SUR LES SURFACES POSSÉDANT UN NOMBRE FINI DE PARATINGENTES SECONDES.

PAR

JEAN MIRGUET

à GUÉRET.

La première partie de ce mémoire est une étude locale du contingent en un point où le nombre des paratingentes secondes est fini, sans égard aux propriétés du paratingent second aux points voisins; sa conclusion est que le contingent présente, en un tel point, une structure convexe. La seconde partie définit ce qu'il faut entendre par demi-tangente et paratingente concomitantes et démontre que si une demi-tangente et une paratingente seconde sont concomitantes, la paratingente seconde est dans un plan d'appui du contingent relatif à la demi-tangente. La troisième partie est une application des deux premières aux cas particuliers où le paratingent second est réduit à une ou deux droites et permet de définir de nouveaux cas d'orthosurfaces à plan tangent continu, ce qui prolonge les résultats énoncés par M. Bouligand, dans son *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe.*[1]

I.

1. En un point M d'une surface, on choisira une direction $Z'MZ$, exclue du paratingent ordinaire et on lui donnera le nom de *verticale;* un plan parallèle à $Z'MZ$ sera dit *vertical*; MT_i et MT_j étant deux demi-tangentes de la surface et ϖ_i et ϖ_j les demi-plans issus de $Z'MZ$ qui contiennent respectivement ces deux demi-tangentes, on désignera par $\delta(T_i T_j)$ le dièdre $(< \pi)$ formé par ϖ_i et

[1] G. BOULIGAND. Introduction à la Géom. infinitésimale directe. Paris 1932. Chap. XIV, p. 127.

ϖ_j; par $\delta'(T_i T_j)$ le dièdre formé par les deux demi-plans opposés à ϖ_i et ϖ_j. Etant donné un plan, on distinguera les deux côtés de ce plan en disant qu'une demi-droite est *au dessus* du plan, *dans* ce plan, on *au dessous* de ce plan.

Dans tout demi-plan ϖ_i, issu de $Z'MZ$, *figure une seule demi-tangente*, car si ϖ_i contenait deux demi-tangentes MT_i et MT'_i, toute demi-droite Mt issue de M dans ϖ_i et pénétrant l'angle $(< \pi)$ de MT_i et MT'_i porterait une infinité de points alignés de la surface tendant vers M; la droite qui porte Mt serait donc paratingente seconde et comme il existe une infinité de demi-droites telles que Mt, il y aurait en M une infinité de paratingentes secondes, contrairement à l'hypothèse fondamentale.

2. Etant données deux demi-tangentes MT_1 et MT_2 en M, voici une suite de lemmes concernant la position du contingent par rapport au plan T_1MT_2.

Lemme 1. *Il ne peut y avoir à la fois des demi-tangentes intérieures à $\delta(T_1 T_2)$ au dessus et au dessous du plan T_1MT_2.*

Supposons qu'il y ait dans $\delta(T_1 T_2)$ une demi-tangente MT_3 au dessus de T_1MT_2, et une demi-tangente MT_4 au dessous de ce plan. Soit P un plan vertical coupant MT_1, MT_2, MT_3 et MT_4 en T_1, T_2, T_3 et T_4; P_i un plan vertical, coïncidant au début avec P et tendant vers M en restant parallèle à lui-même; la section de la surface par P_i comprend, dans ou sur $\delta(T_1 T_2)$, quatre points A_i, B_i, C_i, D_i tels que, quand P_i tend vers M, MA_i, MB_i, MC_i et MD_i tendent respectivement vers MT_1, MT_2, MT_3 et MT_4.

Projetons la section de la surface par P_i, de M comme centre, sur P; A_i, B_i, C_i et D_i se projettent respectivement en a_i, b_i, c_i et d_i; quand P_i tend vers M, a_i, b_i, c_i et d_i tendent respectivement vers T_1, T_2, T_3 et T_4. La projection de la section sur P est un continu $a_i b_i c_i d_i$ qui coupe la droite $a_i d_i$ en un point compris entre a_i et d_i; cette projection comprend donc des triplets alignés et il en est de même de la section.

Les triplets alignés de la section ont leurs éléments qui tendent simultanément vers M; donc, la limite de P_i contient une paratingente seconde et, comme les plans verticaux qui rencontrent les quatre demi-tangentes sont dans une infinité de directions, il y a une infinité de paratingentes secondes en M.

