

# DIE KONFORME ABBILDUNG DURCH DIE GAMMAFUNKTION.

VON

INGEBORG GINZEL

in DRESDEN.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. <i>Allgemeiner Teil.</i>	
§ 1. Die konforme Abbildung einer meromorphen Funktion . . . . .	275
§ 2. Das Krümmungsproblem . . . . .	279
II. <i>Allgemeines über die Gammafunktion.</i>	
§ 1. Definitionen und Zusammenstellung . . . . .	286
§ 2. Allgemeines über ihre konforme Abbildung, die Abhandlung von Lense	290
III. <i>Die analytischen Grundlagen der Rechnung.</i>	
§ 1. Die Nullstellen der $\psi$ -Funktion . . . . .	294
§ 2. Formeln für die erste Berechnung	
a) der Stromlinien . . . . .	296
b) der Höhenlinien . . . . .	300
§ 3. Krümmung der Stromlinien in Kreuzungspunkten und Polen . . .	301
§ 4. Die Umgebung der reellen Achse . . . . .	306
§ 5. Die Wendepunktskurven . . . . .	312
IV. <i>Praktische Ausführung, Beschreibung zu III.</i>	
Nr. 1. Beschreibung zu III, 1 . . . . .	326
Nr. 2.       »       » 2 a, Verbesserungsmethoden und ihre Ausführung, Genauigkeitsabschätzung, Beschreibung zu 2 b . . . . .	326
Nr. 3. Beschreibung zu 3 . . . . .	336
Nr. 4.       »       » 4 . . . . .	337
Nr. 5.       »       » 5 . . . . .	338
V. <i>Tabellen.</i>	
Nr. 1. Stromlinien . . . . .	345
Nr. 2. Höhenlinien . . . . .	346

	Seite
Nr. 3. Nullstellen der $\psi$ -Funktion . . . . .	348
Nr. 4. Eingeschobene Werte zu den Stromlinien . . . . .	348
Nr. 5.       »       »       »       » Höhenlinien . . . . .	348—49
Nr. 6. Krümmungen . . . . .	348
Nr. 7. Richtungsfeld . . . . .	350
Nr. 8. Zugehörige Funktionswerte . . . . .	351
Nr. 9. Wendepunktskurve . . . . .	349
Nr. 10. $\pi \cdot U(x, y)$ und $\pi \cdot V(x, y)$ . . . . .	352
VI. <i>Zeichnungen.</i>	
I. Schematische Zeichnung der Urbereiche . . . . .	353
II. Das Quadratnetz . . . . .	} Anlage
III. Umgebung der Achse . . . . .	

### Begleitwort

#### zu der Arbeit von I. Ginzel über die konforme Abbildung durch die Gammafunktion.

Die Frage nach der konformen Abbildung, die durch die Gammafunktion vermittelt wird, ist trotz der grossen Fülle von Untersuchungen über diese Funktion erst in allerjüngster Zeit durch Lense aufgeworfen und nach einer gewissen Richtung hin behandelt worden. Eine Ursache hierfür dürfte in dem Umstande zu suchen sein, dass sich abgesehen von der Stirlingschen Näherungsformel die meisten bekannten Funktionsdarstellungen für die zahlenmässige Auswertung im komplexen Gebiete als zu umständlich erweisen und damit eine numerisch und graphisch befriedigende Beschreibung im Einzelnen sehr erschweren. Es mussten daher zunächst hinreichend genaue und für die Rechnung geeignete Darstellungen abgeleitet und an zahlreichen Argumentstellen ausgewertet werden. Für die Festlegung des genauen Netzverlaufes und des Krümmungssinnes der Strom- und Höhenlinien erwies sich die Einführung einer Hilfsfunktion fruchtbar, welche die Krümmung der Abbildung in der Umgebung einer Argumentstelle kennzeichnet. Hierdurch konnten Aufschlüsse gewonnen werden, die durch blosser Ermittlung von Funktionswerten nicht zu erzielen waren.

P. E. BÖHMER.

## I. Allgemeiner Teil.

## § 1. Die konforme Abbildung einer meromorphen Funktion.

Nr. 1. Ist  $w=f(z)$  eine im einfach zusammenhängenden Gebiete  $G$  der komplexen Urveränderlichen

$$(1) \quad z=x+yi=re^{p i} \quad (x, y; r, \varphi \text{ reelle Zahlen})$$

reguläre analytische Funktion

$$(2) \quad w = u + vi \quad (u, v \text{ reelle Zahlen}),$$

dann genügen Real- und Imaginärteil von  $f(z)$

$$(3) \quad \Re f(z) = u(x, y), \quad \Im f(z) = v(x, y)$$

im Gebiete  $G$  den Riemann-Cauchyschen Differentialgleichungen

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

und hieraus folgt bekanntlich, dass das Gebiet  $G$  der  $x$ - $y$ -Ebene auf ein möglicherweise mehrfach überdecktes Gebiet  $\Gamma$  der  $u$ - $v$ -Ebene konform abgebildet wird.

In der Folge beschränken wir uns auf meromorphe Funktionen, d. h. eindeutige Funktionen, die im Endlichen ausser Polen keine Singularitäten und höchstens im unendlichfernen Punkte der  $x$ - $y$ -Ebene eine wesentliche Singularität aufweisen.

Da die Umkehrung einer meromorphen Funktion mit alleiniger Ausnahme der linear gebrochenen Funktion eine mehrdeutige Funktion ist, kann bei punktweiser, eineindeutiger Zuordnung der Gebiete  $G$  und  $\Gamma$  das Gesamtgebiet  $\Gamma$  i. a. nicht durch eine schlichte Ebene dargestellt werden; es ergibt sich vielmehr hierfür eine Riemannsche Fläche ( $u$ - $v$ -Fläche), die aus mehreren Ebenen (Blättern) aufgebaut ist; ist insbesondere  $f$  eine transzendente Funktion, so besteht die  $u$ - $v$ -Fläche aus  $\infty$  vielen Blättern, die zu je mehreren in den Verzweigungsstellen der  $u$ - $v$ -Fläche zusammenhängen. Die Bilder dieser Verzweigungsstellen in der  $x$ - $y$ -Ebene nennt man mehrfache Punkte oder Kreuzungspunkte; sie sind durch die Gleichung

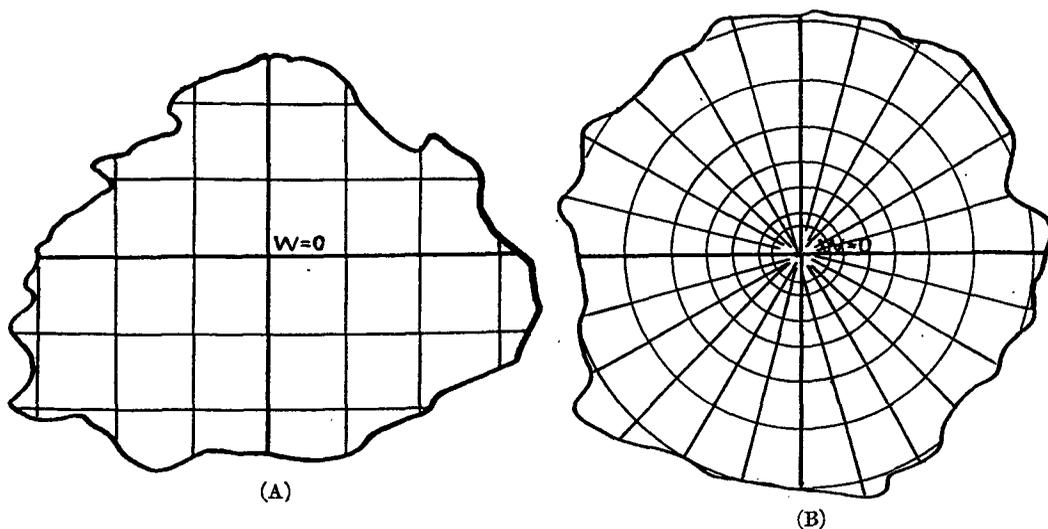
$$(5) \quad f'(z) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{f''(z)}{f'(z)^2} = 0$$

gekennzeichnet.

Bei einer meromorphen Funktion bleibt die Konformität auch in den einfachen Wurzeln und Polen von  $f(z)$  bestehen; sie erleidet hingegen in den Kreuzungspunkten, zu denen die mehrfachen Wurzeln und Pole gehören, eine Unterbrechung; die Kreuzungspunkte bilden also Singularitäten der konformen Abbildung.

*Nr. 2.* Man untersucht die konforme Abbildung einer eindeutigen Funktion der unbeschränkten Urveränderlichen  $z$ , indem man in der  $x-y$ -Ebene ein beliebiges Isothermensystem wählt und das Bild dieses Isothermensystems in der Riemannschen  $u-v$ -Fläche aufsucht, oder indem man umgekehrt das Bild eines willkürlich gewählten Isothermensystems der  $u-v$ -Fläche in der  $x-y$ -Ebene bestimmt. Aus dem Wesen der konformen Abbildung ergibt es sich, dass das Bild eines Isothermensystems wieder ein solches System ist.

Wir wählen hier den zweiten Weg, gehen also von einem Isothermensystem in der  $u-v$ -Fläche aus. Als besonders kennzeichnende Isothermensysteme bieten sich die Systeme



(A)

$$\begin{cases} \Re w = u = p \\ \Im w = v = q, \end{cases}$$

(B)

das orthogonale Parallelenetz in der  $u-v$ -Fläche, und

$$(B) \quad \begin{cases} \Re \lg w = \frac{1}{2} \lg(u^2 + v^2) = P \\ \Im \lg w = \arctan \frac{v}{u} = \theta, \end{cases}$$

oder

$$(B^*) \quad \left. \begin{array}{l} |w| = e^P = \varrho \\ \frac{v}{u} = \tan \theta = \lambda \end{array} \right\} w = \varrho e^{i\theta},$$

das »Kreis-Strahlennetz« in der  $u-v$ -Fläche dar; beides durchgängig für alle Blätter der  $u-v$ -Fläche verstanden. Dabei sind  $p, q; P, \theta; \varrho, \lambda$  reelle Zahlen.

Wir nennen das Bild des Parallelnetzes (A) der  $u-v$ -Fläche in der  $x-y$ -Ebene kurz das *Parallelnetz von  $f$* , das Bild des Kreis-Strahlen-Netzes (B) der  $u-v$ -Fläche in der  $x-y$ -Ebene das *Höhen-Stromlinien-Netz von  $f$* , indem wir die Kurven

$$\left\{ \begin{array}{ll} |w| = \varrho & \text{als Höhenlinien} \\ \frac{v}{u} = \lambda & \text{als Stromlinien} \end{array} \right. \quad [e, \lambda = \text{konst.}]$$

bezeichnen. Wir werden in der Folge unter der Parallelen vom Parameter  $p$ , der Parallelen vom Parameter  $q$ , der Höhenlinie vom Parameter  $\varrho$  und der Stromlinie vom Parameter  $\lambda$  die Menge aller Punkte verstehen, für die der Parameter ein- und denselben Wert hat, ohne Rücksicht darauf, ob diese Menge aus getrennten Zweigen besteht.

Nr. 3. Es ist von entscheidender Wichtigkeit, dass die Kurven

$$(6) \quad v = 0, \quad u = 0 \quad \begin{cases} v = 0 \text{ »reelle Linien«} \\ u = 0 \text{ »imaginäre Linien«} \end{cases}$$

des Parallelnetzes (A) in die Stromlinien des Netzes (B) eingebettet sind; denn wählt man

$$(6^*) \quad \theta = \frac{n\pi}{2} \quad (n \text{ ganze rationale Zahl}),$$

so wird

$$\begin{array}{ll} \text{für gerades } n & \tan \theta = 0, \text{ also } v = 0 \\ \text{ungerades } n & \tan \theta = \infty, \text{ also } u = 0. \end{array}$$

Gehören die Kreuzungspunkte den reellen und den imaginären Linien an, so bilden diese Linien das Mittel zu einer Beschreibung der *Abbildung durch  $f(z)$  im Grossen*; sie zerlegen die  $x-y$ -Ebene in Gebiete, die je einen Quadranten eines Blattes der  $u-v$ -Fläche abbilden. Sind weiter die Kreuzungspunkte sämtlich reell, so zerlegen die reellen Linien für sich allein die  $x-y$ -Ebene in *Grundgebiete* von zweierlei Art, die entweder die obere ( $0 < v$ ) oder die untere Halbebene ( $v < 0$ ) eines Blattes der  $u-v$ -Fläche abbilden. In diesem Falle gelangt man, wenn man aus einem Grundgebiete erster Art kommend die berandende reelle Linie ( $v=0$ ) überschreitet, wegen des Vorzeichenwechsels von  $v$  in ein Gebiet zweiter Art. Man kann dann je zwei benachbarte Grundgebiete zu einem *Fundamentbereich* oder *Urgebiet* zusammenfassen, sodass das Bild des Urgebietes ein Blatt der  $u-v$ -Fläche liefert. In einem Urgebiet nimmt also die Funktion jeden nicht reellen Wert ein- und nur einmal an. Durch eine geeignete Wahl gelingt eine lückenlose Einteilung der  $x-y$ -Ebene in Urgebiete derart, dass jedem Blatte der  $u-v$ -Fläche ein-eindeutig ein Urgebiet entspricht; auch die Zuordnung des Randes kann in eindeutiger Weise vollzogen werden.

Das Netz der Höhen- und Stromlinien einer meromorphen Funktion in der  $x-y$ -Ebene zeigt folgende allgemeine Eigenschaften:

Durch jede Wurzel und jeden Pol von  $f(z)$  laufen sämtliche Stromlinien ( $-\infty \leq \lambda \leq \infty$ ).

Die Höhenlinien hingegen umkreisen jede Wurzel und jeden Pol; in den Wurzeln und Polen arten sie in Punkte aus ( $\rho=0, \infty$ ).

Durch jeden anderen Punkt geht genau *eine Höhenlinie* und *eine Stromlinie*, und zwar geht jede dieser Linien durch einen einfachen Punkt einfach, durch einen mehrfachen dagegen so oft, wie die Ordnung der Vielfachheit angibt.

Sind die Kreuzungspunkte wie bei der  $\Gamma$ -Funktion sämtlich reell, so lässt auch das Parallelensystem die Kreuzungspunkte klar hervortreten; hier geht die Linie  $v=0$  mehrfach durch einen Kreuzungspunkt hindurch, einfach hingegen durch alle einfachen Wurzeln und Pole.

*Nr. 4.* Wenn das Studium der Abbildung einer meromorphen Funktion im Grossen (bei reellen Kreuzungspunkten) auf die Ermittlung der reellen und imaginären Linien hinausläuft, so wird hierfür die numerisch-geometrische Darstellung vollendet sein, wenn durch Berechnung und Zeichnung der Verlauf dieser Linien hinreichend genau festgelegt ist.

Wir wollen uns aber nicht mit der Ermittlung endlich vieler Punkte dieser Linien begnügen, sondern wollen verlangen, dass der Verlauf dieser Linien

1.) auch in beliebig naher Umgebung des  $\infty$  fernen Punktes hinreichend genau festgelegt wird, und dass

2.) der Krümmungssinn der Linien in jedem ihrer Punkte ermittelt wird.

So gelangen wir zu den Problemen des asymptotischen Verhaltens und der Krümmung der reellen und der imaginären Linien.

Was die  $\Gamma$ -Funktion anlangt, so ist das erste dieser Probleme aufs engste mit der numerischen Ermittlung der Kurvenpunkte verbunden, sodass es in der nachfolgenden Untersuchung zugleich mit dem der Punktermittlung behandelt wird.

Das Krümmungsproblem hingegen erheischt besondere analytische Hilfsmittel, die wir den Mitteilungen des Herrn P. E. Böhmer verdanken. Die Böhmerschen Untersuchungen sind bisher noch nicht veröffentlicht worden und mögen daher im Folgenden, soweit es die Ziele dieser Arbeit anlangt, wiedergegeben werden.

## § 2. Das Krümmungsproblem.

Das *erste Problem*, das wir uns stellen, besteht in der Ermittlung der Krümmung der

$$\text{»Parallelen« } \begin{cases} u = p \\ v = q, \end{cases}$$

die durch eine bestimmt gewählte Stelle  $z_0$  der  $x$ - $y$ -Ebene laufen. Wir setzen

$$z = z_0 + \zeta,$$

dann ist

$$f(z_0 + \zeta) - f(z_0) = f(z_0 + \zeta) - p - qi$$

eine analytische Funktion von  $\zeta$ , die

1.) in  $\zeta=0$  eine Wurzel hat

und

2.) auf der Kurve  $v=q$  reell,

auf der Kurve  $u=p$  rein imaginär ist.

Hiernach ist aber mit Rücksicht auf Nr. 2 klar, dass die Kurven  $u-p=0$  und  $v-q=0$  in das Stromliniensystem der Funktion

$$f(z) - (p + qi)$$

eingebettet sind, dass daher das Krümmungsproblem auf das Krümmungsproblem in einer Wurzel von  $f(z)$  zurückgeführt ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir unter Verlegung der Stelle in den Ursprung eines neuen Koordinatensystems für  $z_0$  Null, für  $z_0 + \zeta$  einfach  $z$  schreiben.

Wir entwickeln die Funktion in eine Potenzreihe nach  $z$  von der Gestalt

$$(7) \quad \begin{cases} f(z) = A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots \\ = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k. \end{cases}$$

Ist jetzt

$$(8) \quad \begin{cases} A_1 = A_2 = \dots = A_{k-1} = 0, \\ A_k \neq 0, \end{cases}$$

und setzen wir wieder

$$f(z) = u + vi = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta},$$

dann sind die Stromlinien durch

$$\tan \theta = \lambda \quad (\lambda = \text{constans})$$

bestimmt. Wegen (8) stellt aber nach Adjunktion einer  $k$ -ten Einheitswurzel die  $k$ -te Wurzel aus  $f(z)$

$$(9) \quad f(z)^{\frac{1}{k}} = \rho^{\frac{1}{k}} \left( \cos \frac{\theta}{k} + i \sin \frac{\theta}{k} \right) = \rho^{\frac{1}{k}} e^{\frac{i\theta}{k}}$$

in der Umgebung des Ursprungs eine eindeutige Funktion dar, deren Potenzreihe

$$(10) \quad f(z)^{\frac{1}{k}} = A_1^* z + A_2^* z^2 + \dots$$

mit

$$(11) \quad A_1^* = A_k^{\frac{1}{k}} \neq 0 \quad A_2^* = \frac{A_k^{\frac{1}{k}} A_{k+1}}{k A_k}$$

beginnt. Die Stromlinien dieser Funktion sind aber noch (9) durch

$$\tan \frac{\theta}{k} = \lambda^* \quad (\lambda^* = \text{constans})$$

bestimmt, sind also mit den Stromlinien von  $f(z)$  selbst identisch.

Beachtet man weiter, dass die Funktion  $\frac{1}{f(z)}$  dasselbe Stromliniensystem hat wie  $f(z)$  selbst, so erkennt man, dass das Krümmungsproblem für meromorphe Funktionen auf die Aufgabe zurückgeführt werden kann:

*Die Krümmung der Stromlinien in einer einfachen Wurzel von  $f(z)$  zu bestimmen.*

Das zweite Krümmungsproblem verlangt die Ermittlung der Krümmung der Stromlinie und der Höhenlinie

$$\begin{cases} |w| = \rho \\ \frac{v}{u} = \tan \theta = \lambda, \end{cases}$$

die durch einen beliebigen einfachen Punkt gehen, der weder Wurzel noch Pol von  $f(z)$  ist.

Die beiden Linien sind jetzt die beiden Linien des Parallelnetzes von  $\lg f(z)$ , sie sind also in das Stromliniensystem der Funktion

$$\lg f(z + \zeta) - \lg f(z)$$

eingebettet; hiermit ist aber das zweite Problem vollständig auf das erste zurückgeführt.

Die Aufgabe, die Krümmung der Stromlinien in einer einfachen Wurzel von  $f(z)$  zu bestimmen, kann in überraschend einfacher Weise durch die Überlegung gelöst werden, dass die Krümmung nur von den beiden ersten Ableitungen der Funktion abhängen kann, und dass daher jede andere Funktion, die an der Stelle  $z$  verschwindet und dort in den beiden ersten Ableitungen mit  $f(z)$  übereinstimmt, in der Wurzel  $z$  dieselbe Stromlinienkrümmung aufweisen muss. Von der Taylorschen Entwicklung von  $f(z + \zeta)$  an der Nullstelle  $z$

$$(12) \quad f(z + \zeta) = f'(z)\zeta + \frac{f''(z)}{2}\zeta^2 + \dots [f'(z) \neq 0]$$

ausgehend, wählen wir als »Ersatzfunktion« die linear gebrochene

$$(13) \quad f^*(z + \zeta) = \frac{f'(z)\zeta}{1 - \frac{f''(z)}{2f'(z)}\zeta}$$

Aus der Gestalt von  $f^*$  ist durch Potenzreihenentwicklung ersichtlich, dass es die geforderten Eigenschaften besitzt.

Unter Einführung von

$$(14) \quad \varrho(z) = \frac{f'(z)}{f''(z)}$$

kann man  $f^*$  die Form geben

$$(13) \quad f^*(z + \zeta) = -\frac{2\varrho(z)f''(z)\zeta}{\zeta - 2\varrho(z)};$$

sie zeigt, dass

$$(15) \quad z + \zeta = z + 2\varrho(z)$$

der einzige Pol von  $f^*$  ist. Nun führt die durch (13) vermittelte Kreisverwandtschaft alle Kreise und Geraden der  $u-v$ -Fläche in Kreise oder Geraden der  $x-y$ -Ebene über, also auch das Strahlensystem der  $u-v$ -Fläche in ein Kreisystem; die Stromlinien von  $f^*$  sind also Kreise; die gesuchten Krümmungskreise der Stromlinien von  $f$  sind mit den Stromlinien von  $f^*$  identisch. Da jede Stromlinie durch die Wurzel und den Pol läuft, gehen also alle Krümmungskreise durch den Pol  $z + 2\varrho(z)$ . Es liegen somit alle Krümmungsmittelpunkte auf dem Mittellot der Verbindungsstrecke von  $z$  und  $z + 2\varrho(z)$ ; diese Gerade ist nichts anderes als die Bonnetsche Gerade. Die Lage dieser Geraden ist daher durch den Punkt

$$(16) \quad z + \varrho(z),$$

durch den sie senkrecht zum Vektor  $\varrho(z)$  aus  $z$  hindurchgeht, eindeutig festgelegt.

Diejenige Stromlinie durch  $z$ , die dort der Bonnetschen Geraden parallel ist, hat den kleinsten Krümmungsradius, nämlich  $|\varrho(z)|$ , die dazu senkrechte Stromlinie dagegen einen unendlichen Krümmungsradius, sie hat also in  $z$  einen Wendepunkt, bezw. eine Stelle mehrpunktiger (4, 5 ...) Berührung mit der Tangente. (Näheres s. S. 323 ff.).

Die analytische Funktion  $\varrho(z)$  ist also kennzeichnend für die Krümmung aller Stromlinien durch  $z$ ; indem wir die konforme Abbildung des  $u-v$ -Gebietes  $\Gamma$  auf das  $x-y$ -Gebiet  $G$  ins Auge fassen, sprechen wir von dem Vektor  $\varrho(x, y)$ , der für die »Krümmung der Abbildung« an der Stelle  $(x, y)$  kennzeichnend ist, und erblicken in ihm das Mass dieser Krümmung.

