rationnelle, le développement de Neumann est comparativement accessible, les noyaux itérés

---

[1] Övers. Vet.-Ak. Stockholm 1900.

[2] Sur une équation intégrale à noyau analytique. 5 Skand. mat.-kongr. Helsingfors 1922. Acta math. T. 45 (1925).

$$f_\nu(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x_1) f(x_1, x_2) \cdots f(x_{\nu-1}, s)\, dx_1 \cdots dx_{\nu-1}$$

se réduisant à des sommes de résidus.

Le résultat se rattache à une question intéressante de la théorie du potentiel et des fonctions analytiques. Si l'on considère un cylindre infini possédant la section C, la densité de l'électricité en équilibre sur C est déterminée par

$$\varepsilon(\sigma)\, d\sigma = \omega(s)\, ds,$$

où $\omega(s)$ est la solution de l'équation homogène

$$\omega(s) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s)\, \omega(t)\, dt = 0,$$

solution qui existe certainement en vertu de la discussion bien connue montrant que $\lambda = -1$ est une valeur d'exception du paramètre. On peut déterminer $\omega(s)$ par la relation

$$\omega(s) = \lim_{\nu = \infty} f_\nu(t, s),$$

limite indépendante de t. Si maintenant on introduit

$$K(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega(s)\, ds}{z - \Phi(s)}, \qquad K(z) = \frac{F'(z)}{F(z)},$$

et en posant finalement

$$f(z) = F(\Phi(z)),$$

on a défini une fonction analytique uniforme, qui possède la propriété remarquable de rester invariable pour certaines transformations algébriques. Ces transformations se trouvent en considérant les racines u de

$$\Phi(u) = \Phi(s).$$

On aura $u = s$ et $n - 1$ autres racines

$$\psi_1(s),\ \psi_2(s), \ldots \psi_{n-1}(s).$$

Les ψ_ν sont des fonctions algébriques de s, et l'on a

$$f(\psi_\nu(z)) = f(z).$$

Je sais que Fredholm a considéré une extension de ces recherches, embrassant des catégories plus vastes de fonctions. Il n'a rien publié là-dessus.

Il n'y a pas lieu de parler longuement de l'importance de la découverte de Fredholm, ni du développement postérieur de la théorie, ni de cette évolution des problèmes de la physique mathématique dont l'équation intégrale est l'expression définitive. Tout cela est déjà, ou de l'histoire courante, ou matière d'encyclopédie. On sait que le nom de Fredholm est bien vite devenu célèbre. En printemps 1901, M. Holmgren fit, au séminaire mathématique de Goettingue, la première conférence hors de Suède sur les équations de Fredholm. On sait combien, dans la suite, l'activité de Hilbert et de son école devait s'inspirer de l'étendue des questions profondes que venait de poser la théorie générale des équations intégrales. En France la renommée de Fredholm, si fortement appuyée par l'autorité de Poincaré, s'est vite affermie. En lui décernant, en 1908, le prix Poncelet, l'Académie des Sciences a associé son nom aux noms les plus illustres des mathématiques et de la physique; ainsi, avant lui J. R. Mayer, Clausius, Kelvin et Hilbert avaient reçu ce prix, très rarement décerné à un étranger. Les invitations des sociétés savantes commencèrent d'affluer, assez souvent, il est vrai, pour s'enfouir dans ses tiroirs. Après sa mort, on en trouva dans ses papiers une collection dont personne en Suède, pas même sa famille, n'avait jamais entendu parler.

Si l'on se demande quel a été, aux yeux de Fredholm, le fondement essentiel de son œuvre mathématique, la réponse est immédiate, c'est la théorie du potentiel. La disposition de sa thèse, le titre si significatif de la première note sur les équations intégrales, le prouvent déjà, aussi bien que l'insistance avec laquelle il avait coutume de présenter cette théorie comme le modèle naturel qu'il fallait utiliser en y rattachant les méthodes et les conceptions les plus générales possibles. Ainsi, en 1895, à la suite d'une conférence, il avait déjà parlé du problème de Dirichlet comme d'un problème d'élimination; peut-être avait-il imaginé alors la possibilité d'envisager les équations aux dérivées partielles comme un cas limite des équations aux différences finies. Deux ans plus tard, après une conférence au séminaire mathématique de Stockholm sur les »solutions principales» de M. Roux et leur rapport avec l'équation intégrale de Volterra, l'auditoire s'engagea dans une vive discussion. Finalement, après une pause et, selon sa coutume, très lentement, Fredholm, jusqu'à alors silencieux, dit: »dans la théorie du potentiel une telle équation intégrale se présente aussi». C'est certainement un fait curieux que, dans l'histoire des équations intégrales, les équations différentielles de type hyperbolique ont précédé, de quelques années seulement, celles de type elliptique. Dans le premier cas, cette propriété particulière que possède la solution fondamentale de Riemann, de disparaître en dehors de l'angle des caractéristiques, simplifie trop l'équation intégrale associée, si importante qu'elle soit en soi. Pour les généralités, l'équation elliptique de la théorie du potentiel, devait se révéler, on le sait, un point de départ bien supérieur.