Donc, l'hypothèse de demi-tangentes intérieures à $\delta(T_1 T_2)$ l'une au dessus, l'autre au dessous de T_1MT_2 entraîne l'existence d'une infinité de paratingentes secondes en M, contrairement aux données.

On démontrerait d'une manière analogue les lemmes suivants:

Lemme 2. Si une demi-tangente, intérieure à $\delta(T_1 T_2)$, est sur le plan $T_1 M T_2$, toutes les demi-tangentes intérieures à $\delta(T_1 T_2)$ sont sur $T_1 M T_2$.

Lemme 3. Si les demi-tangentes, intérieures à $\delta(T_1 T_2)$, sont au dessus de $T_1 M T_2$, toutes les demi-tangentes extérieures à $\delta(T_1 T_2)$ et à $\delta'(T_1 T_2)$ sont au dessous de $T_1 M T_2$.

Lemme 4. Si le contingent est plan dans $\delta(T_1 T_2)$ et si une demi-tangente MT' extérieure à $\delta(T_1 T_2)$ et à $\delta'(T_1 T_2)$ est sur $T_1 M T_2$, le contingent est sur $T_1 M T_2$ dans $\delta(T_1 T')$ et dans $\delta(T_2 T')$.

Lemme 5. Si le contingent est plan dans $\delta(T_1 T_2)$ et si une demi-tangente MT'', extérieure à $\delta(T_1 T_2)$ et à $\delta'(T_1 T_2)$ est au dessus de $T_1 M T_2$, toutes les demi-tangentes extérieures à $\delta(T_1 T_2)$ et à $\delta'(T_1 T_2)$ sont au dessus de $T_1 M T_2$.

Voici maintenant un lemme d'une nature légèrement différente:

Lemme 6. *Si deux demi-tangentes Mt et Mt' sont opposées, le contingent se réduit à deux demi-plans.*

Soient MT_1 et MT_2 deux demi-tangentes telles que la droite tMt' soit extérieure à $\delta(T_1 T_2)$. Si le contingent, dans $\delta(T_1 T_2)$, n'était pas sur $T_1 M T_2$, il serait d'un même côté (lemmes 1 et 2) de $T_1 M T_2$. Les demi-tangentes extérieures à $\delta(T_1 T_2)$ et $\delta'(T_1 T_2)$ seraient de l'autre côté de ce plan $T_1 M T_2$. Donc, Mt et Mt' devraient être hors de $T_1 M T_2$ et d'un même côté de ce plan, ce qui est impossible puisqu'elles sont opposées.

En étendant ce résultat de proche en proche, on voit que le contingent est plan de chaque côté du plan vertical de tMt'; d'où la double semi-planeité annoncée.

3. Les lemmes précédents font connaître la disposition du contingent en dehors de $\delta(T_1 T_2)$ et de $\delta'(T_1 T_2)$, quand on connaît ce contingent dans $\delta(T_1 T_2)$; mais, ils n'apprennent rien sur le contingent dans $\delta'(T_1 T_2)$; nous allons maintenant répondre à cette nouvelle question:

1^{er} cas: le contingent est plan dans $\delta(T_1 T_2)$. Dans ce cas, si le contingent n'est pas plan tout entier, ce contingent, en dehors de $\delta(T_1 T_2)$ et $\delta'(T_1 T_2)$ est au dessus de $T_1 M T_2$. S'il existait dans ou sur $\delta'(T_1 T_2)$ une demi-tangente MT_3 sur $T_1 M T_2$, on pourrait trouver une demi-tangente MT_4 dans $\delta(T_1 T_2)$ telle que, dans $\delta(T_3 T_4)$, le contingent serait en partie sur $T_1 M T_2$ (donc, sur $T_3 M T_4$) et en partie au dessus de ce plan, ce qui est contraire au lemme 2. Donc, dans ce cas, il n'y a pas d'autre demi-tangente sur le plan T_1MT_2 que les demi-tangentes situées dans ou sur $\delta(T_1T_2)$; toutes les autres sont au dessus de T_1MT_2, à moins que le contingent soit plan tout entier.

2ème cas: le contingent dans $\delta(T_1 T_2)$ est au dessus du plan T_1MT_2. Supposons qu'il existe dans $\delta'(T_1 T_2)$ une demi-tangente au dessus de T_1MT_2; il existerait dans ou sur $\delta'(T_1 T_2)$ deux demi-tangentes MT_3 et MT_4 situées sur T_1MT_2. D'après ce qui précède, dans $\delta(T_3 T_4)$ le contingent ne peut être qu'au dessus de T_1MT_2. Donc, si on suppose, par exemple, MT_4 intérieure à $\delta(T_1 T_3)$, on voit que dans $\delta(T_1 T_3)$ le contingent serait en partie au dessus, en partie au dessous du plan T_1MT_2, c'est-à-dire du plan T_1MT_3, ce qui est contraire au lemme 1.