Über eine andere Herleitung der Bonnetschen Formel vergl. man etwa Cesàro-Kowalewski (Vorl. über nat. Geometrie, I. Aufl. 1901, S. 146 ff.).

Die oben gegebene Ableitung stützt sich auf die Tatsache, dass die Krümmung der Stromlinien von den Ableitungen dritter und höherer Ordnung von  $f(z)$  unabhängig ist, die noch eines strengen Beweises bedarf. Wir führen nachstehend diesen Beweis, indem wir die Formel für den Krümmungsmittelpunkt einer Stromlinie auf dem Wege der Rechnung herleiten und bei dieser Gelegenheit auch vorher erwähnte Tatsachen analytisch beweisen.

Die analytische Funktion

$$\begin{aligned} f(z) &= u + vi \\ z &= z_0 + \zeta \\ \zeta &= \xi + \eta i = \bar{r} e^{\bar{\rho} i} \end{aligned}$$

nehme an der Stelle  $z_0$  den Wert  $f(z_0) = 0$  an, und es sei  $f'(z_0) \neq 0$ . Dann heißen die Stromlinien aus  $z_0$ , deren Krümmung wir suchen:

$$(17) \quad \frac{v}{u} = \lambda, \quad \lambda = \tan \theta = \text{const.}$$

Ihre Differentialgleichung lautet also

$$v_x u - u_x v + [v_y u - u_y v] y' = 0$$

oder

$$y' = - \frac{v_x u - u_x v}{v_y u - u_y v}.$$

Wir führen alle Ableitungen auf solche nach  $x$  zurück vermöge der Cauchy-Riemanschen Gleichungen

$$(4^*) \quad \begin{cases} u_x = v_y, & u_{xx} = -u_{yy} = v_{xy}, \\ u_y = -v_x, & v_{yy} = -v_{xx} = u_{xy}. \end{cases}$$

Dann heisst der Nenner von  $y'$

$$u_x u + v_x v.$$

Dividiert man jetzt Zähler und Nenner durch  $u$ , so kommt

$$(18) \quad y' = \frac{\lambda u_x - v_x}{u_x + \lambda v_x}, \quad f'(z) \neq 0.$$

Nun ist aber

$$y' = \lim_{\rho=0} \frac{d\eta}{d\xi} = \tan \bar{\varphi}.$$

Setzt man noch

$$(19) \quad \frac{v_x}{u_x} = \tan \psi,$$

dann besagt (18)

$$\bar{\varphi} \equiv \theta - \psi \pmod{2\pi}$$

oder

$$(20) \quad \arctan y' \equiv \arctan \lambda - \arctan \frac{v_x}{u_x}.$$

Damit ist aber die Winkeltreue der Abbildung von der  $u-v$ -Fläche auf die  $x-y$ -Ebene in jedem einfachen Punkte  $z_0$  bewiesen; denn der Satz von der Winkeltreue verlangt  $\lim_{\bar{r} \rightarrow 0} (\theta - \bar{\varphi}) = q(z_0)$ , d. h. eine Funktion von  $z_0$  allein, und es gilt  $\frac{v_x}{u_x} \rightarrow q(z_0)$  mit  $\bar{r} \rightarrow 0$  (die Ableitung einer analytischen Funktion ist unabhängig vom Wege).

Wir wollen nun den Krümmungsmittelpunkt  $\xi_\lambda$ ,  $\eta_\lambda$  der Stromlinie vom Parameter  $\lambda$  bestimmen. Allgemein ist

$$(21) \quad \xi_\lambda = -\frac{(1+y'^2)y'}{y''}, \quad \eta_\lambda = \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Zur Berechnung leiten wir (20) nach  $\xi \equiv x$  ab und erhalten

$$(22) \quad \frac{y''}{1+y'^2} = -\frac{u_x v_{xx} - v_x u_{xx} + (u_x v_{xy} - v_x u_{xy})y'}{u_x^2 + v_x^2} \\ = -\frac{u_x v_{xx} - v_x u_{xx} + (u_x u_{xx} + v_x v_{xx})y'}{u_x^2 + v_x^2}.$$

Die Ausrechnung gibt

$$(22^*) \quad \frac{y''}{1+y'^2} = \frac{(v_x u_{xx} - u_x v_{xx})(u_x + \lambda v_x) - (u_x u_{xx} + v_x v_{xx})(\lambda u_x - v_x)}{(u_x^2 + v_x^2)(u_x + \lambda v_x)}.$$

Wir setzen

$$(23) \quad \begin{cases} A = u_x u_{xx} + v_x v_{xx} \\ B = v_x u_{xx} - u_x v_{xx}, \end{cases} \quad \text{also} \quad (23^*) \quad A^2 + B^2 = (u_x^2 + v_x^2)(u_{xx}^2 + v_{xx}^2).$$

Dann wird der Zähler  $Z$  rechter Hand in (22\*)

$$Z = B(u_x + \lambda v_x) - A(\lambda u_x - v_x) = (A v_x + B u_x) - \lambda(A u_x - B v_x).$$

Wird weiter gesetzt

$$(24) \quad \begin{cases} \alpha = A v_x + B u_x \\ \beta = A u_x - B v_x, \end{cases} \quad \text{also } (24^*) \quad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = (u_x^2 + v_x^2)(A^2 + B^2) \\ \quad \quad \quad = (u_x^2 + v_x^2)^2 (u_{xx}^2 + v_{xx}^2) \end{cases}$$

$$(24^{**}) \quad \begin{cases} \alpha u_x - \beta v_x = (u_x^2 + v_x^2) B \\ \alpha v_x + \beta u_x = (u_x^2 + v_x^2) A, \end{cases}$$

so wird einfacher  $Z = \alpha - \lambda \beta$ .

Jetzt wird

$$(25) \quad \begin{cases} \xi_\lambda = - \frac{(1 + y'^2) y'}{y''} = \frac{(u_x^2 + v_x^2)(v_x - \lambda u_x)}{\alpha - \lambda \beta}, \\ \eta_\lambda = \frac{1 + y'^2}{y''} = \frac{(u_x^2 + v_x^2)(u_x + \lambda v_x)}{\alpha - \lambda \beta}. \end{cases}$$

Da  $\xi_\lambda, \eta_\lambda$  lineare Funktionen von  $\lambda$  mit gleicher Nennerfunktion sind, liegt der Punkt  $\xi_\lambda, \eta_\lambda$  auf einer festen (von  $\lambda$  unabhängigen) Geraden; es ist die Bonnetsche Gerade. Um die Richtung  $\chi$  dieser Geraden zu bestimmen, können wir uns nun ein besonders bequemes  $\lambda$  herauswählen. Wir wählen

$$(25^*) \quad \lambda = \frac{\alpha}{\beta},$$

das den Nenner zu 0 macht, und erhalten

$$(25^{**}) \quad \tan \chi = \lim_{\lambda \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}} \frac{\eta_\lambda}{\xi_\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}} \frac{u_x + \lambda v_x}{v_x - \lambda u_x} = \frac{\beta u_x + \alpha v_x}{\beta v_x - \alpha u_x} = - \frac{A}{B}.$$

Somit erhält die Bonnetsche Gerade die Gleichung

$$A(\xi - \xi_\lambda) + B(\eta - \eta_\lambda) = 0$$

oder

$$(26) \quad A\xi + B\eta = C,$$

wobei

$$C = - \begin{vmatrix} -\xi_\lambda & \eta_\lambda \\ B & A \end{vmatrix} = - \frac{u_x^2 + v_x^2}{\alpha - \lambda \beta} \begin{vmatrix} \lambda u_x - v_x & u_x + \lambda v_x \\ B & A \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2.$$

Dagegen hat das aus  $z_0$  auf die Gerade gefällte Lot die Gleichung

$$B\xi - A\eta = 0.$$

Der Lotfusspunkt  $\varrho$  hat also die Koordinaten

$$(27) \quad \begin{cases} \xi^* = \frac{(u_x^2 + v_x^2)A}{A^2 + B^2} = \frac{A}{u_{xx}^2 + v_{xx}^2} \\ \eta^* = \frac{(u_x^2 + v_x^2)B}{A^2 + B^2} = \frac{B}{u_{xx}^2 + v_{xx}^2} \end{cases}$$

Jetzt ist

$$\begin{aligned} \varrho = \xi^* + \eta^* i &= \frac{A + Bi}{u_{xx}^2 + v_{xx}^2} = \frac{u_x u_{xx} + v_x v_{xx} + (v_x u_{xx} - u_x v_{xx})i}{u_{xx}^2 + v_{xx}^2} \\ &= \frac{(u_x + v_x i)(u_{xx} - v_{xx} i)}{u_{xx}^2 + v_{xx}^2} = \frac{u_x + v_x i}{u_{xx} + v_{xx} i} \end{aligned}$$

Damit ist

$$(28) \quad \varrho = \varrho(z) = \frac{f'(z)}{f''(z)}$$

und damit zugleich (14) bewiesen.

Schliesslich ergibt sich für den Krümmungsmittelpunkt

$$z + \varrho_\lambda$$

der Stromlinie vom Parameter  $\lambda$  der Ausdruck

$$\varrho_\lambda = (1 + \mu i)\varrho(z)$$

mit

$$\mu = \frac{\lambda\alpha + \beta}{\alpha - \lambda\beta}$$

Er zeigt, dass die Punkte  $\varrho_\lambda$  auf einer Geraden liegen, die durch  $z + \varrho(z)$  hindurchgeht und auf dem Vektor  $\varrho(z)$  senkrecht steht.

Herr Böhmer hat in Fortführung dieser Untersuchung den Ort der 2. Krümmungsmittelpunkte als Kurve dritter Ordnung vom Geschlecht 0 festgestellt; indessen wird in dieser Arbeit kein Gebrauch davon gemacht werden.

## II. Allgemeines über die $\Gamma$ -Funktion.

### § 1. Definitionen und Zusammenstellung.

Die  $\Gamma$ -Funktion ist eine meromorphe Funktion. Sie wird definiert durch  
*Funktionalgleichung*

$$(29) \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

Anfangsbedingung

$$(30) \quad \Gamma(1) = 1$$

und Limesgleichung

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(n) \cdot n^z} = 1.$$

Aus dieser Definition ergibt sich durch »Summation« die Weierstrasssche Produktdarstellung

$$(32) \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = z \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-z} \right\} = z e^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right\},$$

wobei  $C$  die Eulersche Konstante ist.

Die reziproke  $\Gamma$ -Funktion ist also eine ganze transzendente Funktion; die  $\Gamma$ -Funktion besitzt keine endlichen Nullstellen. Aus der Darstellung (32) kann man ablesen, dass sie an den Stellen  $0, -1, -2, \dots$  einfache Pole besitzt.

Jede Funktion, die sich durch Differenzgleichung, Limesgleichung (und Anfangsbedingung) definieren lässt, hat einen Ergänzungssatz und ein Multiplikationstheorem. Der *Ergänzungssatz* lautet

$$(33) \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

und das *Multiplikationstheorem*

$$(34) \quad \Gamma(kz) = \frac{k^{kz - \frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}} \prod_{r=0}^{k-1} \Gamma\left(z + \frac{r}{k}\right).$$

Aus dem Multiplikationstheorem kann man durch Logarithmieren und einen Grenzübergang zu unendlich grossem  $k$  die *Stirlingsche Formel*

$$(35) \quad \begin{cases} \lg \Gamma(z) = \frac{1}{2} \lg 2\pi + \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \mu(z) \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \mu(z) = 0 \end{cases}$$

gewinnen, wie Herr Böhmer in seinen Vorlesungen über Differenzgleichungen gezeigt hat. Als Stirlingsche Formel im engeren Sinne bezeichnet man die aus (35) folgende asymptotische Relation

$$(35') \quad \frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi z} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z}} \rightarrow 1.$$

Die logarithmische Ableitung der  $\Gamma$ -Funktion ist die Gaussche  $\psi$ -Funktion

$$(36) \quad \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \psi(z).$$

Man definiert heute die  $\psi$ -Funktion auch selbständig durch 3 Aussagen (Differenzgleichung, Anfangsbedingung, Limesgleichung).

$$(37) \quad \psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$$

$$(38) \quad \psi(1) = -C$$

$$(39) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\psi(z+n) - \lg n) = 0.$$

Durch Summation findet man

$$(40) \quad \psi(z) = -C - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{z+k} - \frac{1}{1+k} \right).$$

Die  $\psi$ -Funktion besitzt an den Stellen  $0, -1, -2, \dots$  einfache Pole. Die Formeln (37), (38), (39), (40) lassen sich mit Hilfe der Beziehung (36) aus (29), (30), (31), (32) gewinnen. Ebenso kann man mit (36) aus (33) und (34) Ergänzungssatz und Multiplikationstheorem der  $\psi$ -Funktion herleiten. Aus (35) folgt die Stirlingsche Formel für die  $\psi$ -Funktion, wobei man das Glied  $\frac{1}{2z}$  mit in die  $\nu$ -Funktion rechnet:

$$(41) \quad \psi(z) = \lg z - \nu(z), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \nu(z) = 0.$$

Will man aus (41) eine asymptotische Beziehung herleiten, legt man besser die Stirlingsche Formel 2. Art

$$(41^*) \quad \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) = \lg z + (\nu(z) - 2\nu(2z))$$

zugrunde. Über die Stirlingschen Formeln 2. Art auch der  $\Gamma$ -Funktion wird noch zu reden sein (S. 297). Aus (40) kann man durch Differenzieren Reihen für  $\psi'(z)$ ,  $\psi''(z)$  usw. ableiten. Die  $\psi$ -Funktion hat nur reelle einfache Nullstellen. Sie liegen zwischen den Polen und rücken nach links in die Pole ein (s. III, § 1, Hermite). Ausserdem liegt eine positive Nullstelle bei  $1,46\dots$

Um alle im folgenden nötigen Voraussetzungen gleich zusammenzustellen, setzen wir hier noch einige Darstellungen für die  $\mu$ -Funktion her. Die entsprechenden Darstellungen für die  $\nu$ -Funktion lassen sich daraus gewinnen. Will man nämlich die Stirlingsche Formel zur rechnerischen Behandlung der  $\Gamma$ -Funktion benutzen, muss man vor allem die  $\mu$ -Funktion kennen. Man hat damit das Problem keineswegs bloss verschoben, sondern es wesentlich vereinfacht; denn die  $\mu$ -Funktion dient für numerische Probleme wegen ihrer Limeseigenschaft als Korrektur zur Stirlingschen Formel. Schon Stirling fand für  $\mu(z)$  die folgende asymptotische Entwicklung

$$(42) \quad \mu(z) = \sum_{k=2}^{2m-2} \frac{B_k}{(k-1)k} z^{-k+1} + R_{2m}.$$

Die Reihe ist asymptotisch und pseudokonvergent, d. h. für grosse  $z$  nähert sich  $\mu(z)$  immer mehr geeignet gewählten Reihenabschnitten, für jedes  $z$  lässt sich der Restbetrag unter eine angebbare Schranke bringen, und mit wachsendem  $z$  sinkt diese Schranke unter jede Grenze. Tatsächlich divergiert ja die Reihe, da die Zahlen  $B_k$ , die Bernoullischen Zahlen, über alle Grenzen wachsen. Sie sind definiert durch

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} B_r = 0, \quad [0 < k]. \end{cases}$$

Asymptotisch und pseudokonvergente Reihen sind zur numerischen Berechnung wohl geeignet. Als Restmajorante für die  $\mu$ -Funktion hat man (nach Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion S. 208)

$$(42^*) \quad |R_{2m}(z)| < \frac{|B_{2m}|}{(2m-1)2m|z|^{2m-1} \left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^{2m}},$$

(wobei zu beachten ist, dass Nielsen nur die Bernoullischen Zahlen mit geradem Index durchnummeriert und alle positiv nimmt).

Jede Funktion, die sich in eine für  $0 < \Re z$  geltende pseudokonvergente Potenzreihe entwickeln lässt, gestattet eine Darstellung durch eine konvergente Fakultätenreihe. So ist es Binet gelungen, die  $\mu$ -Funktion durch Fakultätenreihen darzustellen. Für kleinere  $z$  wird man zur numerischen Berechnung notgedrungen nach diesen Reihen greifen müssen. Wir benützen im folgenden einmal eine Fakultätenreihe für  $\mu(z) - \mu(2z) = \lambda(z)$

$$(43) \quad \lambda(z+1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu! c_{\nu}^*}{z(z+1)\cdots(z+\nu)},$$

die Herr Otto Rocktäschel (Diss., Dresden 1922, S. 36) als zur numerischen Berechnung besonders geeignet empfiehlt. Er hat die ersten zehn  $c_{\nu}^*$  berechnet, die wir der Rocktäschelschen Arbeit (S. 37) entnehmen, soweit sie für unsere Zwecke gebraucht wurden.

$$\begin{array}{ll} c_0^* = \frac{+1}{4!} & c_4^* = \frac{+43}{8! 2^3} \\ c_1^* = \frac{-1}{4!} & c_5^* = \frac{+387}{9! 2^3} \\ c_2^* = \frac{-7}{6! 2^3} & c_6^* = \frac{+52787}{10! 2^7} \\ c_3^* = 0 & c_7^* = \frac{+43654}{10! 2^7} \end{array}$$

Indessen handhaben sich die Fakultätenreihen recht unbequem.

## § 2. Allgemeines über ihre konforme Abbildung; die Abhandlung von Lense.

Ehe ich nun auf die konforme Abbildung durch die  $\Gamma$ -Funktion eingehe, möchte ich mich mit einer Abhandlung auseinandersetzen, die im November 1928 erschienen ist, als ich mit meiner Arbeit noch nicht fertig war; es ist dies eine Abhandlung von Herrn Lense in München: Über die konforme Abbildung durch die  $\Gamma$ -Funktion.

Herr Lense ist gewissermassen gerade von der anderen Seite, nämlich von den Höhenlinien her, an das Problem herangegangen. Von den Stromlinien gibt er nur die reellen Linien durch die Kreuzungspunkte an. Durch Ermittlung der Konvergenzwerte der  $\Gamma$ -Funktion kann er den Verlauf der Höhen- und Strom-

linien im Grossen angeben. Für die Umgebung der Achse ist die Betrachtung des reellen Verlaufs der  $\Gamma$ -Funktion in erster Näherung ausreichend zum Studium der Höhenlinien. Geometrische Besonderheiten und vor allem der Verlauf der Stromlinien in der Umgebung der Achse interessieren Lense nicht so, da es ihm besonders auf die Riemannsche Fläche ankommt. Das Bild in der  $x-y$ -Ebene, das uns hier die Hauptsache ist, interessiert ihn nur mittelbar als Hilfe zur Konstruktion der Riemannschen  $u-v$ -Fläche. Da die Konvergenzwerte aber zum Verständnis des Bildes in der  $x-y$ -Ebene in der Umgebung des  $\infty$  fernen Punktes wesentlich beitragen, will ich hier über die diesbzgl. Lenseschen Ergebnisse referieren.

Unter den Konvergenzwerten versteht man die Werte, denen die Funktion bei bestimmter Annäherung an den wesentlich singulären Punkt  $\infty$  zustrebt. Es sei

$$\Gamma(z) = w(z) = u + vi = \rho e^{\theta i}, \quad z = r e^{\varphi i}.$$

In allen Winkelräumen der rechten Halbebene, ausschliesslich der imaginären Achse, ist

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Gamma(z)|} = 0,$$

in allen Winkelräumen der linken Halbebene, ausschliesslich der reellen und einschliesslich der imaginären Achse, ist

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |\Gamma(z)| = 0.$$

In allen Winkelräumen der  $\frac{\text{oberen}}{\text{unteren}}$  Halbebene, ausschliesslich der reellen Achse, ist

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \theta = \pm \infty.$$

Die Konvergenzwerte von  $\Gamma(z)$  auf Wegen, für die

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi = \pm \pi,$$

sind getrennt zu untersuchen. Hierbei sind mehrere Fälle zu unterscheiden. Ist

$$|y| \geq \gamma,$$

dann gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |\Gamma(z)| = 0.$$

Weiter sind noch folgende Fälle denkbar: Es gibt eine Folge, für die

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |y| = 0.$$

Ist gleichzeitig  $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} |y| \neq 0$ , so kommt die Funktion immer wieder in Gebiete mit dem Konvergenzwerte Null, es kommt also kein anderer Wert in Frage. Ist dagegen auch  $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} |y| = 0$ , so kommt der Weg in beliebige Nähe der negativen reellen Achse, so dass überhaupt kein Konvergenzwert auftreten kann. Denn auf der negativen reellen Achse kann die  $I$ -Funktion keinem Grenzwerte zustreben, weil sie in den Punkten  $0, -1, \dots$  den Wert  $\infty$  annimmt und dazwischen wegen (29) bei entsprechend grosser Entfernung vom Nullpunkt dem Werte  $0$  beliebig nahe kommt.

Es ergeben sich sonach nur  $0$  und  $\infty$  als Konvergenzwerte. Aus diesen Werten ergibt sich die Richtung der Stromlinien  $\theta = \text{konst.}$  und der Höhenlinien  $\rho = \text{konst.}$  im Unendlichen. Da die Höhenlinien um die Pole von denen durch die Kreuzungspunkte abgeschnürt werden, kommt nur  $\lim_{z \rightarrow \infty} |\Gamma(z)| = 0$  in Frage.

Da sie ausserdem nach rechts hinausgehen, muss sich die Gesamtheit der ins Unendliche verlaufenden Höhenlinien senkrecht stellen. Entsprechend müssen sich die Stromlinien horizontal einstellen, und zwar tun das in der oberen und der unteren Halbebene die Linien positiven und negativen Winkels. Die Konvergenzgleichung berücksichtigt die Zusammenhangsverhältnisse der Urbereiche nicht, deshalb konnte überhaupt nur die Trennung in obere und untere Halbebene erfolgen. Tatsächlich liegen die Urbereiche einmal mit der oberen, einmal mit der unteren Halbebene oben (s. S. 278).

Die gegenseitige Lage der Höhenlinien in der Umgebung der reellen Achse ist aus dem reellen Verlauf der  $\Gamma$ -Funktion bestimmt. Herr Hayashi<sup>1</sup> gibt folgende Werte an, wobei unter  $z_n$  immer die Nullstellen der  $\psi$ -Funktion zu verstehen sind.

$z_0 = 1,461\ 632$	$\Gamma(z_0) = 0,885\ 6032$
$z_1 = -0,504$	$\Gamma(z_1) = -3,544\ 644$
$z_2 = -1,573$	$\Gamma(z_2) = 2,302\ 410$
$z_3 = -2,611$	$\Gamma(z_3) = -0,888\ 1367$
$z_4 = -3,635$	$\Gamma(z_4) = 0,245\ 1277.$

<sup>1</sup> Keiichi Hayashi, Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen und deren Produkte sowie der Gammafunktion.

Ein Überschneiden der Höhenlinien ist nur in den Kreuzungspunkten (daher der Name) möglich, da dort mit  $\frac{dv}{dz} = 0$  die Funktionaldeterminante  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$  unbestimmt wird. Das Bild bestätigt die allgemeine Bemerkung, dass die reellen Extrema im Komplexen erheblich an Bedeutung verlieren. Im Reellen bedeuten sie Gipfel oder Täler. Denkt man sich aber die Beträge als Erhebungen über der komplexen Ebene, so bilden auch die Betragskurven, die von den Extremwerten ausgehen, Höhenlinien, die am Abhang hinlaufen. Wenn man das Bild weiterspinnnt und die Pole als allerdings unendlich hohe Berge deutet, so ergibt sich für unser spezielles Bild folgendes: Zwischen  $z_0$  und  $z_4$  haben wir einen ganzen Gebirgsstock mit 4 Einzelgipfeln in  $0, -1, -2, -3$  und 5 Pässen  $z_0, \dots, z_4$ , während weiterhin nur noch einsame Gipfel in  $-4, -5, \dots$  auftreten, zwischen denen immer tiefere Pässe in  $z_5, z_6, \dots$  liegen. Das Gesamtgebirge läuft bis zur asymptotischen Höhe  $0$  (Meeresspiegel) aus.