Enfin, dans une occasion ultérieure[1], Fredholm a exposé publiquement ce qu'il pensait de ses précurseurs et de l'évolution de pensée qui l'avait guidé. Après avoir parlé des formules d'inversion de Fourier et d'Abel et des travaux de Sonine et de Hankel qui se rattachaient à ces formules, voici qu'il revient encore au problème de Dirichlet pour en rappeler les trois méthodes classiques de résolution, et il cite en particulier la méthode de Neumann comme celle »qui parut avoir les plus grandes chances d'être adaptée à des problèmes plus généraux». Et, passant au remarquable mémoire de Poincaré, où celui-ci avait rendu très probable que la série de Neumann devait représenter une fonction méromorphe du paramètre λ, il dit: »En réfléchissant sur ces résultats je me suis demandé si le fait que φ est une fonction méromorphe de λ n'est pas une conséquence de la forme linéaire de l'équation fonctionnelle définissant φ. Le fait que le développement de φ suivant les puissances croissantes de λ converge pour toute valeur de λ dans le cas des équations traitées par M. VOLTERRA, a donné un fort appui à penser que la théorie de l'équation fonctionnelle (II) devait être un cas limite de la théorie ordinaire des équations linéaires. Cette idée une fois acquise les travaux de mon collègue M. v. KOCH sur les déterminants infinis ont beaucoup facilité mes recherches.»

Il est bien naturel que, dans ses conférences à l'Université de Stockholm, Fredholm professât de préférence ces grandes méthodes de la Physique mathématique classique, qui constituent le sujet principal de son œuvre scientifique. Cela n'empêche pas qu'il n'aît traité aussi presque tous les sujets de la Physique théorique moderne. Il n'était pas, au sens populaire, ce qu'on appelle un lec-

[1] Les équations intégrales linéaires. C. R. Congr. Math. Stockholm 1909.

teur brillant. Il parlait lentement, d'une voix grave et égale; il arrivait quelquefois qu'il commît, au tableau noir, des fautes de calcul embrouillantes. Mais cela comptait peu. En vérité, ses cours étaient disposés avec une rare maîtrise du sujet, et il possédait, avant tout, l'art difficile de communiquer à ses élèves ce sentiment de l'unité, de l'essentiel d'une théorie qui est tellement apparent dans ses propres écrits.

Le total de l'œuvre imprimée de Fredholm ne compte que peu de pages, publiées quelquefois après de longs intervalles de silence. Pour lui, mettre une note au point, c'était le lent travail de l'artiste qui ne peut souffrir aucune imperfection de ciselure. En rédigeant, pour la cinquième ou sixième fois, la matière de sa thèse, »j'achève maintenant» dit-il, »j'écris deux pages par jour». Ce travail assidu a rendu l'exposé admirable de clarté et de concision, mais il a dû aussi effacer bien des traces de l'élaboration intérieure intuitive, bien des associations accidentelles et significatives. Sa personnalité s'est en quelque sorte cachée derrière la perfection même de cette œuvre qui, avec une force rare, assujettit de vastes connaissances à la même grande idée. Au fond, Fredholm était tout autre que ce mathématicien pur et exclusif qu'on pourrait imaginer à la seule lecture de ses écrits.

Tout d'abord, il ne faut pas passer sous silence que son activité mathématique avait un côté pratique important. Dès 1902, il s'était occupé de l'organisation des assurances sur la vie en Suède. Engagé d'abord au service de l'État, ensuite à celui d'une des principales compagnies suédoises, il a rendu de grands services, surtout pour mettre cette activité sur une base mathématique authentique. Il a calculé d'importantes tables de mortalité pour les pays scandinaves, et sa formule des »valeurs de résiliation», d'une simplicité remarquable, est généralement employée.