La réponse à la nouvelle question est ainsi complète et il en résulte l'important corollaire suivant: MT_0 étant une demi-tangente fixe et MT_i une demi-tangente tendant vers MT_0 de toutes les manières possibles, le contingent, s'il n'est pas plan tout entier, reste, en dehors de $\delta(T_0 T_i)$, d'un même côté du plan T_0MT_i et, par conséquent, *il existe un plan d'appui du contingent passant par* MT_0.

II.

4. Toute paratingente seconde limite de la droite $P_i Q_i R_i$ portant un triplet aligné $P_i Q_i R_i$ dont les trois éléments tendent vers M de telle manière que MP_i, MQ_i et MR_i tendent simultanément vers une demi-tangente MT sera dite *concomitante* de MT.

Théorème[1]: *une paratingente seconde concomitante d'une demi-tangente MT est dans un plan d'appui du contingent relatif à MT.*

1er cas: Le plan vertical U_i de $P_i Q_i R_i$ ne tend pas vers le plan vertical de MT. Si MT_1 et MT_2 sont deux demi-tangentes telles que MT soit intérieure à $\delta(T_1 T_2)$ et que U_i rencontre indéfiniment MT_1 et MT_2, on désignera par A_i et B_i deux points, de la surface et du plan vertical U_i, donnant naissance à MT_1 et MT_2.

Si, quand U_i tend vers M, la droite $P_i Q_i R_i$ finit par séparer A_i de B_i, l'un des angles $A_i Q_i P_i$ ou $B_i Q_i R_i$ restera plein de triplets et ne tendra pas vers zéro. Donc, si la paratingente seconde limite de $P_i Q_i R_i$ n'est pas extérieure au dièdre $(< \pi)$ d'arète MT et de demi-plans MTT_1 et MTT_2, il y aura une infinité de paratingentes secondes. Donc, cette paratingente seconde doit être extérieure au dièdre qui vient d'être défini. Le raisonnement reste le même quand

[1] J. Mirguet. C. R. 203. 7 Décembre 1936.

MT_1 et MT_2 tendent vers MT de toutes les manières possibles. Donc, il faut que la paratingente seconde soit dans un plan d'appui du contingent relatif à MT.

2ème cas. Le triplet aligné $P_i Q_i R_i$ reste constamment dans le plan vertical V de MT. Supposons que la paratingente seconde limite de $P_i Q_i R_i$ fasse avec MT un angle $\alpha \neq 0$. On peut toujours choisir, dans la section de la surface par le plan V, un point A_i et un triplet $P_i Q_i R_i$ tels que la droite $P_i Q_i R_i$ sépare A_i de M. Alors, la section de la surface par V présente, à partir de M, un arc MP_i avant d'atteindre le triplet et un arc $R_i A_i$ après l'avoir dépassé.

Comme dans le premier cas, on a un angle ($MP_i Q_i$ ou $R_i Q_i A_i$) plein de triplets alignés dont les éléments tendent simultanément vers M. Ces angles ne tendent pas vers zéro si $\alpha \neq 0$ et il y a, à la limite, une infinité de paratingentes secondes. Donc, il faut que $\alpha = 0$, c'est-à-dire que la paratingente seconde, limite de $P_i Q_i R_i$, doit porter MT.

3ème cas. Le plan vertical de $P_i Q_i R_i$, sans être fixe, passe constamment par M. Ce cas se traite comme le deuxième.

4ème cas. $P_i Q_i R_i$ tend vers M d'une manière quelconque, mais sa limite est dans le plan vertical de MT. On peut toujours trouver une demi-tangente MT_1 telle que le plan vertical U_i de $P_i Q_i R_i$ rencontre indéfiniment MT_1 en tendant vers le plan vertical de MT. Soit B_i le point de la surface situé sur la verticale d'intersection du plan vertical de MT_1 et de U_i. La droite $Q_i B_i$ tend vers une paratingente ordinaire située dans le plan TMT_1 et comme son plan vertical tend vers celui de MT, c'est que $Q_i B_i$ tend vers MT.