In der Zusammenfassung der Grundgebiete zu Fundamentalbereichen ist eine gewisse Willkür möglich. Wir fassen so zusammen, dass die positive Achse von  $z_0$  ab in einem dreizipfligen Gebiet liegt. Die zugehörige Riemannsche Fläche siehe bei Lense. Wir geben durch Anlegen und Vorzeichen die Halbebenen in unserer schematischen Figur I, durch Pfeile ihren positiven Umlaufssinn an. Die Figur soll für  $\Gamma(z)$  selbst, nicht wie bei Lense für  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  gelten. Die Bezeichnungsweise stimmt im übrigen in Zeichnung I mit Zeichnung II überein.

### III. Die analytischen Grundlagen der Rechnung.

Das Bild der Stromlinien und Höhenlinien der  $\Gamma$ -Funktion genau festzulegen, war meine Hauptaufgabe. Dem im ersten Teil entwickelten Programm entsprechend sollten auch die geometrischen Eigenschaften der Figur festgestellt werden. Als einfachste Darstellung der  $\Gamma$ -Funktion lernten wir die Stirlingsche Formel (35) kennen, die wir als Hauptformel der Rechnung benützen werden. Der Geltungsbereich dieser Formel ist nicht die ganze Ebene. Es machten sich deshalb für Teilbereiche andere Formeln oder Verbesserungen nötig. Diese zogen Abschätzungen nach sich. Für die Berechnung der geometrischen Eigenschaften mussten wieder andere Beziehungen hergeleitet werden, so dass der ganze Formelapparat im Laufe der Zeit sehr umfangreich geworden ist. Ich werde deshalb in einem ersten Teil die Hauptformeln ableiten und einen zweiten Teil

über die praktische Ausführung folgen lassen. In diesem zweiten Teil sollen Verbesserungen und Abschätzungen ihren Platz finden. Am Schluss werden die Ergebnisse tabellarisch zusammengestellt. — Es wäre natürlich für bloss zeichnerische Zwecke garnicht nötig gewesen, eine so grosse Anzahl von Werten (etwa 200) mit so grosser Genauigkeit (6 Stellen) zu berechnen. Die Tabellen wollen als ein Vorstoss in das ziemlich unbekannte Land der numerischen Werte der  $\Gamma$ -Funktion für komplexes Argument aufgefasst sein. (Herr Rocktäschel macht den ersten Vorstoss, vor ihm ist erst ein einziger Wert (Gauss) bekannt.) Sehr dicht ist das Netz ja nicht, aber mit den von Herrn Rocktäschel ausgearbeiteten Methoden ist es möglich, Zwischenwerte zu berechnen.

### § 1. Die Nullstellen der $\psi$ -Funktion.

Da im folgenden das Bild der Stromlinien und Höhenlinien der  $\Gamma$ -Funktion im Quadrat mit der Seite 20 berechnet werden soll, müssen wir die Anzahl der schon berechneten Nullstellen der  $\psi$ -Funktion noch um einige vermehren. Herr Böhmer hat im Anschluss an den Hermiteschen Satz über die Nullstellen der  $\psi$ -Funktion zwei Berechnungsmethoden ausgearbeitet. Der Hermitesche Satz heisst:  $\psi(z)$  hat im Intervall  $-n < z < -n + 1$  eine und nur eine Nullstelle, die sich mit wachsendem  $n$  dem Wert  $z_n = -n + \frac{1}{\lg(n-1)}$  nähert. Es gilt also zunächst

$$(44) \quad \psi(z_n) = 0, \quad -n < z_n < -n + 1 \quad (n \text{ pos. ganze Zahl}).$$

Für die Berechnung teilen wir die Nullstellen ein in solche, die im Intervall  $-n + \frac{1}{4} \dots -n + \frac{1}{2}$  liegen, und solche, die zwischen  $-n \dots -n + \frac{1}{4}$  liegen. Gleichzeitig beweisen wir, dass weiter rechts keine Nullstellen vorhanden sind, dass sich also (44) zu

$$(44^*) \quad \psi(z_n) = 0, \quad -n < z_n < -n + \frac{1}{2}$$

verschärfen lässt.

Für das erste Intervall setzen wir

$$(45) \quad z_n = -n + \frac{1}{2} - \eta_n, \quad 0 < \eta_n < \frac{1}{4}.$$

Dann heisst der Ergänzungssatz

$$(33') \quad \psi\left(-n + \frac{1}{2} - \eta_n\right) = \psi\left(1 + n - \frac{1}{2} + \eta_n\right) - \pi \cot\left(\frac{1}{2} - \eta_n - n\right)\pi,$$

also wegen (44)

$$(46) \quad 0 = \psi\left(n + \frac{1}{2} + \eta_n\right) - \pi \tan \eta_n \pi.$$

Für  $n \geq 2$  ist wegen des positiven Vorzeichens des linken Ausdrucks in (46) klar, dass  $0 < \eta_n < \frac{1}{2}$  ist. Für  $n=1$  sieht man es aus der Figur sofort ein, da für  $n=1$  in  $\eta=0$  der Differentialquotient des linken Ausdrucks

$$\psi'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} - 4 = 0,93480$$

ist, der des rechten Ausdrucks aber

$$\pi^2 = 9,8696 \dots,$$

also mehr als 10mal so gross ist. Damit ist aber (44\*) bewiesen. Aus (46) folgt nach der Stirlingschen Formel 2. Art (41\*)

$$(47) \quad \begin{cases} \pi \tan \eta_n \pi = \psi\left(n + \frac{1}{2} + \eta_n\right) = \lg(n + \eta_n) + \nu(n + \eta_n) - 2\nu(2n + 2\eta_n) \\ \quad \quad \quad = \lg n + \lg\left(1 + \frac{\eta_n}{n}\right) + \nu(n + \eta_n) - 2\nu(2n + 2\eta_n). \end{cases}$$

Man bestimmt erst

$$\pi \tan \eta^0 \pi = \lg n,$$

dann

$$\pi \tan \eta^1 \pi = \lg n + \lg\left(1 + \frac{\eta^1}{n}\right)$$

und zieht dann noch die  $\nu$ -Funktion heran.

Für das zweite Intervall setzen wir

$$(48) \quad z_n = -n + \xi_n, \quad 0 < \xi_n < \frac{1}{4}$$

Jetzt liefert der Ergänzungssatz

$$(33') \quad \psi(-n + \xi_n) = \psi(1 + n - \xi_n) - \pi \cot(\xi_n - n) \pi,$$

also wegen (44)

$$(49) \quad \begin{cases} \pi \cot \xi_n \pi = \psi(1 + n - \xi_n) \cong \lg \left( \frac{1}{2} + n - \xi_n \right) = \lg \left( \frac{1}{2} + n \right) + \lg \left( 1 - \frac{2\xi_n}{2n+1} \right) \\ \cong \lg \left( \frac{1}{2} + n \right) - \frac{2\xi_n}{2n+1 - \xi_n} \end{cases}$$

Man bestimmt zuerst  $\xi^0$  aus

$$\pi \cot \xi^0 \pi = \lg \left( \frac{1}{2} + n \right),$$

dann  $\xi^1 = \xi^0 + \delta_1$  aus

$$\pi \cot(\xi^0 + \delta_1) \pi = \pi \cot \xi^0 \pi - \frac{2(\xi^0 + \delta_1)}{2n+1 - \xi^0 - \delta_1},$$

dann  $\xi^2 = \xi^1 + \delta_2$  aus

$$\pi \cot(\xi^1 + \delta_2) = \lg \left( \frac{1}{2} + n - \xi^1 - \delta_2 \right).$$

## § 2. Stromlinien und Höhenlinien.

Wir gehen jetzt an die Aufstellung der Formeln zur Berechnung der Stromlinien. Wir legen der Rechnung die Stirlingsche Formel zugrunde

$$(35) \quad \lg \Gamma(z) = \frac{1}{2} \lg 2\pi + \left( z - \frac{1}{2} \right) \lg z - z + \mu(z)$$

und nennen sie die Stirlingsche Formel 1. Art, weil wir ihr eine Stirlingsche Formel 2. Art an die Seite stellen wollen in folgender Gestalt

$$(35^*) \quad \lg \Gamma \left( z + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \lg 2\pi + z \lg z - z - \{ \mu(z) - \mu(2z) \}.$$

Dass diese Formel ohne die  $\mu$ -Korrektur eine bessere Näherung darstellen muss als (35'), sieht man schon daraus, dass aus dem Raabeschen Spannenintegral (Übergang von 34 zu 35)

$$\int_0^1 \lg \Gamma(z+u) du = \frac{1}{2} \lg 2\pi + z \lg z - z$$

eben diese Näherung fließt. Man kann (35\*) aus (35) gewinnen. Man schreibt dazu (35) für das Argument  $2z$  und zieht diese Formel von (35) ab. Auf die Differenz wendet man das Multiplikationstheorem (34) an.

Die Formel (35\*) ist schon seit Gauss bekannt, aber wenig beachtet worden. Erst Herr Böhmer hat sie neu hergeleitet und ihre Bedeutung für alle numerischen Probleme bemerkt. Denn  $\mu(z) - \mu(2z)$  nähert sich, wie Herr Rocktäschel zeigt, mit wachsendem Argument dem Wert  $-\frac{\mu}{2}$ . Er wägt die Vorteile beider Formeln [(35) und (35\*)] sorgfältig gegeneinander ab und kommt zu dem Resultat: »Berücksichtigt man bei der Ermittlung von  $\lg \Gamma(z)$  kein Glied des Restes, so ist entschieden die verbesserte Stirlingsche Formel der eigentlichen Stirlingschen Formel vorzuziehen. Wird hingegen das erste Glied der Restfunktion berücksichtigt, so ist es ganz gleich, welche Formel, ob die Stirlingsche Formel oder ihre Verbesserung zur Ermittlung von  $\lg \Gamma(z)$  benützt wird, da der Vorteil der um wenig kleineren Koeffizienten in  $\lambda(z) = \mu\left(z - \frac{1}{2}\right) - \mu(2z - 1)$  gegenüber denjenigen in  $\mu(z)$  durch das um  $\frac{1}{2}$  verkleinerte Argument annähernd wieder ausgeglichen wird«. Wir werden im folgenden das erste Glied der Restfunktion berücksichtigen. Da beide Darstellungen dann annähernd gleichwertig sind, werden wir sie beide benützen, und zwar die erste auf den Geraden  $x \equiv 0 \pmod{1}$ , die andere auf den Geraden  $x \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$ . Da wir reelle und imaginäre Linien erhalten wollen, müssen wir nach (6\*) dem Arkus der  $\Gamma$ -Funktion die Werte  $\frac{k\pi}{2}$  erteilen, haben also die Stirlingsche Formel in Real- und Imaginärteil zu zerlegen. Wir erhalten so das Formelpaar

$$(50) \quad \Im \lg \Gamma(x + yi) = \frac{y}{2} \lg(x^2 + y^2) + \left(x - \frac{1}{2}\right) \arctan \frac{y}{x} - y + \Im \mu(z) = \frac{k\pi}{2}$$

$$(50^*) \quad \Im \lg \Gamma\left(x + \frac{1}{2} + yi\right) = \frac{y}{2} \lg(x^2 + y^2) + x \arctan \frac{y}{x} - y - \Im \{\mu(z) - \mu(2z)\} = \frac{k\pi}{2}.$$

Für die Restfunktionen lauten die asymptotischen Entwicklungen:

$$(42) \quad \begin{cases} \mu(z) = \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - + \dots \\ \mu(z) - \mu(2z) = \frac{1}{24z} - \frac{7}{8 \cdot 360z^3} + \frac{31}{32 \cdot 1260z^5} - + \dots \end{cases}$$

also

$$\Im \mu(z) = -\frac{y}{12(x^2 + y^2)} + \frac{(3x^2 - y^2)y}{360(x^2 + y^2)^3} - + \dots,$$

$$\Im \{\mu(z) - \mu(2z)\} = -\frac{y}{24(x^2 + y^2)} + \frac{7(3x^2 - y^2)y}{8 \cdot 360(x^2 + y^2)^3} - + \dots.$$

Mit dieser Korrektur belasten wir unsere Formel nicht, wir berücksichtigen sie im logarithmischen Teil, setzen also

$$(51) \quad \frac{y}{2} \lg(x^2 + y^2 + \rho) = \frac{y}{2} \lg(x^2 + y^2) - \frac{y}{a(x^2 + y^2)}, \quad a=12 \text{ bzw. } -24.$$

Entwickeln nach  $\rho$  liefert in erster Näherung  $\rho = -\frac{2}{a}$ , also für die erste Formel

$$\rho = -\frac{1}{6}$$

und für die zweite

$$\rho = \frac{1}{12}.$$

Wir legen also der Rechnung das Formelsystem

$$\left\{ \begin{array}{l} (52) \quad \operatorname{arc} \Gamma(x + yi) = \frac{y}{2} \lg\left(x^2 + y^2 - \frac{1}{6}\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right) \arctan \frac{y}{x} - y = \frac{k\pi}{2} \\ (52^*) \quad \operatorname{arc} \Gamma\left(x + \frac{1}{2} + yi\right) = \frac{y}{2} \lg\left(x^2 + y^2 + \frac{1}{12}\right) + x \arctan \frac{y}{x} - y = \frac{k\pi}{2} \end{array} \right.$$

zugrunde.

Aus (52\*) kann man für die Kurve mit dem Parameter  $k=0$  eine explizite Gleichung in Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  ableiten

$$\frac{1}{2} \lg\left(r^2 + \frac{1}{12}\right) = 1 - \varphi \cot \varphi.$$

Sie schmiegt sich der Kurve in unserer Figur sehr gut an.

Hat man die reellen und imaginären Linien im ersten Quadranten berechnet, so beherrscht man damit das ganze Kurvenbild. Symmetrie zur reellen Achse ist natürlich vorhanden. Man beherrscht aber auch den 2. Quadranten. Schon im 1. Quadranten ist die Berechnung der  $y$ -Werte auf der Geraden  $x=1$  entbehrlich. Sie ergeben sich aus den Werten auf  $x=0$ . Denn wegen (29) ist

$$iy \Gamma(yi) = \Gamma(1 + yi)$$

$$\operatorname{arc} \Gamma(1 + yi) = \operatorname{arc} \Gamma(yi) + \frac{\pi}{2}.$$

Die Lösungen der Gleichungen  $\operatorname{arc} \Gamma(yi) = \frac{k\pi}{2}$  ( $k=0, 1, \dots$ ) sind Lösungen der Gleichungen  $\operatorname{arc} \Gamma(1 + yi) = \frac{k\pi}{2}$  ( $k=1, 2, \dots$ ).

Die Funktionalgleichung (29) führt nun ebenso in den 2. Quadranten. Sie liefert

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + yi\right) \prod_{r=0}^{2k-1} \left(\frac{1}{2} + r - k + yi\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + k + yi\right).$$

Nun ist aber

$$\prod_{r=0}^{2k-1} \left(\frac{1}{2} + r - k + yi\right) = (-1)^k \prod_{r=0}^{k-1} \left[y^2 + \frac{[2(r-k) + 1]^2}{4}\right],$$

also

$$(53) \quad \lg \Gamma\left(\frac{1}{2} - k + yi\right) + k\pi i + \sum_{r=0}^{k-1} \lg \left[y^2 + \frac{[2(r-k) + 1]^2}{4}\right] = \lg \Gamma\left(\frac{1}{2} + k + yi\right)$$

$$(53^*) \quad \operatorname{arc} \Gamma\left(\frac{1}{2} - k + yi\right) + k\pi = \operatorname{arc} \Gamma\left(\frac{1}{2} + k + yi\right).$$

Und für die Geraden  $x \equiv 0 \pmod{1}$  gilt

$$\Gamma(-k + yi) \prod_{r=0}^{2k} (r - k + yi) = \Gamma(1 + k + yi)$$

$$\prod_{r=0}^{2k} (r - k + yi) = (-1)^k \prod_{r=0}^{k-1} [(r-k)^2 + y^2] \cdot yi,$$

also

$$(54) \quad \lg \Gamma(-k + yi) + k\pi i + \sum_{r=0}^{k-1} \lg [(r-k)^2 + y^2] + \lg y + \frac{i\pi}{2} = \lg \Gamma(1 + k + yi)$$

$$(54^*) \quad \operatorname{arc} \Gamma(-k + yi) + (2k+1)\frac{\pi}{2} = \operatorname{arc} \Gamma(1 + k + yi).$$

Symmetrieachse der Zeichnung ist  $x = \frac{1}{2}$ .

Aus (53) und (54) sieht man, dass man auf den Geraden  $x \equiv 0 \pmod{1}$  und  $x \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$  von einem Realteil des Logarithmus der  $\Gamma$ -Funktion zum andern durch eine endliche Anzahl von Logarithmen rationaler Ausdrücke in  $y$  übergehen kann.

Auf diesen Geraden kann man den Realteil des Logarithmus der  $\Gamma$ -Funktion überhaupt exakt angeben, hat also für das Netz der Höhenlinien die Stirlingsche Formel garnicht nötig. Der Ergänzungssatz (33) liefert

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + yi\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - yi\right) = \frac{\pi}{\text{Cos} \pi y}$$

$$\lg \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + yi\right) \right| = \frac{1}{2} \lg \pi - \frac{1}{2} \lg \text{Cos} \pi y.$$

Dann kann man mit der Funktionalgleichung (29) weitergehen

$$(55) \quad \begin{cases} \lg \left| \Gamma\left(\frac{3}{2} + yi\right) \right| = \frac{1}{2} \lg \pi - \frac{1}{2} \lg \text{Cos} \pi y + \frac{1}{2} \lg \left(\frac{1}{4} + y^2\right) \\ \vdots \end{cases}$$

Das lässt sich nach beiden Seiten fortsetzen. Die allgemeine Formel ist in (53) enthalten. Diese Ausdrücke sind nun gleich  $\frac{k\pi}{2}$  zu setzen; denn wir wollen ein Quadratnetz abbilden. Auf den Geraden  $x \equiv 0 \pmod{1}$  kommt man ganz ähnlich zum Ziele. (29) und (33) liefern

$$\Gamma(z) \Gamma(-z) = \frac{\pi}{-z \sin \pi z}$$

$$\Gamma(yi) \Gamma(-yi) = \frac{\pi}{y \text{Sin} \pi y}$$

$$(56) \quad \lg |\Gamma(yi)| = \frac{1}{2} \lg \pi - \frac{1}{2} \lg y - \frac{1}{2} \lg \text{Sin} \pi y.$$

Dann kann man wieder mit (29) weitergehen. Die allgemeine Formel ist in (54) enthalten.

S. 279 wurde die Forderung erhoben, für reelle und imaginäre Linien den asymptotischen Verlauf und die Krümmungseigenschaften festzulegen. Das erste dieser Probleme aber haben wir schon gelöst; denn wir legten der Rechnung

die asymptotische Stirlingsche Formel zugrunde, eine Formel, die gerade um so genauer gilt, je mehr wir uns dem  $\infty$  fernen Punkt nähern. Eine Diskussion der Kurven nach dieser Formel liefert die schon S. 292 festgestellten Ergebnisse.

### § 3. Krümmungen in Kreuzungspunkten und Polen.

Das Netz mit der Maschenbreite  $\frac{\pi}{2}$  liegt jetzt vor. Um es zu Kurven zusammenzuschliessen, müssen wir die geometrischen Eigenschaften des Bildes untersuchen. Es soll sich zunächst um die Krümmung unserer Kurven in ausgezeichneten Punkten handeln. Wir beschränken uns dabei auf die Krümmung der Stromlinien in den Kreuzungspunkten und Polen; denn die Schnittpunkte der Höhenlinien unseres Netzes mit der Achse haben keinerlei Bedeutung für die Abbildung.

Der Krümmungsradius der rein imaginären oder der reellen Linie in ihrem Schnittpunkt mit der Achse ist der invariante Krümmungsvektor  $\varrho(z)$  in diesem Schnittpunkt. Denn da die  $\Gamma$ -Funktion (und ihre Ableitungen) symmetrisch, d. h. im Reellen reell ist, hat  $\varrho$  für reelle Werte die Richtung der reellen Achse, gibt also die Krümmung derjenigen unter den Büschelkurven an, die die reelle Achse senkrecht schneidet. Diese Eigenschaft aber haben wieder aus Symmetriegründen die rein imaginäre und die reelle Linie.

Das Bild der Stromlinien und Höhenlinien ändert sich nicht, wenn man statt  $\Gamma(z)$  die ganze transzendente Funktion  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  zugrunde legt. Durch Einführung der reziproken Funktion macht man den Pol zur Nullstelle (s. S. 281). Wir beginnen also mit der Krümmung der rein imaginären Linien in den Nullstellen von  $\frac{1}{\Gamma(z)}$ . Es liegt das erste Krümmungsproblem vor, und zwar schon für den Spezialfall der Krümmung in einer Wurzel von  $f(z)$ . Die rein imaginäre Linie und die reelle Achse sind in das Büschel der Stromlinien der  $\Gamma$ -Funktion selbst eingebettet.

Es ist  $f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}$  eine überall reguläre Funktion, also gilt die überall konvergente Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{\Gamma(z_0 + \zeta)} = A_0 + A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + \dots$$

Der Krümmungsvektor heisst

$$(14) \quad \varrho(z_0) = \frac{A_1}{2 A_2} = \frac{f'(z_0)}{f''(z_0)}$$

$$(57) \quad \varrho(z_0) = \frac{\psi(z_0)}{\psi'(z_0) - \psi(z_0)^2}.$$

Zur Berechnung von (57) ergeben sich zwei Wege. Entweder man ermittelt die Potenzreihe für  $\frac{1}{\Gamma(-n+\zeta)}$  und hat damit  $A_1$  und  $A_2$  direkt, oder man bestimmt den Grenzwert von (57) für  $z=-n$ . Um den Grenzwert zu bestimmen, kann man (40) benutzen und den

$$\lim_{z \rightarrow -n} \frac{(z+n)\psi(z)}{(z+n)[\psi'(z) - \psi(z)^2]}$$

suchen, oder man berechnet ihn mit Hilfe der Ergänzungssätze.

$$(33') \quad \psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot z\pi$$

gibt quadriert

$$\frac{\pi^2 \cos^2 z\pi}{\sin^2 z\pi} = \psi(z)^2 - 2\psi(z)\psi(1-z) + \psi(1-z)^2,$$

und

$$(33'') \quad \psi'(z) + \psi'(1-z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 z\pi}.$$

Addition und Zusammenfassen gibt

$$\begin{aligned} \psi'(z) - \psi(z)^2 &= \pi^2 - \psi'(1-z) + \psi(1-z)^2 - 2\psi(1-z)\psi(z) \\ \frac{1}{\varrho(z)} &= \frac{\pi^2 - \psi'(1-z) + \psi(1-z)^2}{\psi(z)} - 2\psi(1-z) = \frac{A}{B} - 2D. \end{aligned}$$

Für  $z=-n$  bleibt  $A$  endlich,  $B$  wird unendlich, aber

$$D = \psi(1+n) = -C + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = -C + \varrho_n,$$

also folgt

$$(58) \quad \varrho(-n) = \frac{1}{2(C - \varrho_n)} \quad \begin{cases} \varrho_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \\ \varrho_0 = 0. \end{cases}$$

Wegen  $\psi(1+n) \rightarrow \lg\left(n + \frac{1}{2}\right)$  ergibt sich der asymptotische Wert

$$(59) \quad \varrho(-n) \rightarrow -\frac{1}{2 \lg\left(n + \frac{1}{2}\right)}.$$

Aus (58) folgt, dass die rein imaginäre Linie des Poles  $z=0$  zurückgekrümmt ist, also in jedem Ast einen Wendepunkt aufweist. Für alle anderen Pole ist  $\varrho$  negativ.