On dit souvent que le propre du génie suédois consiste dans une grande facilité d'invention et dans une diversité d'idées et d'intérêts généreuse jusqu'à la prodigalité. Si on lui reproche d'être moins enclin à labourer avec abnégation et ténacité un seul champ difficile, il ne faut pas oublier qu'il peut être tout de même un grand travailleur. Tel les Swedenborg, ce grand penseur dont les idées de philosophie naturelle devançaient tellement celles de son époque, tel les Polhem, à la fois ingénieur des mines, mathématicien, musicien, qui fut appelé, par un admirateur contemporain, »l'Archimède du Nord». Malgré le contraste que forme sa vie paisible et anonyme avec l'activité mouvementée et publique de ces hommes, Fredholm me paraît être de leur race; il avait comme eux les dons et les intérêts scientifiques les plus variés, il partageait leur amour de l'invention et de la dextérité techniques et il était, au fond de l'âme, un artiste comme eux. A l'Académie des Sciences techniques de Stockholm, dont il était membre, on eut bien souvent recours à son autorité pour juger les mérites des mémoires que l'on venait présenter sur des sujets de la technique théorique. Il a traité lui-même des problèmes de ce genre. J'ai vu[1] une tête de mèche de machine à forer construite à l'aide de ses calculs et qui fonctionne à merveille. Mais ce n'était pas de la théorie seulement. Maître accompli au maniement de la lime, du soudoir et du petit tour d'horloger qu'il avait fait installer dans son cabinet, il était lui-même un très bon facteur d'instruments.

Depuis 1910 il s'était beaucoup intéressé aux recherches de Kelvin sur la possibilité d'intégrer une équation différentielle quelconque au moyen de construction par »règles enchaînées». Il s'est mis à réaliser pratiquement certains cas, stimulé peut-être par la beauté et la précision d'un appareil d'intégration qu'il venait d'acquérir pour le Séminaire de physique mathématique de Stockholm. Je ne sais plus au juste quelle était l'équation à laquelle se rapportait l'appareil intégrateur qu'il a construit; il est certain toutefois que la machine savait tracer, dans des conditions initiales variées, de très belles et très exactes courbes intégrales. Plus tard Fredholm à démonté l'appareil, sans doute pour l'adapter à une autre équation. Il semble qu'il n'ait pas laissé d'indications suffisantes pour en permettre la reconstruction.

En état parfait de conservation se trouve, par contre, une petite machine pour graver des réseaux spectraux. Un mécanisme de règles enchaînées, activé par un petit moteur hydraulique, dirige automatiquement une pointe de diamant à travers une plaque de verre. Le délicatesse d'exécution est merveilleuse. L'intérêt de Fredholm pour la physique des spectres comme pour toutes les questions de la mécanique des atomes, datait d'ailleurs de loin. Il avait de bonne heure reconnu l'importance des travaux de Wien et de Planck sur la radiation thermique, et en connexion avec le mémoire bien connu de Ritz, il avait montré[2] comment des équations intégrales convenablement choisies pouvaient servir à obtenir des formules du type de Balmer et de Rydberg.

Très musicien, il était avant tout un amateur fervent de la musique de Bach. Quoique n'étant pas pianiste lui-même, il cherchait volontiers, en tâtonnant, les thèmes et les différentes voix de ces compositions au contrepoint com-

[1] Chez M. Hultman de Saltsjöbaden, Stockholm.

[2] Sur la théorie des spectres. C. R. Acad. Sciences. Paris t. 142 (1906).

pliqué. Sur le lit dont il ne devait plus se lever, il rêvait encore du bonheur d'entendre enfin toutes les quarante-huit fugues du *Clavecin bien tempéré.* Dans sa jeunesse, il avait appris à jouer de la flûte, mais, déjà âgé, il l'avait remplacée par le violon. Son premier violon, il l'avait fabriqué lui-même de la moitié de la coque d'une noix de coco. L'instrument, encore conservé, ressemble à un de ces petits violons arabes, au cou long et au son aigre et nasillard. Plus tard il acheta, à très bon marché, un violon tout à fait ordinaire, qui lui devint, dans la suite, très cher.

C'était là plus qu'un délassement d'amateur. Depuis longtemps les subtilités techniques du violon et les problèmes théoriques que présentent cette acoustique difficile, d'une si mystérieuse perfection, l'avaient préoccupé. Son dernier travail ne fut jamais achevé. Il n'en existe que des fragments, quelques feuilles de calculs aux explications sténographiques difficiles à déchiffrer, et le dessin d'une plaque en forme de violon idéalisé. Il avait marqué sur cette plaque une série de courbes dont il donne l'équation approximée ou empirique. Je ne sais pas s'il s'agit de courbes nodales de vibrations élastiques, ou de courbes notant des niveaux d'égale épaisseur convenables. Quoi qu'il en soit, il s'était proposé, sans doute, de pénétrer par la théorie et par l'expérience les secrets de ce métier de luthier qui a créé l'instrument sonore le plus parfait et le plus animé.

C'est au clair-obscur de cette ébauche émouvante et déconcertante, rêve d'une synthèse qui allait unir dans un effort d'ensemble les forces du mathématicien et du physicien à celles du musicien et de l'artisan, que nous voyons s'éteindre l'œuvre de Fredholm.

Nils Zeilon.