D'autre part, choisissons un point K_j fixe sur MT_1; soit H_j le point de la surface situé sur la verticale de K_j; le cylindre de révolution C_j, d'axe $Z'MZ$ et passant par K_j, coupe la surface suivant une courbe Γ_j passant par H_j; U_i rencontre Γ_j en un point A_{ji} qui tend vers H_j. Si la limite de $P_i Q_i R_i$ est extérieure à l'angle ($< \pi$) $H_j M K_j$, la droite $P_i Q_i R_i$ finit par séparer H_{ji} de B_i et, comme précédemment, on a un angle plein de triplets indéfiniment, les éléments de chacun de ces triplets étant, de plus, intérieurs au cylindre C_j. En supposant, maintenant, que K_j tende vers M, si la limite de $P_i Q_i R_i$ ne porte pas MT, on a indéfiniment des angles analogues à $H_j M K_j$, pleins de triplets, dont les éléments, intérieurs à des cylindres évanouissants, d'axe $Z'MZ$, tendent simultanément vers M; c'est-à-dire qu'il y a une infinité de paratingentes secondes en M.

En conclusion générale, on voit que, les trois derniers cas demandant, comme le premier, que la paratingente seconde porte MT et épuisant toutes les dispositions possibles, prouvent le théorème annoncé.

III.

5. Si, en chaque point d'une suite M_i tendant vers M, une paratingente D_i tend vers une paratingente seconde D en M, cette paratingente seconde D est concomitante de toute demi-tangente de la suite M_i en M. La preuve en est que, près de chaque point M_i tendant vers M selon une demi-tangente MT, existent trois points alignés A_i, B_i et C_i dont la droite est aussi voisine en direction de D_i qu'on veut et qu'on peut choisir A_i, B_i et C_i de façon que les trois familles A_i, B_i et C_i admettent chacune en M la seule demi-tangente MT.

Cette propriété trouve une application dans l'etude actuelle des surfaces ayant partout des paratingentes secondes. En un point M, toute droite appartenant à l'accumulatif des paratingentes secondes aux points voisins est une paratingente seconde concomitante de l'une, au moins, des demi-tangentes en M et doit, en raison du théorème de la section II de ce mémoire, être dans un plan d'appui par rapport à chacune des demi-tangentes dont elle est concomitante.

Il faut ici faire une remarque très simple: etant donné un contingent convexe de surface, on considère quatre des demi-tangentes MT_1, MT_2, MT_3 et MT_4 (disposée dans cet ordre de rotation autour de la verticale de M) et on demande de construire une paratingente seconde qui soit concomitante de ces quatre demi-tangentes. Il est évident qu'il n'y a que deux solutions: l'intersection des plans T_1MT_2 et T_3MT_4 et l'intersection des plans T_1MT_4 et T_3MT_2. Si on ajoute une cinquième demi-tangente dont la paratingente seconde doive-t-être également concomitante, le problème n'a plus que zéro ou une solution: une, si la nouvelle demi-tangente est sur l'un des plans T_1MT_2, T_2MT_3, T_3MT_4, T_4MT_1; zéro, si cette demi-tangente n'est pas sur l'un de ces plans. Il y a une exception et une seule: le cas du contingent plan.

6. Dans le cas des surfaces présentant une seule paratingente seconde en chaque point, la paratingente seconde en M est concomitante de toutes les demi-tangentes en M. Les remarques précédentes prouvent que le contingent en M est alors réduit à deux demi-plans issus de la paratingente seconde en M, ces deux demi-plans pouvant être coplanaires dans certains cas particuliers.

La possibilité d'un contingent non plan se démontre par l'exemple des cylindres à directrice absolument convexe: un tel cylindre présente en chaque point une seule paratingente seconde. Soit A un point anguleux de la directrice; tout le long de la génératrice de A, le contingent est un ensemble de deux demi-plans non coplanaires.

7. Dans le cas des surfaces présentant deux paratingentes secondes partout, l'application des mêmes remarques laisse prévoir que le contingent présente, au plus, cette structure très simple: un cône réduit à des faces planes au nombre de quatre au maximum.

M. Bouligand signale[1] le cas particulier des surfaces de révolution et démontre que ces surfaces présentent partout un plan tangent continu[2].

Voici un autre cas de surfaces à deux paratingentes secondes dont le caractère particulier ne sera plus d'être de révolution, mais d'avoir partout une limite inférieure différente de zéro pour l'angle aigu des deux paratingentes secondes; on va démontrer que, dans ce cas également, le contingent est plan partout et réparti continûment.