Das Problem, die Krümmung der reellen Linien in den Nullstellen  $z_n$  der  $\psi$ -Funktion zu bestimmen, kann man verschieden auffassen. Die Stellen  $z_n$  sind weder Wurzeln der Funktion  $\Gamma(z)$  noch der Funktion  $\frac{1}{\Gamma(z)}$ . Man kann das Problem entweder zum ersten Krümmungsproblem rechnen, denn die reelle Linie geht durch die Stelle  $z_n$  zweimal hindurch, ihre beiden Zweige legen schon das Stromlinienbüschel der Funktion  $f(z_n + \zeta) - f(z_n)$  fest. Oder man kann das Problem zum zweiten Krümmungsproblem rechnen, also Stromlinie (reelle Linie) und Höhenlinie durch  $z_n$  als Bausteine des Stromlinienbüschels der Funktion  $\lg f(z_n + \zeta) - \lg f(z_n)$  auffassen.

Die beiden Einbettungsbüschel sind identisch, weil die Stromlinie (reelle Linie des Logarithmus) hier mit der reellen Linie (reelle Linie der Funktion) zusammenfällt, und durch sie das Büschel schon bestimmt ist. — In beiden Fällen aber verschwindet  $f'(z)$ . Der allgemeine Fall  $f' = f'' = \dots = f_{k-1}' = 0$ ;  $f_k' \neq 0$  wurde durch (11) auf den Spezialfall  $f' \neq 0$  zurückgeführt. Beachtet man den Zusammenhang zwischen (12) und (14), so ergibt sich für den allgemeinen Fall aus (10) entsprechend

$$(14^*) \quad \varrho(z) = \frac{A_1^*}{2 A_2^*} = \frac{k(k+1)}{2} \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(k+1)}(z)}.$$

In unserem Falle ist  $k=2$ , also kommt

$$(14') \quad \varrho(z) = \frac{3f''(z)}{f'''(z)}.$$

Unterstellt man unser spezielles Problem dem ersten Krümmungsproblem, so hat man zu setzen

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)},$$

also

$$f'' = -\frac{\psi}{\Gamma}, \quad f' = -\frac{\psi' - \psi^2}{\Gamma}, \quad f''' = -\frac{\psi'' - 3\psi\psi' + \psi^3}{\Gamma}.$$

Dann kommt aus (14')

$$\rho(z) = \frac{3(\psi' - \psi^2)}{\psi'' - 3\psi\psi' + \psi^3}$$

oder wegen  $\psi(z) = 0$

$$(60) \quad \rho(z) = \frac{3\psi'(z)}{\psi''(z)} \quad \text{für } z = z_n.$$

Unterstellt man das Problem dem zweiten Krümmungsproblem, so hat man zu setzen

$$f(z) = \lg \Gamma(z).$$

Dann kommt aus (14') wieder

$$(60) \quad \rho(z) = \frac{3\psi'(z)}{\psi''(z)} \quad \text{für } z = z_n.$$

Zur Berechnung von (60) muss man den vorhandenen Zahlenstoff heranziehen.  $\rho(z_n)$  ist direkt zu berechnen. Für die negativen  $z_n$  wird man die Rechnung mit Hilfe der Ergänzungssätze auf die rechte Seite der Achse verlegen. Dort gilt dann die Stirlingsche Formel, die uns erlaubt, über  $\rho(z_n)$  allgemeine Aussagen zu machen. Wir verlangen also für die folgenden Betrachtungen

$$n > 0.$$

Die Ergänzungssätze lauten:

$$(33') \quad \psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \cot z\pi$$

$$(33'') \quad \psi'(z) + \psi'(1-z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 z\pi} = \pi^2 (1 + \cot^2 z\pi)$$

$$(33''') \quad \psi''(z) - \psi''(1-z) = -2\pi^3 \frac{\cos z\pi}{\sin^3 z\pi} = -2\pi^3 \cot z\pi (1 + \cot^2 z\pi).$$

Für  $z = z_n$ ,  $\psi(z_n) = 0$  erhält man aus diesen Gleichungen durch Elimination von  $\cot z\pi$  die beiden Gleichungen

$$\psi'(z_n) = \pi^2 + \psi(1-z_n)^2 - \psi'(1-z_n)$$

$$\psi''(z_n) = -2\pi^2\psi(1-z_n) - 2\psi(1-z_n)^3 + \psi''(1-z_n)$$

und daraus

$$(61) \quad \varrho(z_n) = -\frac{3(\pi^2 + \psi(1-z_n)^2 - \psi'(1-z_n))}{2\pi^2\psi(1-z_n) + 2\psi(1-z_n)^3 - \psi''(1-z_n)}$$

Aus

$$(44^*) \quad -n < \overline{z_n} < -n + \frac{1}{2}$$

folgt

$$n + \frac{1}{2} < \overline{1-z_n} < n+1,$$

wobei die Pfeile die Richtung angeben, in der sich der mittlere Ausdruck mit wachsendem  $n$  bewegt. Dann liefert die Stirlingsche Formel 2. Art (41\*) für (61) die Grenzbeziehungen

$$(62) \quad \frac{3\left(\pi^2 + \lg^2\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}\right)}{2\pi^2 \lg\left(n + \frac{1}{2}\right) + 2\lg^3\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}} < \varrho(z_n) < \frac{3\left(\pi^2 + \lg^2 n - \frac{1}{n}\right)}{2\pi^2 \lg n + 2\lg^3 n + \frac{1}{n^2}}$$

Beide Grenzen sind asymptotisch gleich; die linke für grosse  $n$  die nähere, die rechte die bequemere und für kleine  $n$  genauere. Asymptotisch gleich mit diesen Ausdrücken ist endlich der mit (59) gut vergleichbare rohere Näherungsausdruck

$$(63) \quad \varrho(z_n) \rightarrow -\frac{3}{2\lg\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

Bereits für  $n=1$  fallen in (62) beide Zähler positiv aus, also ist stets

$$\varrho(z_n) < 0 \quad [n=1, 2, \dots].$$

Bei  $\varrho(z_0)$  musste die Rechnung entscheiden. Sie ergab, dass auch

$$\varrho(z_0) < 0.$$

#### § 4. Die Umgebung der reellen Achse.

Nachdem das Punktnetz und die Krümmungsradien in den Schnittpunkten mit der Achse festliegen, ist das Bild der Urbereiche zunächst als gesichert anzusehen. Uns interessiert aber auch die konforme Abbildung selbst, d. h. die Art und Weise, wie die  $\Gamma$ -Funktion das Bild aller Strahlen und Kreise abbildet. Aus dem Gesamtbild ergeben sich dann noch besondere Eigenschaften der speziellen Stromlinien, nämlich der reellen und imaginären Linien. Die Bilder des Nullpunktes der  $u-v$ -Ebene sind für  $\Gamma\left(\frac{1}{z}\right)$  die Stellen  $0, -1, -2, \dots$ , für  $\Gamma(z)$  sind diese Stellen die Bilder des  $\infty$  fernen Punktes als des 2. Büschelpunktes in der  $u-v$ -Ebene. Es wird nun zu untersuchen sein, wie sich die Zwischenstrahlen

$$\arg \Gamma(x + yi) = \frac{k\pi}{2} \quad (k \text{ beliebige reelle Zahl})$$

und Kreise

$$\lg |\Gamma(x + yi)| = \frac{k\pi}{2} \quad (k \text{ beliebige reelle Zahl}),$$

die durch unser Netz nicht erfasst werden, in der Umgebung des Ursprungs und der negativen Achse anordnen. (Im übrigen Gebiet sind die schon vorhandenen Kurven schon nahezu parallel, die Kurven für beliebiges  $k$  schieben sich einfach dazwischen.) Für die Bilder der Kreise verweise ich auf Lense. Ich habe die Kurven, da ich rechnerisch vorgegangen bin, noch genauer festgelegt, aber nichts prinzipiell Neues gefunden. Zum Verständnis verweise ich wieder auf die Tabelle der reellen Minimalwerte (S. 292). Es bleibt beim Anblick der Figur aber ein Wunsch nach weiteren Zwischenwerten oder besser nach den geometrischen Eigenschaften der Kurven unerfüllt. Diesem Wunsche soll im folgenden entsprochen werden.

Schwieriger als das Studium der Kreise ist nämlich das der Strahlen. Ihr Richtungssinn ist schon durch die allgemeine Betrachtung der S. 277 festgelegt. Jeder Strahl mündet unter demselben Winkel  $\frac{k\pi}{2}$  in den jeweiligen Pol ein, unter dem sein Bild in den Nullpunkt der  $u-v$ -Ebene mündet. Diese Tatsache ist ein Ausdruck der Konformität der Abbildung in jedem Punkte  $z$  und ist S. 284 bewiesen. Ein Punkt für Punkt genaues Bild der Stromlinien und Höhenlinien für die Umgebung der negativen reellen Achse aufzustellen, ist aus prak-

tisch-rechnerischen Gründen unmöglich. Die Maschenbreite müsste kleiner sein als  $\frac{1}{2}$ . Wir müssen uns darauf beschränken, die geometrischen Eigenschaften des Bildes festzustellen. Herr Böhmer erkannte, dass zur Lösung dieser reduzierten Aufgabe ein Richtungsfeld viel geeigneter sei als einzelne Punkte der Kurven selbst. Dieses Feld ist dann allerdings noch zu Kurven zusammenzuschliessen. Für die Höhenlinien bilden die Linien von den Nullstellen der  $\psi$ -Funktion aus genügend Anhalt zur zeichnerischen Orientierung, aber für die Stromlinien ist für jeden Punkt des Feldes, der eine Richtung trägt, noch das  $k$  festzustellen, das ihn einer Kurve  $\text{arc } \Gamma(x + yi) = \frac{k\pi}{2}$  zuweist.

Das analytische Äquivalent des Richtungsfeldes sind die Differentialgleichungen der Stromlinien und Höhenlinien.

Für eine analytische Funktion

$$f = u + vi$$

gelten die beiden Beziehungen

$$(64) \quad \begin{cases} \frac{df}{dz} = f' = u_x - u_y i \\ \phantom{\frac{df}{dz} = f'} = v_y + v_x i. \end{cases}$$

Die Kurven  $v = \text{const}$  haben die Differentialgleichung

$$\tan \vartheta_2 = y' = -\frac{v_x}{v_y}$$

$$\vartheta_2 = -\arctan \frac{v_x}{v_y}$$

oder nach (64)

$$\vartheta_2 = -\arctan \frac{\Im f'}{\Re f'}$$

Die Stromlinien der  $\Gamma$ -Funktion sind die Kurven

$$(65 \text{ a}) \quad \Im \lg \Gamma(z) = \text{konst.},$$

haben also die Differentialgleichung

$$(65 \text{ b}) \quad \vartheta_2 = -\arctan \frac{\Im \psi\left(\frac{1}{2} + x + yi\right)}{\Re \psi\left(\frac{1}{2} + x + yi\right)}.$$

Die Kurven  $u = \text{konst.}$  sind dazu orthogonal, haben also die Differentialgleichung

$$(66) \quad \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\Im \psi \left( \frac{1}{2} + x + yi \right)}{\Re \psi \left( \frac{1}{2} + x + yi \right)}.$$

(Das Argument  $x + \frac{1}{2} + yi$  wurde mit Rücksicht auf die Stirlingsche Formel so gewählt.)

(Es genügt, von jetzt an alle Betrachtungen für die Stromlinien allein durchzuführen.)

Da wir die Umgebung der negativen reellen Achse suchen, setzen wir in der allgemeingültigen Formel (65 b)  $-z$  statt  $z$  ein.

$$(65 \text{ c}) \quad \vartheta_2 \left( \frac{1}{2} - x - yi \right) = - \arctan \frac{\Im \psi \left( \frac{1}{2} - x - yi \right)}{\Re \psi \left( \frac{1}{2} - x - yi \right)}.$$

Der Ergänzungssatz

$$(33') \quad \psi \left( \frac{1}{2} - z \right) - \psi \left( \frac{1}{2} + z \right) = - \pi \tan z \pi$$

liefert

$$(65 \text{ c}) \quad \vartheta_2 \left( \frac{1}{2} - x - yi \right) = - \arctan \frac{\Im \psi \left( \frac{1}{2} + x + yi \right) - \frac{\pi \sin 2 \pi y}{\cos 2 \pi x + \cos 2 \pi y}}{\Re \psi \left( \frac{1}{2} + x + yi \right) - \frac{\pi \sin 2 \pi x}{\cos 2 \pi x + \cos 2 \pi y}}.$$

Für die Umgebung der positiven reellen Achse aber darf die Stirlingsche Formel angewendet werden. Wir verwenden sie mit einer Korrektur

$$(41^*) \quad \psi \left( \frac{1}{2} + z \right) = \lg z + \frac{1}{24 z^2},$$

trennen sie in Realteil und Imaginärteil und führen gleichzeitig Polarkoordinaten ein

$$\Re \psi \left( \frac{1}{2} + x + yi \right) = \lg r + \frac{\cos 2 \varphi}{24 r^2}$$

$$\Im \psi \left( \frac{1}{2} + x + yi \right) = \varphi - \frac{\sin 2 \varphi}{24 r^2}.$$

Dann lautet die Differentialgleichung der Stromlinien, wenn man

$$\mathcal{P}_3 = -\arctan Q$$

setzt,

$$(67) \quad Q = \frac{\varphi \cdot \frac{\sin 2\varphi}{24r^2} - \frac{\pi \operatorname{Cot} 2\pi y}{\cos 2\pi x + \operatorname{Cot} 2\pi y}}{\lg r + \frac{\cos 2\varphi}{24r^2} - \frac{\pi \sin 2\pi x}{\cos 2\pi x + \operatorname{Cot} 2\pi y}}$$

Wir setzen

$$(68) \quad \begin{cases} \frac{\operatorname{Cot} 2\pi y}{\cos 2\pi x + \operatorname{Cot} 2\pi y} = U(x, y) \\ \frac{\sin 2\pi x}{\cos 2\pi x + \operatorname{Cot} 2\pi y} = V(x, y). \end{cases}$$

$U$  und  $V$  sind bei festem  $y$  periodisch in  $x$ , bei festem  $x$  asymptotisch in  $y$ . Es genügt also, sie im Streifen

$$\begin{cases} 0 \leq \xi < 1 \\ 0 \leq y < \infty \end{cases} \quad (\xi \equiv x \pmod{1})$$

zu berechnen.  $\xi = \frac{1}{2}$  entspricht einem Pol von  $\Gamma(z)$ . Für  $y \neq 0$  können  $U$  und  $V$  wegen

$$-\cos 2\pi x \leq 1 < \operatorname{Cot} 2\pi y \quad [0 < |y|]$$

nicht unendlich werden.

Um auch die anderen Terme in (67) nach Intervallen zu ordnen, setzen wir

$$(69) \quad x = n + \frac{1}{2} + \left(\xi - \frac{1}{2}\right) \quad 0 \leq \left|\xi - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2} \quad \xi - \frac{1}{2} = \delta.$$

Dann gilt

$$(70) \quad \begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{y}{n + \frac{1}{2} + \delta} \\ &= \arctan \frac{y}{n + \frac{1}{2}} - \arctan \frac{y \cdot \delta}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \delta + y^2} \\ &\cong \arctan \frac{y}{n + \frac{1}{2}} - \arctan \frac{y \cdot \delta}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Der absolute Grösstwert des Arguments

$$\lambda = \frac{y \cdot \delta}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}$$

ist (bei festem  $n$ )

$$\left| \frac{\delta}{2n+1} \right| \leq \frac{1}{4n+2}$$

Für grössere  $n$  darf daher  $\arctan \lambda$  durch  $\lambda$  ersetzt werden. Das gibt

$$(71) \quad \varphi = \arctan \frac{y}{n + \frac{1}{2}} - \frac{y \cdot \delta}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}$$

Setzt man noch

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \arctan \frac{y}{n + \frac{1}{2}} = \varphi, \quad \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = R^2 \\ n + \frac{1}{2} = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi, \end{array} \right.$$

so ist

$$(71) \quad \varphi = \varphi - \frac{\sin \varphi \cdot \delta}{R}$$

Jetzt haben wir analog  $\lg r$  in den neuen Grössen auszudrücken

$$(72) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + (2n+1+\delta)\delta + y^2 \\ &= R^2 \left(1 + \frac{(2n+1+\delta)\delta}{R^2}\right) \\ \lg r &\cong \lg R + \frac{2\left(n + \frac{1}{2}\right)\delta}{R^2} = \lg r + \frac{\cos \varphi \cdot \delta}{R} \end{aligned}$$

In den Korrekturgliedern der Stirlingschen Formel in (67) aber darf ohne Bedenken  $\varphi$  durch  $\varphi$ ,  $r$  durch  $R$  ersetzt werden. Dann erhalten wir für grössere  $n$  die Schlussformel

$$(73) \quad Q = \frac{\Phi - \frac{\sin \Phi}{R} \left( \xi - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin 2 \Phi}{24 R^2} - \pi \frac{\operatorname{Si} 2 \pi y}{\cos 2 \pi \xi + \operatorname{Co} \int 2 \pi y}}{\lg R + \frac{\cos \Phi}{R} \left( \xi - \frac{1}{2} \right) + \frac{\cos 2 \Phi}{24 R^2} - \pi \frac{\sin 2 \pi \xi}{\cos 2 \pi \xi + \operatorname{Co} \int 2 \pi y}}$$

Für den Kurvenverlauf sind die Stellen, wo der Zähler oder Nenner verschwindet, besonders wichtig. Der Zähler verschwindet für  $y=0$  identisch, nicht aber sein Quotient durch  $y$ . Zu jedem  $n$  lässt sich im ersten Halbstreifen  $0 < \xi < \frac{1}{2}$  ein  $y_0$  so angeben, dass der Nenner für  $y_0 \leq y$  nicht verschwinden kann; dieses  $y_0$  nimmt mit wachsendem  $n$  unbeschränkt ab. Im zweiten Halbstreifen zählt  $V$  nach der anderen Seite, verschwindet der Nenner garnicht mehr. Bei Besprechung des numerisch gewonnenen Bildes wird auf diese allgemeine Bemerkung zurückzugreifen sein. Der Zähler kann für kleine  $y$  verschwinden; denn obwohl im allgemeinen  $\Im n < 1$ , so kann doch der Ausdruck  $U$  wegen des  $\cos$  im Nenner in der Umgebung von  $\xi = \frac{1}{2}$  beliebig hohe Werte annehmen. Das bedeutet dann, je nach dem Quadranten, horizontale oder vertikale Tangente. Eine allgemeine Diskussion der Formel ist wegen der Zusammenhangsverhältnisse der Urbereiche äusserst schwierig.

Um das Richtungsfeld graphisch zu integrieren, müssen wir den Wert  $k$  haben, der zu dem bestimmten Punkte  $\Im \lg I(x+yi) = \frac{k\pi}{2}$  gehört. Dann schliessen sich die Richtungen zu Kurven zusammen, und wegen der Konformität mündet die Kurve unter eben diesem Winkel  $\frac{k\pi}{2}$  in den Pol ein. Wir haben also unsere Formeln (52) auf jeden beliebigen Punkt in der Umgebung der negativen reellen Achse auszudehnen, nicht nur auf die Punkte  $x \equiv 0$  und  $x \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$ . Der Ergänzungssatz

$$(33) \quad \lg \Gamma(1-z) = \lg \pi - \lg \sin \pi z - \lg \Gamma(z)$$

liefert den Imaginärteil

$$(74) \quad \operatorname{arc} \Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = -\frac{y}{2} \lg(x^2 + y^2) - x \arctan \frac{y}{x} \\ - \frac{y}{24(x^2 + y^2)} + y - \arctan \left[ \cot \pi \left(x + \frac{1}{2}\right) \Im n \pi y \right],$$

wenn man gleichzeitig für  $\lg \Gamma(z)$  die Stirlingsche Formel mit einer Korrektur einsetzt.

Die Formel (74) geht für die Werte  $x \equiv 0$  und  $x \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$  in die Formeln (53\* und 54\*) über.

### § 5. Die Wendepunktskurven.

Es ist auch durch ein noch so dichtes Netz diskreter Kurven nicht möglich, die geometrischen Eigenschaften der Gesamtheit aller Stromlinien und Höhenlinien exakt zu erkennen. Wir suchen deshalb jetzt den Ort der Wendepunkte aller Stromlinien und ebenso die Wendepunktskurve der Höhenlinien. Für die rechte Halbebene ist eine analytische Darstellung dieser Kurven gelungen, für die linke werden wir uns mit ihren wichtigsten Eigenschaften begnügen müssen.

Der Krümmungsradius  $\rho$  einer Kurve  $f(x, y) = 0$  ist an der Stelle  $x, y$  gegeben durch

$$|\rho| = \frac{|f_x^2 + f_y^2|^{\frac{3}{2}}}{f_{yy}f_x^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{xx}f_y^2}$$

Die Kurve der Wendepunkte ist also

$$(75) \quad f_{yy}f_x^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{xx}f_y^2 = 0$$

und speziell für eine harmonische Funktion

$$(75^*) \quad f_{xx}(f_y^2 - f_x^2) - 2f_{xy}f_xf_y = 0.$$

Für die Stromlinienschar gilt

$$f^{(1)}(x, y) = \operatorname{arc} \Gamma(x + yi) - \frac{k\pi}{2} = 0$$

und für die Schar der Höhenlinien

$$f^{(2)}(x, y) = \Re \lg \Gamma(x + yi) - \frac{k\pi}{2} = 0.$$

Bedenkt man, dass

$$(76) \quad \operatorname{arc} \Gamma(x + yi) = \frac{1}{2i} \lg \frac{\Gamma(x + yi)}{\Gamma(x - yi)}$$

und dass

$$(77) \quad \Re \lg \Gamma(x + yi) = \frac{1}{2} [\lg \Gamma(x + yi) + \lg \Gamma(x - yi)],$$

ist, dann kommt

$$2f^{(1)}(x, y) = \frac{1}{i} [\lg \Gamma(x + yi) - \lg \Gamma(x - yi)] - k\pi = 0$$

und

$$2f^{(2)}(x, y) = \lg \Gamma(x + yi) + \lg \Gamma(x - yi) - k\pi = 0.$$

Also gilt

$$2f_x^{(1)} = \frac{1}{i} [\psi(x + yi) - \psi(x - yi)], \quad 2f_{xx}^{(1)} = \frac{1}{i} [\psi'(x + yi) - \psi'(x - yi)]$$

$$2f_y^{(1)} = [\psi(x + yi) + \psi(x - yi)], \quad 2f_{xy}^{(1)} = [\psi'(x + yi) + \psi'(x - yi)].$$

Die Ableitungen von  $f^{(2)}$  ergeben sich aus den Orthogonalitätseigenschaften. Dann heisst die Wendepunktsbedingung (75\*) für die Stromlinien

$$(78) \quad F^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2i} \begin{vmatrix} \psi'(x + yi) & \psi(x + yi)^2 \\ \psi'(x - yi) & \psi(x - yi)^2 \end{vmatrix} = 0$$

und für die Höhenlinien

$$(79) \quad F^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2} [\psi'(x + yi) \psi(x - yi)^2 + \psi'(x - yi) \psi(x + yi)^2] = 0.$$

Die weitere Diskussion dieser Gleichungen machte erhebliche Schwierigkeiten. Nach der Anlage der ganzen Arbeit musste es uns besonders auf die Wendepunktskurve der Stromlinien ankommen. Herr Böhmer hat deshalb die Formel (78) folgendermassen weiter behandelt. Wir führen zunächst folgende Bezeichnungen ein

$$z = x + yi$$

$$\bar{z} = x - yi,$$

also

$$z + \bar{z} = 2x$$

$$z - \bar{z} = 2yi.$$

Die Darstellung (78) enthält nun noch die ganze reelle Achse. Um die Schnittpunkte der Wendepunktskurve mit der reellen Achse zu finden, wird man deshalb (78) durch die reelle Achse, d. h. durch  $y$  dividieren und zur Grenze  $y=0$  übergehen müssen. Wir setzen deshalb die Strömungswendekurve in der Gestalt

$$(80) \quad \mathcal{O}(x, y) = \frac{1}{z - \bar{z}} \left| \begin{array}{cc} \frac{\psi'(z)}{\Gamma(z)^2} & \frac{\psi(z)^2}{\Gamma(z)^2} \\ \frac{\psi'(\bar{z})}{\Gamma(\bar{z})^2} & \frac{\psi(\bar{z})^2}{\Gamma(\bar{z})^2} \end{array} \right| = 0$$

an, die gleichzeitig die Pole herausbringt.

Da

$$(81) \quad \frac{\psi'(z)}{\Gamma(z)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\psi(z)}{\Gamma(z)}$$

ganze transzendente Funktionen sind, und für  $y=0$  die Determinante den Wert Null annimmt, ist  $\mathcal{O}(x, y)$  im Endlichen überall endlich. Um die Schnittpunkte mit der reellen Achse, also  $\mathcal{O}(x, 0)$  zu berechnen, müssen wir (80) so schreiben, dass sich der Grenzübergang zu verschwindendem  $y$  ausführen lässt. Wir schreiben

$$(80) \quad \mathcal{O}(x, y) = \frac{\psi'(x+yi) - \psi'(x-yi)}{2yi} \cdot \frac{\psi(x-yi)^2}{\Gamma(x+yi)^2 \Gamma(x-yi)^2} \\ - \frac{\psi(x+yi) - \psi(x-yi)}{2yi} \frac{[\psi(x+yi) + \psi(x-yi)] \psi'(x-yi)}{\Gamma(x+yi)^2 \Gamma(x-yi)^2}.$$

Jetzt lässt sich der Grenzübergang ausführen

$$(82) \quad \mathcal{O}(x, 0) = \frac{\psi''(x) \psi(x)^2}{\Gamma(x)^4} - \frac{2 \psi'(x)^2 \psi(x)}{\Gamma(x)^4} \\ = \frac{\psi(x)}{\Gamma(x)} \cdot \frac{\psi(x) \psi''(x) - 2 \psi'(x)^2}{\Gamma(x)^3}.$$

Die rechte Seite ist das Produkt zweier ganzer transzendenter Funktionen von  $x$ . Für den ersten Faktor ist das in (81) schon bemerkt worden; für den zweiten Faktor ergibt sich das aus folgender Betrachtung.

Von der ganzen transzendenten Funktion

$$(83) \quad f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}$$

ausgehend, erhält man durch Ableitung von  $\lg f(z) = -\lg \Gamma(z)$  nach  $z$  die Gleichungen

$$\frac{f'}{f} = -\psi, \quad \frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{f^2} = -\psi', \quad \frac{f'''}{f} - \frac{3f''f'}{f^2} + \frac{2f'^3}{f^3} = -\psi''.$$

Dann wird

$$\psi \psi'' - 2 \psi'^2 = \frac{f''' f' f - 2 f''^2 f + f'' f'^2}{f^3}$$

Dividiert man beiderseits durch  $\Gamma^3$ , so kommt wegen (83)

$$(84) \quad \frac{\psi(z) \psi''(z) - 2 \psi'(z)^2}{\Gamma(z)^3} = f'''(z) f'(z) f(z) - 2 f''(z)^2 f(z) + f''(z) f'(z)^2.$$

Da die rechte Seite jetzt eine ganze transzendente Funktion von  $z$  darstellt, tut es auch die linke Seite.

Schreiben wir  $\Phi(x, 0)$  in der Gestalt

$$(82) \quad \Phi(x, 0) = A(x) B(x)$$

mit

$$(82^* \text{ a}) \quad A(x) = \frac{\psi(x)}{\Gamma(x)} \qquad (82^* \text{ b}) \quad B(x) = \frac{\psi(x) \psi''(x) - 2 \psi'(x)^2}{\Gamma(x)^3},$$

so sind damit die Schnittpunkte der Wendepunktskurve  $\Phi(x, 0) = 0$  mit der reellen Achse in zwei Klassen zerlegt. Die Schnittpunkte erster Klasse sind die bekannten Extremargumente der  $\Gamma$ -Funktion oder die Nullstellen der  $\psi$ -Funktion. Dagegen müssen die Schnittpunkte 2. Klasse durch die Untersuchung von  $B(x)$  erst festgestellt werden.

Die Schnittpunkte 2. Klasse sind die reellen Wendepunkte der Funktion  $\frac{1}{\psi(x)}$ . Daraus kann man schon einiges über ihre Lage aussagen.

Für  $x > z_0 = 1,46 \dots$  ist

$$(85) \quad \begin{aligned} \psi(x) & \text{ positiv; monoton zunehmend,} \\ \psi'(x) & \text{ positiv; monoton abnehmend,} \\ \psi''(x) & \text{ negativ; monoton abnehmend,} \end{aligned}$$

wie man sich folgendermassen überzeugen kann: Aus (40) folgt

$$\left. \begin{aligned} \psi\left(\frac{1}{2}\right) &= -C - 2 \lg 2 \\ \psi'\left(\frac{1}{2}\right) &= 3 \zeta_2 \\ \psi''\left(\frac{1}{2}\right) &= -2 \cdot 7 \cdot \zeta_3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \psi(1) &= -C \\ \psi'(1) &= \zeta_2 \\ \psi''(1) &= -2 \zeta_3 \end{aligned}$$

wobei  $\zeta$  die Riemannsche  $\zeta$ -Funktion ist.

Daraus kann man mit Hilfe der Grundwerte

$$C = 0,57721\ 56649$$

$$\zeta_2 = 1,64493\ 40668$$

$$\zeta_3 = 1,20205\ 69032$$

$$\lg 2 = 0,69314\ 71806$$

und der Funktionalgleichung (37) die kleine nach beiden Seiten beliebig fortsetzbare Tabelle herleiten

	$\psi(x)$	$\psi'(x)$	$\psi''(x)$
(86) $\frac{1}{2}$	-1,96351	4,93480	-16,8288
1	-0,57722	1,64493	-2,40411
$\frac{3}{2}$	0,036490	0,93480	-0,82880
2	0,42278	0,64493	-0,40411.

Da rechts von Null alle drei Funktionen stetig und monoton sind, ist die Tabelle dort ein Bild des Kurvenverlaufs und veranschaulicht unsere Aussagen (85). Aus (85) folgt, dass  $B(x)$  rechts von  $z_0$  keine Nullstelle haben kann.

Um uns über die Vorzeichen der drei Funktionen  $\psi$ ,  $\psi'$  und  $\psi''$  links von Null zu orientieren, ziehen wir die Ergänzungssätze (33'), (33''), (33''') heran.

$$(33') \quad \psi(1-z) = \psi(z) + \pi \cot z\pi$$

$$(33'') \quad \psi'(1-z) = -\psi'(z) + \frac{\pi^2}{\sin^2 z\pi}$$

$$(33''') \quad \psi''(1-z) = \psi''(z) + 2\pi^3 \frac{\cos z\pi}{\sin^3 z\pi}.$$

Wegen (85) ergibt sich aus den Ergänzungssätzen ein einmaliger Zeichenwechsel der Funktionen  $\psi$  und  $\psi''$  in jedem Einheitsintervall der linken Seite, während  $\psi'$  nur ein Schwanken zu verzeichnen hat. Dass es für  $\psi$  und  $\psi''$  zum Zeichenwechsel kommt, liegt daran, dass die cot-Funktion stärker wächst als der Logarithmus oder die Potenz mit endlichem Exponenten. Man sieht daraus, was ja auch bekannt ist, dass die  $\psi$ -Funktion in jedem linken Einheitsintervall einen reellen Wendepunkt besitzt. Genauer gesagt, ist  $\psi(-x)$  auf jeden Fall positiv

von  $-n$  bis  $-n - \frac{1}{2}$  (sogar noch darüber hinaus, die Nullstellen rücken nach links),  $\psi''(-x)$  auf jeden Fall negativ von  $-n - \frac{1}{2}$  bis  $-n-1$  (sogar schon eher). Die Nullstelle von  $\psi''(-x)$  wird mit wachsendem  $x$  immer mehr von rechts her an  $-n - \frac{1}{2}$  herangedrängt, ohne diesen Punkt je zu erreichen. Der Wendepunkt der  $\psi$ -Funktion liegt also zwischen  $-n$  und  $-n - \frac{1}{2}$  im rechten Halbintervall, wo  $\psi$  auf jeden Fall positiv ist.  $\frac{1}{\psi}$  kann in diesem rechten Halbintervall, wenn überhaupt, nur dort wenden, wo sowohl  $\psi$  als auch  $\psi''$  positiv ist, also rechts vom Wendepunkt der  $\psi$ -Funktion. In diesem Gebiet nimmt  $\psi\psi''$  nach links hin monoton ab,  $\psi'$  monoton zu. Wenn die beiden Ausdrücke  $\psi\psi''$  und  $2\psi'^2$  überhaupt gleich werden, ist im rechten Halbintervall mit Ausschluss seiner Grenzen ein Wendepunkt der Kurve  $\frac{1}{\psi}$  zu verzeichnen. Dass der Zeichenwechsel für  $B(x)$  stattfindet, wird (88) zeigen.

Links vom Wendepunkt der  $\psi$ -Funktion ist die Sachlage folgende:

$\psi$  ist monoton, kommt aus dem negativen Unendlichen, geht durch 0, wird positiv,

$\psi'$  ist monoton, kommt aus dem positiven Unendlichen, nimmt ab, bleibt positiv,

$\psi''$  ist monoton, kommt aus dem negativen Unendlichen, nimmt ab bis 0.

Also bleibt  $\psi\psi''$  dauernd unter  $2\psi'^2$ , und wir haben in diesem Gebiet keinen Wendepunkt der Funktion  $\frac{1}{\psi}$  mehr. Dass der Pol als Wendepunkt nicht in Frage kommt, zeigt (88 a).

Die Funktion  $\frac{1}{\psi}$  hat also für kleine negative  $x$  einen Wendepunkt links vom Pol  $-n$ . Er rückt mit wachsendem  $x$  gegen  $-n - \frac{1}{2}$ .

Jetzt fehlt noch eine Untersuchung des Gebietes zwischen 0 und  $x_0 = 1,46 \dots$ . Wir berechnen uns zu diesem Zwecke  $B(0)$ .

Es gilt nach (83)

$$f = \frac{1}{\Gamma}, \quad f' = -\frac{\psi}{\Gamma}, \quad f'' = -\frac{\psi' - \psi^2}{\Gamma}, \quad f''' = -\frac{\psi'' - 3\psi'\psi + \psi^3}{\Gamma}.$$

Wird in (84)  $z=0$  gewählt, so kommt

$$B(0) = f''(0)f'(0)^2.$$

Diese Größen sind zu bestimmen. Die Funktionalgleichung liefert

$$f'(z) = -\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{\psi(z+1) - \frac{1}{z}}{\Gamma(z+1):z} = \frac{1-z\psi(z+1)}{\Gamma(z+1)}$$

$$f'(0) = 1,$$

und genau so ist zu erhalten

$$f''(0) = +2C$$

und somit

$$B(0) = 2C.$$

Rechts von  $z_0$  ist  $B(x)$  dauernd negativ (86). Also liegt wenigstens eine Nullstelle von  $B(x)$  zwischen 0 und  $z_0$ , wegen der Monotonität der Funktionen  $\psi\psi''$  und  $\psi'^2$  kann es nur eine sein. Durch Berechnung von  $B(1)$  und  $B\left(\frac{1}{2}\right)$  nach (86) engt man die Grenzen auf das Intervall  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  ein. Wir nennen diese Nullstelle  $z_1^*$ , da sie mit der Nullstelle 1. Klasse  $z_1$  zusammengehört. (Vergl. S. 341.)

Zur Berechnung der weiteren Nullstellen  $z_k^*$  führen wir die Ergänzungssätze (33') bis (33'') in (82\* b) ein und erhalten

$$B(1-x) = \frac{1}{\Gamma(1-x)^3} \left\{ \psi''(x)\psi(x) - 2\psi'(x)^2 + \frac{\pi}{\sin \pi x} \cos \pi x \psi''(x) \right. \\ \left. + \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} 2(2\psi'(x) - \pi^2) + 2 \frac{\pi^3}{\sin^3 \pi x} \cos \pi x \psi(x) \right\}.$$

Nun ist

$$(33) \quad \frac{1}{\Gamma(1-x)} = \frac{\sin \pi x \Gamma(x)}{\pi}.$$

Daher kommt

$$(87) \quad B(1-x) = \left\{ \left( \frac{\sin \pi x}{\pi} \right)^3 (\psi\psi'' - 2\psi'^2) + \left( \frac{\sin \pi x}{\pi} \right)^2 \cos \pi x \psi'' \right. \\ \left. + \frac{\sin \pi x}{\pi} 2(2\psi' - \pi^2) + 2 \cos \pi x \psi \right\} \Gamma(x)^3.$$

Wählt man  $x \equiv 0 \pmod{1}$  also  $x=n$ ,  $\sin \pi x=0$ ,  $\cos \pi x=(-1)^n$ , so erhält man

$$(88 \text{ a}) \quad B(1-n)=2(-1)^n \psi(n) \Gamma(n)^3 \quad [0 \leq n];$$

für  $x \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$ , also  $x=n + \frac{1}{2}$ ,  $\sin \pi x=(-1)^n$ ,  $\cos \pi x=0$ , kommt

$$(88 \text{ b}) \quad B\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)^3}{\pi^3} \left[ \psi''\left(\frac{1}{2}+n\right) \psi\left(\frac{1}{2}+n\right) - 2\left(\psi'\left(\frac{1}{2}+n\right) - \pi^2\right)^2 \right] \quad [n \equiv 0 \pmod{1}].$$

Aus (88 a) sieht man sofort, dass  $B(0)$  und  $B(-1)$  positiv sind, dass dagegen  $B(-2)$  negativ ist und von da ab bei ganzzahligem  $n$  Vorzeichenwechsel stattfindet. Es liegen also Nullstellen 2. Klasse in allen Intervallen links von  $-1$ , dann liegt aber je eine im rechten Halbintervall (s. S. 317). Die Nullstellen 1. Klasse liegen nach (44\*) im linken Halbintervall. Die positive Nullstelle  $z_0$  steht für sich allein, von ihr geht ein ungerader Zug der Wendepunktskurve aus, wie wir noch sehen werden. Die anderen Nullstellen schliessen sich zu je zweien zusammen, beide rücken nach links, die erster Klasse gegen  $-n-1$ , die 2. Klasse gegen  $-n - \frac{1}{2}$ .

Nachdem die Schnittpunkte der Wendepunktskurve mit der Achse festliegen, bestimmen wir die Kurvenrichtung in den Schnittpunkten. Da es sich erweist, dass die Wendepunktskurve die Achse in den Nullstellen 1. und 2. Klasse senkrecht schneidet und auch die Krümmung sich als eindeutig ergibt, können wir schliessen, dass durch jeden Schnittpunkt nur ein Zug der Kurve hindurchgeht.

Da die Schnittpunkte von den Polen verschieden sind, können wir an Stelle von (80) die einfachere Gleichung

$$(89) \quad \Phi^*(x, y) = \frac{1}{2 y i} \begin{vmatrix} \psi'(z) & \psi(z)^2 \\ \psi'(\bar{z}) & \psi(\bar{z})^2 \end{vmatrix} = \frac{F^{(1)}(x, y)}{y}$$

benützen. Für  $F^{(1)}(x, y)$  gilt (78).

Wir schicken der eigentlichen Untersuchung eine Zusammenstellung der ersten und zweiten Ableitungen von  $F^{(1)}(x, y)=F$  voraus.

$$(90 a) \quad \begin{cases} F_x = \frac{1}{2i} [\psi'' \bar{\psi}^2 - \bar{\psi}'' \psi^2 - 2 \psi' \bar{\psi}' (\psi - \bar{\psi})] \\ F_y = \frac{1}{2} [\psi'' \bar{\psi}^2 + \bar{\psi}'' \psi^2 - 2 \psi' \bar{\psi}' (\psi + \bar{\psi})], \end{cases}$$

$$(90 b) \quad \begin{cases} F_{xx} = \frac{1}{2i} [\psi''' \bar{\psi}^2 + 4 \psi'' \bar{\psi}' \bar{\psi} - 2 \psi'^2 \bar{\psi}' - \bar{\psi}''' \psi^2 - 4 \bar{\psi}'' \psi' \psi + 2 \bar{\psi}'^2 \psi'] \\ F_{xy} = \frac{1}{2} [\psi''' \bar{\psi}^2 - 2 \psi'' \bar{\psi}' \psi - 2 \psi'^2 \bar{\psi}' - 2 \psi \psi'' \bar{\psi}' \\ \quad + \bar{\psi}''' \psi^2 - 2 \bar{\psi}'' \psi' \bar{\psi} - 2 \bar{\psi}'^2 \psi' + 2 \bar{\psi} \bar{\psi}' \psi'] \\ F_{yy} = \frac{i}{2} [\psi''' \bar{\psi}^2 - 4 \psi'' \bar{\psi}' \bar{\psi} - 2 \psi'^2 \bar{\psi}' - 2 \psi'' \bar{\psi}' \psi \\ \quad - \bar{\psi}''' \psi^2 + 4 \bar{\psi}'' \psi' \psi + 2 \bar{\psi}'^2 \psi' + 2 \bar{\psi}'' \psi' \bar{\psi}]. \end{cases}$$

Für  $y=0$  wird  $\psi=\bar{\psi}$ , daher ist

$$(91 a) \quad \begin{cases} F_x(x, 0) = 0 \\ F_y(x, 0) = \psi(\psi'' \psi - 2 \psi'^2) \end{cases}$$

$$(91 b) \quad \begin{cases} F_{xx}(x, 0) = 0 \\ F_{xy}(x, 0) = \psi''' \psi^2 - 2 \psi'' \psi' \psi - 2 \psi'^3 \\ F_{yy}(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Die Kurvenrichtung im Schnittpunkte ist durch die Gleichung

$$(92) \quad y' = - \frac{\frac{\partial \Phi^*}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi^*}{\partial y}} \quad [x=z_k, z_k^*, y=0]$$

bestimmt. Man findet  $\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{F}{y} \right) = \frac{F_x}{y}$ , was für  $y=0$  die unbestimmte Gestalt  $\frac{0}{0}$  annimmt.

Nun ist

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = F_{xy}; \quad \frac{\partial y}{\partial y} = 1,$$

also nach (91 b)

$$(93 a) \quad \frac{\partial \Phi^*(x, 0)}{\partial x} = F_{xy}(x, 0) = \psi''' \psi^2 - 2 \psi'' \psi' \psi - 2 \psi'^3.$$

Diese Grösse ist in den Schnittpunkten von Null verschieden. Für  $z_k$  ist das klar, weil wegen  $\psi=0$  auch  $\psi'$  verschwinden müsste.  $\psi'$  besitzt aber keine reellen Nullstellen.

Für  $z_k^*$  schreiben wir (93 a) in der Form

$$(94) \quad F'_{xy}(z_k^*, 0) = \psi(\psi\psi'' - 2\psi'^2) + \psi'(\psi\psi'' - 2\psi'^2) = \psi(\psi\psi'' - 2\psi'^2)' \quad \text{für } z = z_k^*.$$

Für  $z_k^*$  ist aber  $\psi \neq 0$  und  $(\psi\psi'' - 2\psi'^2)' \neq 0$ , da  $B(x)$  in seinen Nullstellen nicht kulminiert.

Weiter ist  $\frac{\partial \Phi^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{F}{y} \right) = \frac{yF'_y - F}{y^2}$ , was wieder für  $y=0$  die unbestimmte

Gestalt  $\frac{0}{0}$  annimmt.

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial y} (yF'_y - F) = yF''_{yy}, \quad \frac{\partial}{\partial y} y^2 = 2y,$$

also nach (91 b)

$$(93 \text{ b}) \quad \frac{\partial \Phi^*(x, 0)}{\partial y} = \frac{1}{2} F''_{yy}(x, 0) = 0.$$

Aus (93 a, b) folgt

$$(92^*) \quad \frac{1}{y'} = 0 \quad \text{für } y = 0.$$

Die Wendekurve der Stromlinien schneidet also die reelle Achse senkrecht in einem einzigen Zuge.

Jetzt handelt es sich noch um die Krümmung der Wendepunktskurve in ihren Schnittpunkten mit der Achse  $z_k$  und  $z_k^*$ . Nach (21) gilt für den Krümmungsmittelpunkt einer Kurve  $y=y(x)$  an der Stelle  $x, y$

$$\xi = -\frac{(1+y'^2)y'}{y''}, \quad \eta = \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Wir schreiben diese Formeln für eine Kurve der Gestalt  $f(x, y)=0$  um und erhalten

$$\xi = -\frac{f_x(f_x^2 + f_y^2)}{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}, \quad \eta = \frac{f_y(f_x^2 + f_y^2)}{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}.$$

In unserem Fall ist aus Symmetriegründen  $\eta=0$ , wir brauchen also, wenn wir wieder (89) zugrunde legen, den Ausdruck

$$(95) \quad \xi = - \frac{\Phi_x^* (\Phi_x^{*2} + \Phi_y^{*2})}{\Phi_{xx}^* \Phi_y^{*2} - 2 \Phi_{xy}^* \Phi_x^* \Phi_y^* + \Phi_{yy}^* \Phi_x^{*2}}.$$

Nach (93 b) folgt

$$\xi = - \frac{\Phi_x^{*3}}{\Phi_{yy}^* \Phi_x^{*2}} = - \frac{\Phi_x^*}{\Phi_{yy}^*}$$

$$\Phi_{yy}^* = \frac{\partial}{\partial y} \Phi_y^* = \frac{\partial}{\partial y} \frac{y F_y - F}{y^2} = \frac{y^2 F_{yy} - 2 y F_y + 2 F}{y^3},$$

was wieder für  $y=0$  die unbestimmte Gestalt  $\frac{0}{0}$  annimmt.

$$\frac{\partial}{\partial y} (y^2 F_{yy} - 2 y F_y + 2 F) = y^2 F_{yyy}, \quad \frac{\partial}{\partial y} y^3 = 3 y^2.$$

Daraus folgt

$$\Phi_{yy}^* = \frac{F_{yyy}}{3}.$$

Durch nochmaliges Differenzieren der letzten Formel (90 b) und Übergang zu  $y=0$  ergibt sich

$$F_{yyy} = 8 \psi \psi' \psi''' - 6 \psi \psi''^2 - \psi^2 \psi''''.$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung von (93 a)

$$(96) \quad \xi = \frac{3(\psi'''' \psi^2 - 2 \psi'' \psi' \psi - 2 \psi'^3)}{\psi(\psi'''' \psi - 8 \psi'''' \psi' + 6 \psi''^2)}.$$

Die Krümmung ist also in allen Schnittpunkten eindeutig, sie ist in den Nullstellen 1. Klasse gleich 0, in den Schnittpunkten 2. Klasse von 0 verschieden.