Le point de départ de la démonstration est le fait de cette limite inférieure non nulle pour l'angle aigu des paratingentes secondes en tout point M_i. Puisque cet angle ne tend pas vers zéro, quand M_i tend vers M, les deux paratingentes secondes en M appartiennent l'une et l'autre à l'accumulatif des paratingentes secondes aux points voisins[3]; par suite, chacune des paratingentes secondes en M est concomitante de toutes les demi-tangentes en M, puisque chacune est limite d'une paratingente seconde en M_i, quelle que soit la demi-tangente suivant laquelle M_i tende vers M. Conclusion: l'impossibilité démontrée ci-dessus, de deux paratingentes secondes concomitantes l'une et l'autre de plus de quatre demi-tangentes, en dehors du cas du contingent plan, prouve ici immédiatement que le contingent est plan.

De la planéité du contingent résulte celle du paratingent et, par suite, la répartition continue du plan tangent, de la manière suivante: Supposons qu'il existe une paratingente ordinaire $\varDelta$ en dehors du plan du contingent et soit $P_i Q_i$ une corde de la surface tendant vers $\varDelta$; si P_i et Q_i ne tendaient pas, suivant une même demi-tangente, vers M, il serait impossible que la droite $P_i Q_i$ tende vers une limite située hors du plan du contingent. Soit MT_1 la demi-

---

[1] G. BOULIGAND. Loc. cit. p. 152.

[2] M. Bouligand cite encore (Bulletin de la Soc. Royale des Sc. de Liège 1936, nº 11 p. 219) les surfaces à plan tangent $z=f(x,y)$ dont les dérivées r, s, t sont continues par rapport à l'ensemble (x,y) et dont le $rt-s^2<0$ (au sens strict) partout. Pour toute valeur de m, non racine de $rm^2+2sm+t=0$, la direction de droite du plan tangent, projetée sur xoy suivant la droite de pente m, ne saurait être paratingente seconde; par contre, un raisonnement direct (basée sur une méthode exposée par M. Bouligand dans son *Cours de géométrie analytique*, nº 69) montre que les deux directions correspondant aux deux racines (partout distinctes) de l'équation en m sont paratingentes secondes.

[3] J. MIRGUET. Annales Sc. de l'Ecole Normale 51. 1934. p. 209.

tangente commune aux familles P_i et Q_i, et A_i et B_i deux points de la surface situés sur le plan vertical de $P_i Q_i$ et tendant vers M, en même temps que P_i et Q_i, selon deux demi-tangentes respectives MT_2 et MT_3 telles que MT_1 soit intérieure à $\delta(T_2 T_3)$.

La droite $P_i Q_i$ finit par séparer A_i et B_i et alors l'arc vertical $A_i P_i Q_i B_i$ de la surface finit par contenir un triplet aligné dont les éléments tendent simultamément vers M. La limite du plan vertical de $P_i Q_i$ contient, donc, une paratingente seconde.

Donc, la paratingente Δ située hors du plan du contingent est dans le plan vertical d'une paratingente seconde. Dans tout plan vertical ne contenant pas de paratingente seconde, il y a une seule paratingente ordinaire. Les plans verticaux où il pourrait y avoir une paratingente ordinaire en dehors du plan du contingent sont donc en nombre fini et on aurait ainsi un paratingent non plan sans élément intérieur: structure dont j'ai prouvé l'impossibilité[1].

[1] J. Mirguet. C. R. 195. 1932. p. 592.

BERICHTIGUNG zu der Arbeit:

"Über die Annäherung algebraischer Zahlen durch periodischen Algorithmen"

von Kurt Mahler in Krefeld.

(Acta mathematica, Band 68, S. 109—144.)

Es sind die folgenden Änderungen am Text anzubringen:

S. 117; Zeile 14 von oben: Es muss heissen: »also nach Definition der $\mathfrak{r}$-adischen Bewertungen und der Funktion $\lambda(\mathfrak{r})$»

S. 118; vorletzte Zeile von unten: Die Klammer vor »Seite 109, Note 1» fällt fort.

S. 120; unterste Zeile: Es muss heissen: »Siehe Seite 111, Note 2.»

S. 141; Zeile 4 von oben: Die mittlere Formel muss lauten:

$$\log \Omega(\varepsilon | \mathfrak{q}_2) = +2{,}2209;$$