Für die Schnittpunkte 2. Klasse lässt sich nach (94) schreiben

$$(96^*) \quad \xi = \frac{3(\psi \psi'''' - 3 \psi' \psi'')}{\psi'''' \psi - 8 \psi'''' \psi' + 6 \psi''^2}.$$

Die Rechnung ergab für  $z_1^*$  ein negatives  $\xi$ , für  $z_2^*$  ein positives  $\xi$ . Demnach ist das 4. Oval zurückgekrümmt, wenn auch nur wenig. Anscheinend wird der Nenner in (96) immer kleiner, so dass sich die Einbuchtung im Oval weiter links wieder verlieren dürfte. Doch kann ich das nicht genau sagen. Über die Schwierigkeiten der Rechnung, die zur Kontrolle nach (96) und (96\*) ausgeführt wurde, wird noch im nächsten Abschnitt zu reden sein.

Auf unserer Wendepunktskurve liegen nach (80) die komplexen Nullstellen der  $\psi'$ -Funktion. Herr H. Silbermann hat mir die ersten mitgeteilt. Sie lauten in erster Näherung

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -0,4119 \pm 0,5979 i & z_{5,6} &= -2,445 \pm 0,754 i \\ z_{3,4} &= -1,4434 \pm 0,7003 i & z_{7,8} &= -3,448 \pm 0,783 i. \end{aligned}$$

Ihr Imaginärteil wächst logarithmisch, so dass auch unsere Ovale von der asymptotischen Breite  $\frac{1}{2}$  nach oben und unten unbegrenzt wachsen. Die Nullstellen der  $\psi'$ -Funktion liegen auf keiner ausgezeichneten Stelle des Ovals. Wir wollen die Tangentenrichtung in diesen Punkten bestimmen. Die Kurvenrichtung ist in jedem Punkte, der nicht auf der Achse liegt, bestimmt durch

$$(97) \quad \operatorname{tg} \vartheta = y' = -\frac{F_z^{(1)}}{F_y^{(1)}} = -\frac{1}{i} \frac{\psi'' \bar{\psi}^2 - \bar{\psi}'' \psi^2 - 2 \psi' \bar{\psi}' (\psi - \bar{\psi})}{\psi'' \bar{\psi}^2 + \bar{\psi}'' \psi^2 - 2 \psi' \bar{\psi}' (\psi + \bar{\psi})}.$$

In den Punkten  $\psi' = 0$  fällt jeweils das dritte Glied weg. Setzen wir noch vorübergehend

$$\begin{aligned} \psi &= A + Bi & \frac{B}{A} &= \tan \operatorname{arc} \psi \\ \psi'' &= a + bi & \frac{a}{b} &= \tan \operatorname{arc} \psi'', \end{aligned}$$

so kommt

$$y' = \frac{\frac{2AB}{A^2 - B^2} - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a} \frac{2AB}{A^2 - B^2}}$$

oder

$$(98) \quad \vartheta = \arctan y' = 2 \operatorname{arc} \psi - \operatorname{arc} \psi''.$$

Eine analytische Darstellung der Ovale ist wegen ihrer Lage in der Umgebung der negativen reellen Achse nicht gelungen. Die Böhmersche Methode des Krümmungsvektors ermöglicht aber, festzustellen, zwischen welchen Punkten das Oval durchgeht.

Wir sprechen von Stromlinien und Höhenlinien. Also liegt das 2. Krümmungsproblem vor. S. 282 wurde gesagt, dass unter allen Stromlinien durch  $z$  (— das ist also für den Fall des zweiten Krümmungsproblems das Bündel der Stromlinien der Funktion  $\lg f(z + \zeta) - \lg f(z)$ , in das die Stromlinie und die Höhen-

linie der Funktion  $f(z)$  selbst eingebettet sind —) diejenige im Punkte  $z$  einen unendlichen Krümmungsradius hat, die dort zur Bonnetschen Geraden senkrecht verläuft, deren Tangente also dem invarianten Krümmungsvektor

$$\varrho(z) = \frac{\frac{d \lg f(z)}{dz}}{\frac{d^2 \lg f(z)}{dz^2}}$$

parallel ist. Es ist nun nicht anzunehmen, dass dieser Fall für einen unserer Punkte vorliegt. Man kann aber z. B. für die Punkte einer Parallelen zur  $y$ -Achse sowohl die Tangentenrichtung der Stromlinie als auch die Richtung der Funktion  $\varrho(z)$  aufstellen. Aus dieser doppelten Reihe kann man sehen, zwischen welchen Punkten die Stelle zu suchen ist, wo Tangentenrichtung und Richtung von  $\varrho(z)$  übereinstimmen. Die Methode ist besonders wertvoll für den Fall, dass man keine analytische Darstellung der Stromlinien hat, denn hier bildet sie die einzige Möglichkeit, Aufschluss über die geometrischen Verhältnisse zu erlangen. Sie ist aber auch für den Fall, dass eine analytische Darstellung vorhanden ist, wertvoll; denn eine Näherung für die Krümmung selbst stellt diese natürlich besser dar als eine zweimal differenzierte Näherung der Funktion. Das ist der schönste Beweis für die Tragfähigkeit dieser Methode, dass sie es ermöglicht hat, über die Ovale, die jeder analytischen Behandlung Widerstand leisteten, doch noch etwas auszusagen.

Für den ungeraden Zug aus  $z_0$  aber ist eine sehr einfache analytische Darstellung möglich. Wir setzen in (78) als erste Näherung ein

$$\psi(z) = \lg \left( z - \frac{1}{2} \right), \quad \psi'(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{2}}$$

und erhalten

$$F^{(1)}(x, y) = \left( x - \frac{1}{2} \right) \lg \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 \right] \arctan \frac{y}{x - \frac{1}{2}} + y \left\{ \frac{1}{4} \lg^2 \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 \right] - \arctan^2 \frac{y}{x - \frac{1}{2}} \right\}.$$

Setzt man

$$\xi = x - \frac{1}{2}$$

und führt Polarkoordinaten

$$\varphi = \arctan \frac{y}{\xi} \quad r^2 = \xi^2 + y^2$$

ein, so kommt

$$\lg r = \frac{\varphi(\pm 1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Die Formel

$$(99) \quad \lg r = \frac{\varphi(1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi} \text{ mit dem Ursprung } \frac{1}{2}$$

stellt den ungeraden Zug der Wendepunktskurve, der von  $z_0$  ausgeht, sehr gut dar.

Wir fassen zusammen: Die Wendekurve der Stromlinien besteht aus einem ungeraden Zuge und unendlich vielen Ovalen. Der ungerade Zug geht schlicht durch  $z_0$ , die Ovale schneiden die reelle Achse je in einem Schnittpunkt 1. und 2. Klasse. Fasst man dieses Ergebnis mit § 3 und § 4 dieses Abschnitts zusammen, so ist damit das Wesen der Abbildung der Stromlinien längs der Achse völlig geklärt.

Durch  $O$  geht ein Kreissystem, dessen zweiter fester Punkt in  $z \rho(0)$  der reellen Achse, also *rechts* liegt. Jeder Strahl erleidet beim Passieren der Wendekurve einen Wendepunkt unter Änderung des Krümmungssinnes.

Durch  $-n$  geht ein Kreissystem, dessen zweiter fester Punkt in  $z \rho(-n)$  der reellen Achse, also *links*, liegt. Jeder Strahl erleidet beim Passieren des Ovals einen Wendepunkt unter Änderung des Krümmungssinnes.

Nun sind noch einige Bemerkungen über die Wendekurve der Höhenlinien zu machen. Geht man in (79) zur Grenze  $y=0$  über, so kommt

$$(100) \quad \psi'(x) \psi(x)^2 = 0;$$

da  $\psi'(x) \neq 0$ , folgt:

Die Wendekurve der Höhenlinien geht in einem doppelten Zuge durch die Nullstellen der  $\psi$ -Funktion. Zur Bestimmung der Richtung der Kurve in den Schnittpunkten mit der Achse erweist sich die Gleichung  $F_x^{(2)} + F_y^{(2)} y' = 0$  als unzureichend, da sowohl  $F_x^{(2)}$  als auch  $F_y^{(2)}$  in den Nullstellen der  $\psi$ -Funktion verschwinden. Nochmalige Ableitung dieser Gleichung nach  $x$  liefert

$$F_{xx}^{(2)} + 2F_{xy}^{(2)} y' + F_{yy}^{(2)} y'^2 + F_y^{(3)} y'' = 0,$$

eine Gleichung, die sich für den vorliegenden Fall wegen

$$F_x^{(2)}(x_k, 0) = 0 \quad F_y^{(2)}(x_k, 0) \quad z_k = x_k$$

vereinfacht zu der quadratischen Bestimmungsgleichung für  $y'$

$$(101) \quad F_{xx}^{(2)}(x_k, 0) + 2F_{xy}^{(2)}(x_k, 0)y' + F_{yy}^{(2)}(x_k, 0)y'^2 = 0.$$

Die Berechnung ergibt  $F_{xx}^{(2)}(x, 0) = 2\psi'^3$ ;  $F_{xy}^{(2)}(x, 0) = 0$ ;  $F_{yy}^{(2)}(x, 0) = -2\psi'^3$  und damit

$$(102) \quad y' = \pm 1.$$

Die Wendekurve der Höhenlinien besteht also aus zwei getrennten symmetrischen Zügen, die sich in den Nullstellen der  $\psi$ -Funktion unter rechtem Winkel schneiden. Sie treffen die zu den Stromlinien gehörigen Ovale ausser in den Punkten  $z_k$  noch in den Nullstellen der  $\psi'$ -Funktion. Von  $z_0$  aus erstrecken sich die Züge ins Unendliche, ohne die Achse wieder zu treffen. Für diesen Teil findet man die Polardarstellung mit dem Ursprung  $\frac{1}{2}$

$$(103) \quad \lg r = \varphi \left( \tan \varphi \pm \frac{1}{\cos \varphi} \right).$$

(103) lässt sich mit Hilfe der Orthogonalitätsbeziehung sehr leicht aus (99) herleiten.

#### IV. Praktische Ausführung, Beschreibung zu III.

In diesem Abschnitt sollen nach der Anordnung des Abschnitts III die Rechnungen beschrieben werden, die nach den Formeln des Abschnitts III ausgeführt wurden. Die Ergebnisse werden dann in einem V. Abschnitte zusammengestellt. Hilfsmittel für die Rechnungen bildeten eine Rechenmaschine, eine siebenstellige Logarithmentafel, Hayashi's Tafelwerk (Keiichi Hayashi, sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen und deren Produkte sowie der Gammafunktion) und die Gaussische Tafel der  $I$ -Funktion und  $\psi$ -Funktion (Gauss, gesammelte Werke, Bd. III, S. 161 f.).

Nr. 1. Es handelt sich zuerst um die Nullstellen der  $\psi$ -Funktion. Da die Stromlinien und Höhenlinien in einem Quadrat mit der Seite 20 berechnet werden sollten, mussten die Nullstellen bis  $z_{10}$  festgelegt werden. Sie wurden, da sie alle noch im dritten Viertelintervall lagen, nach (47) berechnet. Der Gang der Rechnung wurde dort schon angedeutet. Gearbeitet wurde mit der Newtonschen Näherungsmethode.

Nr. 2. Als nächstes folgte die punktweise Berechnung der Stromlinien nach den Formeln (52) und (52\*). Die Wurzel der jeweiligen Gleichung wurde zuerst mit regula falsi in enge Grenzen eingeschlossen, dann mit der Newtonschen Methode weiter angenähert. Weil die Rechnungen so ausgedehnt waren — musste doch für jeden Punkt unseres Bildes aufs neue eine Gleichung aufgelöst werden — soll hier einmal ein Beispiel in aller Ausführlichkeit mitgeteilt werden, damit der Leser auch einen Beweis für die Zuverlässigkeit der Rechnungen bekommt. Wir wählen eines, das möglichst einfach in der Formel ist. Gerechnet wurde immer auf sieben Stellen, die letzte ist in der Tabelle als ungenau weggelassen. Da die Hayashischen Zahlen 7- und mehrstellig sind, ist es auch bei manchmal recht grossem Argumentintervall in der Tafel (s. die höheren Argumente von 5 aufwärts) doch noch möglich, jeden beliebigen Zwischenwert mit der Taylorschen Reihe zu ermitteln. Die Taylorsche Reihe ist in Fällen, wo es nur auf eine bestimmte und zwar krumme Argumentstelle ankommt, das beste Interpolationsmittel, wenn man auch manchmal bis zu 6 Gliedern mitnehmen muss, wie es bei Ermittlung der hyperbolischen Funktionen für grosse Argumentstellen (s. Höhenlinien) nötig war. Zur Berechnung des arctan genügte fast immer ein Glied der Reihe:

$$\arctan(\alpha \pm \delta) = \arctan \alpha \pm \frac{\delta}{1 + \alpha^2}.$$

Das Rechnungsbeispiel sieht dann folgendermassen aus:

Für  $x=0$  und  $k=0$  gilt

$$f = \arccos \Gamma(yi) = \frac{y}{2} \lg \left( y^2 - \frac{1}{6} \right) - y - \frac{\pi}{4} = 0;$$

denn für gegen 0 abnehmendes  $x$  ist  $\arctan \frac{y}{x} = + \frac{\pi}{2}$

$$y \left[ \frac{1}{2} \lg \left( y^2 - \frac{1}{6} \right) - 1 \right] = \frac{\pi}{4}$$

$$y \left[ \log \left( y^2 - \frac{1}{6} \right) - 0,868\ 5890 \right] = 0,682\ 1881.$$

1. Versuch:  $y = 3$

$$3 \left[ \log 8,833\ 333 - 0,868\ 5890 \right] \\ = 0,232\ 6068.$$

2. Versuch:  $y = 4$

$$4 \left[ \log 15,833\ \dots - 0,868\ 5890 \right] \\ = 1,323\ 9332.$$

3. Versuch:  $y = 3,5$

$$\frac{7}{2} [\log 12,0833 \dots - 0,868\ 5890]$$

$$0,747\ 5923$$

$$f = 0,747\ 5923 - 0,682\ 1881 = 0,065\ 4042.$$

4. Versuch:  $y = 3,4$

$$3,4 [\log 11,3933 \dots - 0,868\ 5890]$$

$$f = 0,639\ 4101 - 0,682\ 1881 = -0,042\ 7780.$$

Regula falsi zwischen  $3,4$  und  $3,5$  gibt

$$\frac{0,1 \cdot 0,042\ 7780}{0,042\ 7780 + 0,065\ 4042} = 0,04.$$

5. Versuch:  $y = 3,44$

$$f = 0,682\ 3849 - 0,682\ 1881 = 0,000\ 1968$$

$3,44$  ist also noch zu hoch. Von jetzt ab wendet man die Newtonsche Methode mit Vorteil an.  $y_0$  sei die Näherung. Dann soll gelten

$$f(y_0 + \delta) = 0$$

$$f(y_0) + \delta f'(y_0) + \dots = 0$$

$$\delta = -\frac{f(y_0)}{f'(y_0)}.$$

Wir berechnen also den Differentialquotienten unserer Funktion an der Stelle  $3,44$

$$f' = \log \left( 3,44^2 - \frac{1}{6} \right) - 0,868\ 589 + \frac{0,868\ 589 \cdot 3,44^2}{3,44^2 - \frac{1}{6}} = 1,0794.$$

6. Versuch:  $y = 3,4398$

$$f = 0,682\ 1691 - 0,682\ 1881 = -0,000\ 0190.$$

Jetzt kann man unbeschadet den Divisor  $1,0794$  noch ein paar Mal anwenden und erhält

$$y = 3,439\ 818.$$

Zuletzt berichtigt man den Divisor nochmals zu  $1,0793$  und bestätigt den Schlusswert

$$y = 3,439\ 818.$$

Für weiter vom Ursprung entfernte Punkte wurden die Formeln immer verwickelter, da man aber dann die Gesetzmässigkeiten übersah, konnte man schon mit einer guten Näherung in die Formel eingehen.

Die Reihe (42) für die  $\mu$ -Funktion ist pseudokonvergent, sie liefert den Funktionswert nur mit einer bestimmten, nicht beliebigen Genauigkeit. Die Genauigkeit ist umso grösser, je weiter das Argument vom Ursprung entfernt ist, denn die Reihe ist asymptotisch. Es ist nicht anzunehmen, dass in der Umgebung des Ursprungs unsere Zahlen in allen 7 Stellen wirklich das Argument der Stromlinie darstellen. Wir müssen sie verbessern. Um einen Einblick in die Grössenordnung der zu erwartenden Abweichung zu erhalten, wurden auf den Geraden  $x=0$ ,  $x=\frac{1}{2}$ , auf denen im allgemeinen nicht mit der Korrektur im Logarithmus sondern mit dem ersten Glied der  $\mu$ -Funktion selbst gearbeitet wurde, die ersten Werte nach beiden Stirlingschen Formeln und ausserdem noch nach einer der Formeln (52) oder (52\*) berechnet (s. Beispiel). So ergab sich z. B. für  $x=\frac{1}{2}$ ,  $k=0$

mit dem 1. Glied der  $\mu$ -Funktion nach (50\*) 2,702 822

nach (50) 2,702 57

mit logarithmischer Korrektur nach (52\*) 2,702 78.

Derselbe Wert wurde durch Mitnahme des 2. Gliedes der  $\mu$ -Funktion verbessert zu

2,702 692.

Die Werte auf den Geraden  $x=0$ ,  $x=\frac{1}{2}$  sind fast alle durch Mitnahme mehrerer Glieder der  $\mu$ -Funktion verbessert worden und zwar nach der Formel (104), die sich folgendermassen ergibt. Unter  $y$  verstehen wir unseren Näherungswert, unter  $y+\delta$  den wahren Wert. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \Gamma(x+(y+\delta)i) &= \frac{y+\delta}{2} \lg(x^2+y^2+2y\delta+\delta^2) \\ &+ \left(x - \frac{1}{2}\right) \arctan \frac{y+\delta}{x} - y - \delta - \frac{1}{12(y+\delta)} - R(y+\delta) = \frac{k\pi}{2}, \end{aligned}$$

wobei

$$R(z) = \frac{1}{360 z^3} - \frac{1}{1260 z^5} + \dots$$

Auf den Geraden  $x = 0$ ,  $\left[ x = \frac{1}{2} \right]$  haben wir gesetzt

$$\frac{y}{2} \lg(x^2 + y^2) + \left( x - \frac{1}{2} \right) \arctan \frac{y}{x} - y - \frac{1}{12 y} = \frac{k\pi}{2}.$$

Subtraktion ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{y+\delta}{2} \lg(x^2 + y^2) + \frac{y+\delta}{2} \lg \left( 1 + \frac{(2y+\delta)\delta}{x^2 + y^2} \right) + \left( x - \frac{1}{2} \right) \arctan \frac{y+\delta}{x} - \delta - \frac{1}{12(y+\delta)} \\ - \frac{y}{2} \lg(x^2 + y^2) - \left( x - \frac{1}{2} \right) \arctan \frac{y}{x} + \frac{1}{12 y} = R(y+\delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} \lg(x^2 + y^2) + \frac{y+\delta}{2} \lg \left( 1 + \frac{(2y+\delta)\delta}{x^2 + y^2} \right) \\ + \left( x - \frac{1}{2} \right) \arctan \frac{x\delta}{x^2 + y^2 + y\delta} + \frac{\delta}{12 y(y+\delta)} - \delta = R(y+\delta). \end{aligned}$$

Diese exakte Gleichung zur Bestimmung von  $\delta$  wird durch Näherung gelöst

$$\frac{\delta}{2} \lg(x^2 + y^2) + \delta \frac{y^2}{x^2 + y^2} + \left( x - \frac{1}{2} \right) \frac{x\delta}{x^2 + y^2} - \delta - \frac{\delta}{12 y^2} = R(y) + \delta R'(y)$$

$$(104) \quad \left[ \frac{1}{2} \lg(x^2 + y^2) - \frac{x}{2(x^2 + y^2)} - \frac{1}{12 y^2} - R'(y) \right] \delta = R(y).$$

Für die anderen Geraden, auf denen nicht mit dem ersten Glied der  $\mu$ -Funktion direkt, sondern nach (52) oder (52\*) gearbeitet wurde, muss man einen anderen Weg zur Verbesserung einschlagen.

In erster Näherung gilt

$$\lg \Gamma(x + yi + \delta i) = \lg \Gamma(x + yi) + \delta i \psi(x + yi) + \dots$$

Setzt man

$$\lg \Gamma(x + yi) = A + Bi, \quad B = \text{arc } \Gamma(x + yi)$$

$$\psi(x + yi) = C + Di, \quad C = \Re \psi(x + yi),$$

so kommt

$$\lg \Gamma(x + yi + \delta i) = A + Bi + (C + Di)\delta i = A - \delta D + (B + \delta C)i.$$

Wir verlangen

$$B + \delta C = \frac{k\pi}{2}$$

$$(105) \quad \delta = \frac{\frac{k\pi}{2} - \operatorname{arc} \Gamma(x + yi)}{\Re \psi(x + yi)}$$

$\operatorname{arc} \Gamma(x + yi)$  und  $\Re \psi(x + yi)$  wird man nun zunächst mit der Stirlingschen Formel berechnen. Formel (105) wurde auf die nach (104) verbesserten Zahlen angewendet und damit die Gleichwertigkeit beider Verbesserungsmethoden (Übereinstimmung bis zur 7. Stelle) erwiesen. Dann wurden nach (105) eine ganze Reihe von Punkten in der Umgebung des Ursprungs behandelt, nämlich auf  $k=0$

auf  $k=1$

1,805 543

2,871 789

2,344 730

1,922 754

1,599 383.

$\delta$  zeigte sich als  $\leq 0,0001$  und nahm bei den grösseren Zahlen ab bis  $\delta \leq 0,00001$ . Da für die mehr vom Ursprung entfernten Werte die Stirlingsche Formel immer besser wird, wurde auf weitere Verbesserungsrechnungen verzichtet. Ob der schon verbesserte Wert 1,805 543 richtig war, konnte man nicht ohne weiteres sagen, denn der Punkt  $1 + 1,805\ 543\ i$  liegt in so grosser Ursprungsnähe, dass man der Stirlingschen Formel nicht unbedingt sicher sein konnte. Als ganz zuverlässiges Hilfsmittel bieten sich, wenn die Stirlingsche Formel versagt, die konvergenten Fakultätenreihen. Es wurde deshalb eine Formel aus Rocktäschels Dissertation, die er als zur numerischen Berechnung geeignet empfiehlt, benützt, um den  $\operatorname{arc} \Gamma(1 + 1,806\ i)$  ganz genau zu ermitteln (s. Formel 43). Wenn man diesen Wert in (105) einführt, hat man die Genugtuung, als endgültigen Wert 1,805 547 feststellen zu können. Man sieht, die Stirlingsche Formel stellt auch in dieser Nähe des Ursprungs eine sehr gute Näherung dar, und wir können alle anderen nach ihr verbesserten Werte als sicher ansehen.

Es wäre aber noch wünschenswert, für die nicht verbesserten, nach (52) bez. (52\*) berechneten Zahlen eine Abschätzung der Genauigkeit zu haben. Diese wird viel zu grob ausfallen, gibt aber dann auch eine sichere Gewähr. Zunächst

muss man unsere Korrektur im Logarithmus gegen das 1. Glied der  $\mu$ -Funktion abwägen. Wir haben exakt gesetzt

$$\lg(x^2 + y^2) + \frac{\varrho}{x^2 + y^2} = \lg(x^2 + y^2) - \frac{2}{a(x^2 + y^2)}$$

und diesen Wert dann näherungsweise dem  $\lg(x^2 + y^2 + \varrho)$  gleich gesetzt, haben also zu  $\lg(x^2 + y^2) + \frac{\varrho}{x^2 + y^2}$  noch weitere Glieder zugefügt. Es ist nun zu untersuchen, ob diese Glieder unseren Ausdruck verbessern oder verschlechtern, d. h. sie sind mit den weggelassenen Gliedern der  $\mu$ -Reihe zu vergleichen. Damit die Reihe für den Logarithmus konvergiert, muss  $|\varrho| < x^2 + y^2$  sein, eine Forderung, die für alle berechneten Punkte erfüllt ist. Ferner setzt ein abschätzender Vergleich dieser Reihe mit der  $\mu$ -Reihe voraus, dass eine Mitnahme weiterer Glieder der  $\mu$ -Reihe eine Verbesserung bedeutet. Das ist für unser Gebiet auch der Fall. Die Rechnungen zeigten (s. die Ausführungen über Verbesserung), dass die Reihenglieder bis zum 4. oder 5. abnehmen. Bei dieser Sachlage genügt es, zu untersuchen, ob das 2. Glied der logarithmischen Ersatzreihe im Sinne des 2. Gliedes der  $\mu$ -Reihe wirkt. Es ist notwendig, die Formeln (52) und (52\*) getrennt zu behandeln.

In (52) haben wir

$$-\frac{1}{6(x^2 + y^2)} + \frac{2 \cdot (3x^2 - y^2)}{2 \cdot 180(x^2 + y^2)^3}$$

ersetzt durch

$$-\frac{1}{6(x^2 + y^2)} - \frac{5(x^2 + y^2)}{5 \cdot 72(x^2 + y^2)^3}$$

Unsere Korrektur kann gegenüber der blossen Berücksichtigung des ersten  $\mu$ -Gliedes nur dann eine Verbesserung bedeuten, wenn  $3x^2 - y^2 < 0$  ist und zugleich das Korrekturglied das zu ersetzende Glied nicht übertrifft. Es muss also gelten

$$\begin{aligned} 2y^2 - 6x^2 - 5x^2 - 5y^2 &\geq 0 \\ -11x^2 - 3y^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

eine unerfüllbare Forderung. Wir kommen also zu dem Ergebnis, dass die in (52) angebrachte Korrektur gegenüber der Mitnahme des 1. Gliedes der  $\mu$ -Funktion eine Verschlechterung bedeutet.

Anders liegen die Verhältnisse für die Formel (52\*). Hier haben wir

ersetzt durch

$$\frac{1}{12(x^2 + y^2)} - \frac{7(3x^2 - y^2)}{4 \cdot 360(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{1}{12(x^2 + y^2)} - \frac{5(x^2 + y^2)}{5 \cdot 144 \cdot 2(x^2 + y^2)^3}$$

Soll also unsere Reihe eine Verbesserung gegenüber der blossen Mitnahme des 1. Gliedes der  $\mu$ -Funktion bedeuten, so muss gelten

$$\begin{aligned} 7(3x^2 - y^2) - 5(x^2 + y^2) &\geq 0 \\ 4x^2 - 3y^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Auf der Geraden  $y = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot x$  stimmt unsere Reihe bis ins 2. Glied mit der  $\mu$ -Reihe überein. Das Gebiet unterhalb dieser Geraden kann also als für unsere logarithmische Reihe günstiges Gebiet angesehen werden.

In diesem für die Formel günstigen Gebiet ist der ursprungnächste, nach (52\*) berechnete, nicht verbesserte Punkt der Punkt  $3,5 + 2,60562i$ . Wir ziehen zur Abschätzung die Formel (105) heran. Im Zähler steht jetzt die  $\mu$ -Funktion vom 2. Glied ab, im Nenner der Realteil der  $\psi$ -Funktion. Dieser ist für  $3,5 + 2,60562i$  grösser als 2. Für den Zähler gilt die Stieltjesabschätzung (42\*)

$$|R_4(z)| < \frac{1}{360 |z|^3 \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)^4}$$

Der Imaginärteil ist sicher noch kleiner, also können wir diesen Ausdruck einsetzen

$$\frac{1}{360 \cdot 12,25^3 (\cos 19^\circ)^4} = 0,000002.$$

Als Fehlergrenze ergibt sich also

$$(106) \quad 0,000001.$$

Wichtiger ist das andere Gebiet. Hier ist der ursprungnächste, nicht verbesserte Punkt für beide Formeln ungefähr  $4e^{\frac{i\pi}{4}}$ . Für ihn gäbe die Stieltjesabschätzung  $0,00001$ . Das 2. Glied der logarithmischen Reihe ist von der Grössenordnung  $0,00006$ . Wir können also

(107)

0,0001

als Genauigkeitsgrenze unserer Rechnungen in Anspruch nehmen. In Wirklichkeit ist die Genauigkeit viel besser, sie geht bis in die 5. Stelle. Der schönste Beweis dafür ist der glänzende Wert, den die Stirlingsche Formel in dem gefährdeten Punkt  $1 + 1,805547i$  geliefert hat. Er garantiert eigentlich für die Genauigkeit aller Rechnungen, denn er garantiert die numerische Zuverlässigkeit der Stirlingschen Formel für die Genauigkeit unserer Stellenzahl in unserem Gebiet.

Aus geometrischen Gründen musste nun das Punktnetz an einigen Stellen noch dichter gelegt werden. So wurden mit der Formel (74) einige Werte auf der linken Seite der Achse eingeschoben. Ihre Genauigkeit steht ausser Zweifel, da ja tatsächlich rechts gerechnet wurde. Die Formel sieht zwar sehr verwickelt aus, mit den Hayashischen Tafeln kommt man aber ganz gut durch. Die Werte werden in der Tabelle mit angegeben. Ferner wurde auf  $k=0$  ein Wert  $x=1,25$ ;  $y=1,198$  eingeschoben.

Da die Kurve  $k=-1$  wendet, habe ich versucht, den am weitesten von der imaginären Achse entfernten Punkt festzulegen. Er muss ausser der Gleichung  $f = -\frac{\pi}{2}$  noch die Gleichung  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  befriedigen. Durch wechselseitige Annäherung, indem ich die gefundenen Werte einmal in die eine, das andere Mal in die andere Gleichung einsetzte, konnte ich den Punkt bestimmen zu

$$x = 0,167$$

$$y = 0,964.$$

Der Gedanke, diesen Wert mit der überall konvergenten Potenzreihe für  $\frac{1}{\Gamma(1+z)}$  zu verbessern, erwies sich als nicht durchführbar, da die aufgestellte Reihe für diesen Punkt zu schlecht konvergierte.

Die Höhenlinien wurden nach den Formeln (55) und (56) mit denselben Näherungsmethoden wie die Stromlinien punktweise berechnet. Ihre Schnittpunkte mit der Achse liessen sich durch lineare Interpolation aus den Hayashischen Tafeln für die  $\Gamma$ -Funktion auf 4 bis 5 Stellen genau entnehmen. Sie sind am Schlusse angegeben. Bei der Berechnung des Netzes ergab sich übrigens aus der Natur der Sache auf der Geraden  $x = \frac{1}{2}$  eine kleine Erleichterung.

Auf dieser Geraden stehen nämlich die  $y$ -Werte innerhalb der von uns verlangten Genauigkeit genau um eine Einheit von einander ab. Für  $x = \frac{1}{2}$  heisst (55)

$$\operatorname{Cos} \frac{\pi}{\pi y} = e^{k\pi}$$

$$\frac{2\pi}{e^{y\pi} + e^{-y\pi}} = e^{k\pi}$$

$$2\pi = e^{y\pi+k\pi} + e^{-y\pi+k\pi}.$$

Für grosse  $y$  hat der zweite Teil numerisch keinen Einfluss mehr, wie ein Blick in eine Tafel von  $\operatorname{Sin}$  und  $\operatorname{Cos}$  lehrt. Deshalb kann man  $y$  in  $y+1$ ,  $k$  in  $k-1$  verwandeln, und die Beziehung bleibt numerisch richtig.

Für die Umgebung der negativen reellen Achse waren wieder besondere Rechnungen nötig. Es waren die Betragslinien, die von den Kreuzungspunkten ausgehen, zu berechnen. Da Hayashi den Betrag z. T. angibt, er andernteils durch Interpolation gefunden werden kann, boten sich keine besonderen Schwierigkeiten. Wenn man sich auf die Geraden  $x \equiv 0$  und  $x \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$  beschränkt, kann man die strengen Formeln (55) und (56) verwenden. Die Werte sind am Schluss zusammengestellt.

Herr Böhmer weist auf die besonderen Eigenschaften einer Höhenlinie hin. Es gilt nach der Funktionalgleichung

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Geht man zum absoluten Betrag über, so folgt

$$(108) \quad \left| \Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \right| = \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \right| = \left| \Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \right|.$$

Die drei Punkte  $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ ,  $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ ,  $\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$  liegen also auf derselben Höhenlinie. Diese Höhenlinie muss zwischen den so ausgezeichneten Punkten jedes

Mal wenden. Um sie einzeichnen zu können, wurde nach (66) ihre Richtung bestimmt. Es ergab sich für

$$\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}: \frac{\pi}{2} - 1,181\ 997 \sim 23^\circ$$

$$\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}: \frac{\pi}{2} + 1,444\ 532 \sim 172^\circ$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}: \frac{\pi}{2} - 1,250\ 590 \sim 18^\circ.$$

Um sie in die anderen Kurven einbetten zu können, wurde ihr  $k$  berechnet zu

$$k = -0,282\ 3874,$$

ihr Schnittpunkt mit der Achse zu  $-3,213$ . Die Kurve ist in Zeichnung III mit angedeutet.

Nr. 3. Zur Bestimmung der Krümmung der Stromlinien in den Kreuzungspunkten und Polen braucht man die  $\psi$ -Funktion mit ihren Ableitungen für reelles Argument. Diese Werte wurden lediglich aus den von Gauss berechneten Werten der  $\psi$ -Funktion und zwar durch wiederholte Anwendung der Newtonschen Interpolationsformel gewonnen. Gauss gibt die Funktion zwischen 1 und 2 mit dem Intervall  $0,01$  auf 18 Stellen an. Die Interpolationsarbeit leistet man vorteilhaft in diesem Gebiet und geht dann mit der Funktionalgleichung in das jeweils nötige Einheitsintervall über. Um nun die Krümmung z. B. in  $z_0$  zu berechnen, wurden  $\varrho(1,46)$  und  $\varrho(1,47)$  berechnet und linear interpoliert auf

$$\varrho(z_0) = \varrho(1,462) = -3,278.$$

Nach Formel (61) berechnet sich

$$\varrho(z_1) = -16,63.$$

Die Formel für die Grenzen (62) lieferte

$$-26,61 < \varrho(z_1) < -3,27$$

$$-2,024 < \varrho(z_2) < -1,563$$

$$-1,1641 < \varrho(z_3) < -0,4394.$$

Die weiteren Werte für die Krümmung in  $z_1, \dots$  wurden nach der asymptotischen Formel (63), die Krümmung in den Polen nach (58) berechnet. Eine Zusammenstellung der Ergebnisse folgt am Schluss.

Nr. 4. Bei der Berechnung des Richtungsfeldes in der Umgebung der negativen reellen Achse kam es auf Dichte der Werte in Achsennähe an. Es war deshalb vorteilhaft, sich für alle Intervalle etwa auf das folgende Netz festzulegen:

$\xi =$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$y = \frac{1}{16}$	.	.	.	.	.
$\frac{1}{8}$	.	.	.	.	.
$\frac{1}{4}$	.	.	.	.	.
$\frac{1}{2}$	.	.	.	.	.
$\frac{3}{4}$	.	.	.	.	.
1	.	.	.	.	.

Für dieses Netz wurden nun zunächst die von  $n$  unabhängigen Terme  $U(x, y)$  und  $V(x, y)$  (68) berechnet. Sie werden am Schluss mit angegeben. Danach wurde die Grösse  $Q$  nach (73) für  $n=1$  und  $n=2$  berechnet. Für  $n=0$  sind die Vereinfachungen ((70) zu (71), (72)) nicht zulässig, dieses Intervall musste deshalb gesondert nach (67) berechnet werden. Formel (67) macht insofern mehr Arbeit, als man nach ihr gewissermassen zweidimensional rechnen muss. Dieselbe Rechnung liefert ohne die Glieder  $U$  und  $V$  das Intervall von  $\frac{1}{2}$  bis  $\frac{3}{2}$ . Die Werte sind am Schluss tabellarisch geordnet. Auf grosse Genauigkeit können sie keinen Anspruch machen; bis auf den ausdrücklich mit Fragezeichen versehenen Fall, wo die Stirlingsche Formel unbrauchbar wurde, sind sie aber sicher eine erste Näherung. Der Anschluss von  $\xi=1$  für  $n$  an  $\xi=0$  für  $n+1$  ist ganz befriedigend. Der Vorzeichenwechsel z. B. auf den Geraden  $\xi = \frac{1}{4}$  und  $\xi = \frac{3}{4}$  ist zum grössten Teil auf Kosten des umgekehrten Vorzeichens des  $V$  im Nenner zu setzen. Das sieht man sofort ein, wenn man dagegen das Richtungsfeld

im Gebiete  $x = \frac{1}{2}$  bis  $x = \frac{3}{2}$  betrachtet. Auf den Geraden  $\xi=0$ ,  $\xi = \frac{1}{2}$  und  $\xi=1$  verschwindet  $V$ , die Kurven stehen steil. Die Beteiligung des  $U$  an der Grösse von  $Q$  ist nicht so ausschlaggebend. Für das Intervall zwischen  $z_1$  und  $z_2$  ist in Zeichnung III das Richtungsfeld eingezeichnet.

Das Richtungsfeld musste nun graphisch integriert, die Richtungen zu Kurven zusammengeschlossen werden. Zu diesem Zwecke berechnet man nach (74) den zu jedem Punkte des Richtungsfeldes gehörigen Arcus der  $\Gamma$ -Funktion. Wegen der Konformität der Abbildung mündet die Kurve dann unter diesem Winkel in den Pol ein. Zu beachten sind dabei nur die im Anfang erörterten Zusammenhangsverhältnisse der einzelnen Blätter. Die Pole werden nicht alle in derselben Richtung umlaufen, vielmehr wechselt der Sinn von Pol zu Pol. Um jeden Pol aber sind alle Werte von  $-2k\pi + 0$  bis  $-2k\pi + 2\pi$  vertreten, denn es ist

$$\frac{\pi}{2} \equiv -\frac{3\pi}{2} \equiv +\frac{5\pi}{2} \equiv -\frac{7\pi}{2} \equiv \dots \quad (\text{mod } 2\pi).$$

Die Tabelle der zu den einzelnen Richtungen gehörigen Werte des Arcus der  $\Gamma$ -Funktion folgt am Schluss. Für die Intervalle  $z_0$  bis  $z_1$ ,  $z_2$  bis  $z_3$  sind einige der so durch Integration gewonnenen Stromlinien eingezeichnet. Die Zeichnung enthält auch Höhenlinien und Wendepunktskurve in der Umgebung der Achse.

Nr. 5. Die Wendepunktskurven waren in theoretischer und praktischer Hinsicht am schwierigsten festzustellen. Die achsenfernen Züge sind zunächst nach den expliziten Formeln (99 u. 103) sehr einfach zu berechnen. Die Kurve (99) ist in Zeichnung III angegeben. Die Wendepunktskurve der Stromlinien wurde geprüft mit der Böhmerschen Methode. Es wurde also nach der Stirlingschen Formel für die berechneten Punkte, zwischen denen die Kurve vermutlich durchgeht, einerseits die Richtung der Stromlinie

$$-\frac{\Im \psi}{\Re \psi},$$

andererseits die Richtung des Vektors  $\varrho$

$$\frac{\Im \left( \frac{\psi}{\psi'} \right)}{\Re \left( \frac{\psi}{\psi'} \right)}$$

berechnet. Die Wendekurve geht zwischen den Punkten durch, zwischen denen der eine Ausdruck am andern vorbeigeht, der eine dem andern gleich wird. Durch lineare Interpolation kann man auf den Punkt selbst in erster Annäherung schliessen. So ergibt sich für  $1 + 1,806 i$

$$\frac{\Im}{\Re} \varrho = -0,895\ 536 \quad - \frac{\Im \psi}{\Re \psi} = -2,095\ 16$$

für  $1 + 3,439\ 74 i$

$$\frac{\Im}{\Re} \varrho = -1,584\ 298 \quad - \frac{\Im \psi}{\Re \psi} = -1,147\ 233.$$

Daraus interpoliert sich ein Punkt der Wendekurve zu  $1 + 3,00 i$ .

Für  $\frac{1}{2} + 4,010\ 95 i$  kommt

$$\frac{\Im}{\Re} \varrho = -0,882\ 6204 \quad - \frac{\Im \psi}{\Re \psi} = -1,132\ 990$$

für  $\frac{1}{2} + 5,053\ 34 i$

$$\frac{\Im}{\Re} \varrho = -1,030\ 311 \quad - \frac{\Im \psi}{\Re \psi} = -0,970\ 581$$

und daraus ein Punkt der Wendekurve zu  $\frac{1}{2} + 4,852\ 57 i$ .

Für  $0 + 5,538\ 60 i$  kommt

$$\frac{\Im}{\Re} \varrho = -0,860\ 730 \quad - \frac{\Im \psi}{\Re \psi} = -0,968\ 857$$

für  $0 + 6,416\ 41 i$

$$\frac{\Im}{\Re} \varrho = -0,965\ 202 \quad - \frac{\Im \psi}{\Re \psi} = -0,885\ 987$$

und daraus ein Punkt der Wendekurve zu  $0 + 6,045\ 23 i$ .

Für  $-\frac{1}{2} + 6,020\ 94 i$  kommt

$$\frac{\Im}{\Re} \varrho = -0,745\ 770 \quad - \frac{\Im \psi}{\Re \psi} = -0,960\ 150$$

für  $-\frac{1}{2} + 6,859\ 75 i$

$$\frac{\Im}{\Re} \varrho = -0,843\ 067 \quad - \frac{\Im \psi}{\Re \psi} = -0,886\ 560$$

für  $-\frac{1}{2} + 7,649\ 17\ i$

$$\frac{\Im}{\Re} \varrho = -0,924\ 487 \quad - \frac{\Im \psi}{\Re \psi} = -0,832\ 834.$$

Der Wendepunkt liegt also zwischen den beiden letzten Punkten, die Interpolation ergibt  $-\frac{1}{2} + 7,113\ 80\ i$ .

Für  $-1 + 8,066\ 01\ i$  kommt

$$\frac{\Im}{\Re} \varrho = -0,827\ 927 \quad - \frac{\Im \psi}{\Re \psi} = -0,832\ 680$$

für  $-1 + 8,797\ 77\ i$

$$\frac{\Im}{\Re} \varrho = -0,894\ 655 \quad - \frac{\Im \psi}{\Re \psi} = -0,795\ 055$$

und daraus der Wendepunkt  $-1 + 8,105\ 97\ i$ .

Für  $-\frac{3}{2} + 8,482\ 80\ i$  kommt

$$\frac{\Im}{\Re} \varrho = -0,751\ 481 \quad - \frac{\Im \psi}{\Re \psi} = -0,832\ 759$$

für  $-\frac{3}{2} + 9,195\ 67\ i$

$$\frac{\Im}{\Re} \varrho = -0,815\ 120 \quad - \frac{\Im \psi}{\Re \psi} = -0,796\ 440.$$

Für den Wendepunkt ergibt sich  $-\frac{3}{2} + 9,062\ 45\ i$ .

Die Ergebnisse wurden dann in die Formel für die Wendekurve

$$\frac{y}{2} \lg(x^2 + y^2) = \arctan \frac{y}{x} (-x + \sqrt{x^2 + y^2}) \quad \bar{x} = x - \frac{1}{2}$$

eingesetzt und gute Übereinstimmung festgestellt. Die Abweichung beträgt im Durchschnitt 0,005.

Für die Ovale kam es besonders auf die Nullstellen 2. Art, die Nullstellen des Ausdrucks  $B(x)$  an. Zunächst kann man sich mit Hilfe der Grundwerte (86) einen Einblick in den allgemeinen Verlauf der reellen stetigen Funktion  $B(x)$  verschaffen und zeichnerisch eine erste Näherung für ihre Nullstellen bestimmen.

Dann gilt es allerdings, die Nullstellen in enge Grenzen einzuschliessen und zwar durch Probieren. Wieder wurde nur die Gaussische Tabelle der  $\psi$ -Funktion benützt und mit Hilfe der Newtonschen Interpolationsformel  $\psi'$  und  $\psi''$  ermittelt. Hier zeigte sich der grosse Vorzug der Newtonschen Formel, der darin liegt, dass sie gestattet, den Interpolationsbereich jederzeit durch Hinzunahme neuer Glieder zu erweitern. Die notwendigen Werte der  $\Gamma$ -Funktion lieferte Hayashi. Es gelang zunächst,  $z_1^*$  zwischen  $0,14$  und  $0,13$  einzuengen. Da Gauss keine Zwischenwerte angibt, konnte ich nur noch interpolieren auf

$$z_1^* = 0,140.$$

Ferner ergab sich nach (87)

$$z_2^* = -1,052$$

$$z_3^* = -2,102$$

$$z_4^* = -3,131.$$

Es wurde immer darauf gesehen, dass die Endrechnung auf 5 Stellen genau war. So ergab sich z. B.

$$B(0,14) = \frac{7,5107 - 730,54 - 2 \cdot 52,383^3}{6,6887^3} = \frac{-1,0}{6,6887^3}$$

$$B(0,13) = \frac{8,0739 \cdot 911,90 - 2 \cdot 60,551^2}{7,2302^3} = \frac{+29,8}{7,2302^3}.$$

Um diese Genauigkeit zu erhalten, musste  $\psi$  selbst auf 11 Stellen angesetzt werden.

An den Stellen  $0,14$  und  $-3,13$  wurde die Krümmung der Wendekurve berechnet.  $\psi'''$  und  $\psi''''$  wurden wieder nur nach der Newtonschen Interpolationsformel berechnet, wobei von  $\psi''''$  allerdings nur noch 2—3 Stellen festgestellt werden konnten. Zur Bestimmung der Krümmung an der Stelle  $-3,13$  wurden die Ergänzungssätze der  $\psi'''$ - und  $\psi''''$ -Funktion herangezogen. Sie ergeben sich durch Differenzieren zu

$$\psi'''(1-z) = -\psi'''(z) + 2\pi^4 \frac{1 + 2 \cos^2 z\pi}{\sin^4 z\pi}$$

$$\psi''''(1-z) = \psi''''(z) + 8\pi^5 \frac{\cos z\pi(2 + \cos^2 z\pi)}{\sin^5 z\pi}.$$

Es zeigte sich nun, dass für die Stelle  $-3,13$  die rechten Ausdrücke der Formeln die linken soweit übertreffen, dass die  $\psi''''$ -Funktion z. B. erst in der 7. Stelle in Frage kam. Insofern schadet die geringe Genauigkeit der Berechnung von  $\psi''''$  garnichts mehr. Es ergab sich für  $0,14$ .

$$\xi = -1,0498$$

für  $-3,13$

$$\xi = +16,103.$$

Zur Kontrolle wurde nach beiden Formeln (96 u. 96\*) gerechnet. Abweichungen zeigten sich erst in der 4. Stelle. Die Kontrolle trifft ja aber auch den Kern der Sache nicht, ob nämlich die für  $-3,13$  errechneten Werte  $\psi'''$  und  $\psi''''$  nicht zu stark von den Werten dieser Funktionen an der wahren Nullstelle  $z_1^*$  abweichen. Nach der angestellten Rechnung ist anzunehmen, dass das erste Oval konvex, das vierte jedenfalls rechts eingedrückt ist. Wie die anderen sich verhalten, weiss ich nicht, vermute nur, dass die Einbuchtungen verschwinden werden. Die Rechnungen sind so verwickelt und unübersichtlich, dass man während der Arbeit keine Genauigkeitskontrolle mehr hat.

Da eine analytische Darstellung der Ovale nicht gelungen war, blieb nur die Böhmische Methode, um festzustellen, zwischen welchen der bekannten Punkte der Stromlinien die Wendekurve durchgeht. Man hat also für eine der  $y$ -Achse parallele Gerade, die von dem Oval sicher geschnitten wird, an den berechneten Ordinatenstellen einerseits  $\frac{\Im}{\Re} \left( \frac{\psi}{\psi'} \right)$ , andererseits  $-\frac{\Im \psi}{\Re \psi}$  aufzustellen. Der Ergänzungssatz liefert

$$\frac{1}{\psi' \left( \frac{1}{2} - z \right)} = \frac{\cos^2 z \pi}{\pi^2 - \cos^2 z \pi \cdot \psi' \left( \frac{1}{2} + z \right)}.$$

Da

$$\cos^2(x + yi) = \frac{1}{2} (\cos 2x \operatorname{Cof} 2y - i \sin 2x \operatorname{Sin} 2y + 1),$$

erhält man, wenn man gleichzeitig

$$\psi' \left( \frac{1}{2} + z \right) = \frac{1}{x + yi} - \frac{1}{12(x + yi)^3}.$$

setzt,

$$\psi' \left( \frac{1}{2} - z \right) = \frac{\cos 2\pi x \operatorname{Cof} 2\pi y - i \sin 2\pi x \operatorname{Sin} 2\pi y + 1}{2\pi^2 - (\cos 2\pi x \operatorname{Cof} 2\pi y - i \sin 2\pi x \operatorname{Sin} 2\pi y + 1) \left( \frac{x - yi}{x^2 + y^2} - \frac{x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)}{12(x^2 + y^2)^3} \right)}$$

Die Berechnung dieses Ausdrucks vereinfacht sich für besondere  $x$  noch etwas. Die  $\psi$ -Funktion selbst war aus dem Richtungsfeld schon bekannt. Es war also zunächst  $\frac{\psi}{\psi'}$  zu bilden, davon  $\frac{\Im}{\Re}$  zu berechnen und diese Werte mit denen des Richtungsfeldes zu vergleichen. Die Zahlen können Anspruch auf Genauigkeit machen, denn sie sind alle rechts vom Ursprung berechnet. In dem Gebiet grösster Ursprungsnähe wurde die Rechnung mit Hilfe der Funktionalgleichung weiter nach rechts verlegt. Die Tabellen, auf Grund deren das erste und dritte Oval so gezeichnet wurde, wie es geschehen ist, sehen folgendermassen aus:

$x = -0,5$	$y = \frac{1}{4}$	$y = \frac{1}{2}$	$y = \frac{3}{4}$	$y = 1$
$\frac{\Im}{\Re}(\varrho)$	+ 288,3087	2,660 440	- 0,566 5113	- 0,692 4223
$-\frac{\Im\psi}{\Re\psi}$	28,248 20	18,577 99	10,700 96	6,824 857

$x = -2,25$	$y = \frac{1}{16}$	$y = \frac{1}{8}$	$y = \frac{1}{4}$	$y = \frac{1}{2}$	$y = \frac{3}{4}$	$y = 1$
$\frac{\Im}{\Re}(\varrho)$	0,105 830	0,197 245	0,326 207	0,599 375	3,142 577	- 1,842 161
$-\frac{\Im\psi}{\Re\psi}$	0,292 544	0,593 686	1,225 590	2,256 844	2,588 840	2,562 241

$x = -2,5$	$y = \frac{1}{4}$	$y = \frac{1}{2}$	$y = \frac{3}{4}$	$y = 1$
$\frac{\Im}{\Re}(\varrho)$	- 1,781 259	- 2,721 114	+ 1,093 328	- 0,966 992
$-\frac{\Im\psi}{\Re\psi}$	+ 1,760 310	+ 2,402 601	+ 2,484 911	+ 2,418 270

$x=0,5$	$y = \frac{1}{16}$	$y = \frac{1}{8}$	$y = \frac{1}{4}$	$y = \frac{1}{2}$	$y = \frac{3}{4}$	$y = 1$
$\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{R}}(\varrho)$	0,095 4942	0,095 8876	0,121 9853	0,177 4912	0,112 2928	-0,293 3775
$-\frac{\mathfrak{S}\psi}{\mathfrak{R}\psi}$	0,116 8812	0,330 9651	0,765 1365	1,826 902	4,342 2139	37,699 11
$x=0,25$						
$\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{R}}(\varrho)$	-0,142 206	-0,329 888	-0,717 435	-0,890 508	-0,589 106	- 0,308 815
$-\frac{\mathfrak{S}\psi}{\mathfrak{R}\psi}$	-0,329 424	-0,608 236	-1,059 994	-2,283 319	-5,609 782	-114,4713.

Der Durchgang ist jedesmal durch einen Pfeil gekennzeichnet. Die beiden letzten Kolonnen zeigen, dass dort kein Durchgang mehr vorhanden ist. Sie wurden berechnet, weil ein Übergreifen des ersten Ovals in dieses Gebiet zu fürchten war.

Die Rechnung zeigte, dass das nicht der Fall ist; zwischen  $\frac{1}{4}$  und  $\frac{1}{2}$  kommt das Oval der Geraden  $x=0,25$  nahe.

Es ist nicht viel, was wir über den Verlauf der Wendekurve in der Umgebung der negativen reellen Achse feststellen konnten. Das Wenige, was wir aussagen konnten, verdanken wir aber ausschliesslich der Böhmerschen Methode zur Bestimmung des Krümmungsvektors.

V.

Nr. 1. Stromlinien.

$\frac{x}{k} =$	$(0), \frac{1}{2}, 1$	$\frac{3}{2}, 2$	$\frac{5}{2}, 3$	$\frac{7}{2}, 4$	$\frac{9}{2}, 5$	$\frac{11}{2}, 6$	$\frac{13}{2}, 7$	$\frac{15}{2}, 8$	$\frac{17}{2}, 9$	$\frac{19}{2}, 10$
10		10,18618 10,49632	9,59386 9,88568	9,04208 9,31239	8,53795 8,78501	8,08515 8,30502	7,68397 7,87821	7,33175 7,50194	7,02384 7,17259	6,75475 6,88479
9	10,14466 10,4767	9,50325 9,81999	8,89848 9,19567	8,33987 8,61287	7,83486 8,08033	7,38708 7,60376	6,99586 7,18460	6,65697 6,82022	6,36425 6,50525	6,11103 6,23311
8	9,45665 9,79771	8,79777 9,12284	8,17962 8,48280	7,61400 7,88960	7,10949 7,35376	6,66937 6,88140	6,29128 6,47265	5,96887 6,12360	5,69412 5,82605	5,45903 5,57209
7	8,74561 9,09805	8,06601 8,40100	7,43267 7,74205	6,86014 7,13802	6,35841 6,60009	5,92971 6,13510	5,56896 5,74136	5,26693 5,41125	5,01336 5,13470	4,79889 4,90175
6	8,00686 8,37304	7,30233 7,64917	6,65130 6,96886	6,07254 6,35191	5,57737 5,81424	5,16557 5,36142	4,82776 4,98820	4,55081 4,68250	4,32204 4,43112	4,13087 4,22232
5	7,23376 7,61704	6,49829 6,85975	5,82636 6,15257	5,24335 5,52263	4,76119 4,98963	4,37438 4,55674	4,06678 4,21182	3,82053 3,93701	3,62056 3,71555	3,45545 3,53423
4	6,41641 6,82189	5,64042 6,02094	4,94383 5,27964	4,36164 4,63704	3,90383 4,11776	3,55387 3,71697	3,28575 3,41114	3,07658 3,17498	2,90961 2,98864	2,77334 2,83820
3	5,53860 5,97477	4,70632 5,11337	3,98048 4,32596	3,41207 3,67533	2,99901 3,18818	2,70287 2,83895	2,48541 2,58622	2,32013 2,39747	2,19032 2,25156	2,08550 2,13526
2	4,57009 5,05334	3,65002 4,09786	2,89381 3,24369	2,37457 2,60562	2,04244 2,19030	1,82258 1,92206	1,66797 1,73906	1,55319 1,60666	1,46425 1,50610	1,39298 1,42677
1	3,43974 4,01095	2,34473 2,87179	1,59938 1,91275	1,23140 1,38301	1,03703 1,12080	0,91823 0,97127	0,83753 0,87441	0,77862 0,80597	0,73338 0,75462	0,69731 0,71439
0	1,80555 2,70269									

Nr. 2. Höhenlinien (rechte Halbebene).

$\frac{x}{k}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{11}{2}$	6	$\frac{13}{2}$	7	$\frac{15}{2}$	8	$\frac{17}{2}$	9	$\frac{19}{2}$		
-10	9,85667																					
-9	8,88935	9,58501																				
-8	7,92606	8,58501	9,30101	10,05992																		
-7	6,96721	7,58501	8,25699	8,98364	9,76437	9,45408																
-6	6,01394	6,58501	7,21400	7,90228	8,64950	8,28928	9,12222															
-5	5,06839	5,58501	6,16393	6,80781	7,51678	7,09534	7,89921	8,76626														
-4	4,13331	4,58501	5,10386	5,69490	6,35934	5,88849	6,63623	7,47441	8,38305													
-3	3,21344	3,58501	4,02855	4,55394	5,16455	4,55108	5,28993	6,11246	7,00839	7,96863												
-2	2,31748	2,58501	2,92686	3,36434	3,90643	3,10210	3,81412	4,62823	5,52545	6,49208	7,51782	8,59479										
-1	1,46376	1,58500	1,76606	2,06469	2,51109	1,10084	1,95242	2,85908	3,82465	4,84418	5,91213	7,02362	8,17450									
0									1,26046	2,75680	4,02048	5,24730	6,47617	7,71992								
1											0,57477	2,93622	4,45965	5,86069	7,22492							
2													0,91220	3,46629	5,15307	6,68085						
3															1,97842	4,30848	6,07501					
4																	3,22153	5,38719				
5																			1,45587	7,18766		
6																					4,58443	6,64188

Nr. 2. Höhenlinien (linke Halbebene).

$\frac{x=}{k=}$	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
-10	1,55073	2,30790	3,07157	3,83130	4,60025	5,45366	6,36100	7,37629	8,53332
-9	1,02823	1,76748	2,50164	3,23730	3,98656	4,76891	5,61319	6,55652	7,63809
-8	0,526563	1,23817	1,95116	2,65908	3,37157	4,10457	4,88608	5,75415	6,75406
-7	0,158	0,722634	1,41351	2,09645	2,77483	3,46199	4,18170	4,97208	5,88357
-6		0,2737	0,889284	1,54888	2,19695	2,84169	3,50226	4,21371	5,03005
-5			0,404423	1,01646	1,63740	2,24423	2,84975	3,48300	4,19759
-4				0,510293	1,09587	1,66950	2,22572	2,78424	3,39209
-3				0,1506	0,579246	1,11723	1,63005	2,12162	2,62147
-2					0,1837	0,59352	1,06563	1,49848	1,89599
-1						0,18979	0,53812	0,917192	1,31999

Nr. 3. Nullstellen der  $\psi$ -Funktion.

- $z_6 = -4,6532$
- $z_5 = -5,6672$
- $z_4 = -6,67842$
- $z_3 = -7,68779$
- $z_2 = -8,69576$

Nr. 4. Eingeschobene Werte zu den Stromlinien.

$k =$	$1 - x =$
-2	$\frac{3}{4}$ 1,73941
-3	$\frac{5}{4}$ 1,22726
-4	$\frac{7}{4}$ 0,92646
-5	$\frac{9}{4}$ 0,77971
-6	$\frac{11}{4}$ 0,64615
-7	$\frac{13}{4}$ 0,60735
-8	$\frac{15}{4}$ 0,51379
-9	$\frac{17}{4}$ 0,52626
-10	$\frac{19}{4}$ 0,43340

Nr. 5. Eingeschobene Werte zu den Höhenlinien. (Schnittpunkte mit der Achse).

$k = -1$	-4,1635
-2	-5,154
-3	-6,126
-4	-6,451
-5	-7,1318
-6	-8,2104
$k = 0$	2
$k = 1$	3,8204
2	4,974
3	5,956
4	6,809
5	7,663
6.	8,4400

Nr. 6. Krümmungen

der Stromlinien in den Nullstellen der $\psi$ -Funktion	der Stromlinien in den Polen
$\rho(z_0) = -3,278$	$\rho(0) = 0,86623$
$\rho(z_1) = -16,63$	$\rho(-1) = -1,1826$
$\rho(z_2) = -2,0$	$\rho(-2) = -0,54184$
$\rho(z_3) = -1,2$	$\rho(-3) = -0,39805$
$\rho(z_4) = -1,197$	$\rho(-4) = -0,33198$
$\rho(z_5) = -0,997$	$\rho(-5) = -0,29306$
$\rho(z_6) = -0,880$	$\rho(-6) = -0,26698$
$\rho(z_7) = -0,801$	$\rho(-7) = -0,24806$
$\rho(z_8) = -0,744$	$\rho(-8) = -0,23358$
$\rho(z_9) = -0,701$	$\rho(-9) = -0,22205$
$\rho(z_{10}) = -0,666$	

Nr. 5. *Eingeschobene Werte zu den Höhenlinien.*

von $z_0 = 1,461632$ $y=0: x = 3,16003$	von $z_1 = -0,504$ $y=0: x = +0,2555$ — 1,2793	von $z_2 = -1,573$ $y=0: x = +0,386$ — 2,1921	von $z_3 = -2,611$ $y=0: x = +1,3857$ — 3,1596	von $z_4 = -3,635$ $y=0: x = -4,142$
$x=2$ $y=0,621092$	$x=0$ $y=0,26644$	$x=0$ $y=0,3864$	$x=0$ $y=0,753456$	$x=1$ $y=1,63698$
$1 - \frac{1}{2}$ $0,65727$	$-1$ $0,258782$	$-\frac{1}{2}$ $0,3392$	$-1$ $0,67264$	$0$ $1,37807$
$0$ $0,75473$	$0$ $0,258782$	$-1$ $0,3667$	$-2$ $0,43535$	$-1$ $1,16062$
$-\frac{1}{2}$ $0,734472$	<b>Kreise um</b>	$-2$ $0,2046$	$-3$ $0,17894$	$-2$ $0,85891$
$-1$ $0,67365$	$-2$			$-3$ $0,48812$
$-\frac{3}{2}$ $0,546011$	$y=0: x = 1,827$			$-4$ $0,163$
$-2$ $0,436185$	$-2,128$			
$-\frac{5}{2}$ $0,11832$	$-3$			
$-3$ $0,1794$	$y=0: x = -2,9497$ $-3,045$			

Nr. 9. Die achsenfernen  
Zügender *Wendepunktkurven*  
 $w_1$  (der Stromlinien),  
 $w_2$  (der Höhenlinien)

$\varphi =$	$w_1$	$w_2$
$15^\circ$	$r = 1,035068$	$r = 1,406611$
$30^\circ$	$1,150616$	$2,476639$
$45^\circ$	$1,38448$	$6,660000$
$60^\circ$	$1,83052$	$49,80898$
$75^\circ$	$2,730348$	$20802,33$
$90^\circ$	$4,820477$	$\infty$

## Nr. 7. Richtungsfeld.

 $n=2$  oder  $x=-2,5$  bis  $x=-1,5$ .

$x \backslash y =$	-2,5	-2,25	-2	-1,75	-1,5
$-\frac{1}{16}$	- 0,5247630	- 0,2925435	- 17,52537	+ 0,5485316	- 0,8009384
$-\frac{1}{8}$	- 1,009778	- 0,5936857	- 9,043678	+ 1,296416	- 1,538243
$-\frac{1}{4}$	- 1,760310	- 1,225590	- 5,057639	+ 6,550825	- 2,661410
$-\frac{1}{2}$	- 2,402601	- 2,256844	- 3,430010	- 5,073908	- 3,532874
$-\frac{3}{4}$	- 2,484911	- 2,588840	- 3,017626	- 3,461300	- 3,511545
- 1	- 2,418270	- 2,562241	- 2,791707	- 3,045031	- 3,264673
$n=1$ oder $x=-1,5$ bis $x=-0,5$ .					
$y =$	-1,5	-1,25	-1	-0,75	-0,5
$-\frac{1}{16}$	- 0,7693666	- 0,3254632	- 38,05722	+ 0,4243548	- 6,033468
$-\frac{1}{8}$	- 1,479302	- 0,6726510	- 19,49825	+ 0,9318443	- 11,10389
$-\frac{1}{4}$	- 2,570550	- 1,485638	- 10,61696	+ 2,755630	- 16,50704
$-\frac{1}{2}$	- 3,460328	- 3,213614	- 6,603963	- 54,85399	- 14,40162
$-\frac{3}{4}$	- 3,491314	- 3,850725	- 5,222699	- 7,801864	- 9,644880
- 1	- 3,281780	- 3,662894	- 4,336800	- 5,327049	- 6,602304
$n=0$ oder $x=-0,5$ bis $x=+0,5$ .					
$y =$	-0,5	-0,25	0	+0,25	+0,5
$-\frac{1}{16}$	- 12,79341	- 0,4081665	+ 30,62862	+ 0,3294239	- 0,07156292 <sup>2</sup>
$-\frac{1}{8}$	- 22,30243	- 0,8857555	+ 15,70459	+ 0,6082357	- 0,08361182 <sup>2</sup>
$-\frac{1}{4}$	- 28,24820	- 2,428661	+ 8,839215	+ 1,059994	+ 0,2384082
$-\frac{1}{2}$	- 18,57799	- 13,85206	+ 7,857819	+ 2,283319	+ 1,524194
$-\frac{3}{4}$	- 10,70096	- 20,74666	+ 18,31816	+ 5,603782	+ 4,187504
- 1	- 6,824857	- 9,849489	- 22,63651	+ 114,4713	+ 37,41804
$x=0,5$ bis $x=1,5$ .					
$y =$	0,5	0,75	1	1,25	1,5
$+\frac{1}{16}$	- 0,1168812	+ 0,06267788 <sup>2</sup>	- 0,1595170	- 0,3352582	+ 1,327373
$+\frac{1}{8}$	- 0,3309651	- 0,03873469	- 0,3263784	- 0,6888710	+ 2,404618
$+\frac{1}{4}$	- 0,7651365	- 0,4347944	- 0,7117188	- 1,550904	+ 3,489586
$+\frac{1}{2}$	- 1,826902	- 1,512271	- 2,025731	- 6,429159	+ 3,321235
$+\frac{3}{4}$	- 4,342139	- 4,193195	- 7,571873	- 12,70746	+ 2,679417
+ 1	- 37,69911	- 304,7609	+ 11,79929	+ 4,180769	+ 2,206067

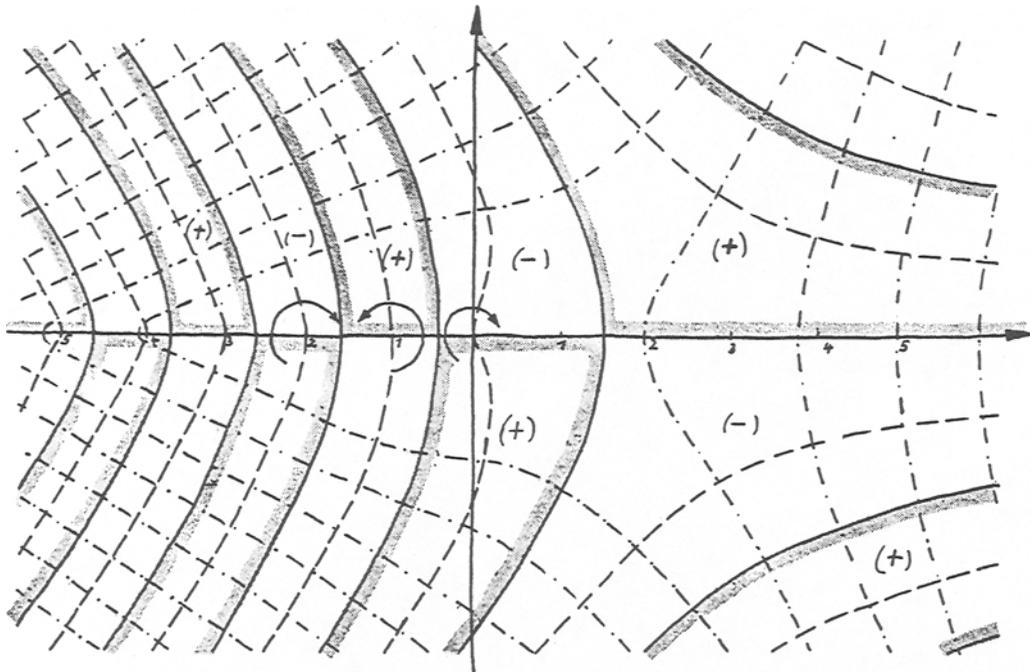
Nr. 8. Zum Richtungsfeld gehörige Funktionswerte.

	$x = -2,5$	$x = -2,25$	$x = -2$	$x = -1,75$	
$y = -\frac{1}{16}$	$-\pi - 0,06895705$	$-\pi - 0,2550637$	$+\frac{\pi}{2} - 0,05769110$	$+ 0,1402839$	
$-\frac{1}{8}$	$-0,1379430$	$-0,4847975$	$-0,1154197$	$+ 0,2551609$	
$-\frac{1}{4}$	$-0,2760913$	$-0,8350476$	$-0,2311386$	$+ 0,3751601$	
$-\frac{1}{2}$	$-0,5538545$	$-1,2534064$	$-0,4646449$	$+ 0,3287684$	
$-\frac{3}{4}$	$-0,8348979$	$-1,5480597$	$-0,7027641$	$+ 0,1492129$	
$-1$	$-1,1207107$	$-1,8212138$	$-0,9475142$	$-0,0654083$	
	$x = -0,5$	$x = -0,25$	$x = 0$	$x = 0,25$	$x = 0,5$
$y = -\frac{1}{16}$	$-\pi - 0,00263468$	$-\pi - 0,1768836$	$+\frac{\pi}{2} + 0,0329033$	$+ 0,2382776$	$-0,4308799?$
$-\frac{1}{8}$	$-0,0054522$	$-0,3312397$	$+ 0,0657572$	$+ 0,4683788$	$+ 0,0524032$
$-\frac{1}{4}$	$-0,0125896$	$-0,5296668$	$+ 0,1302368$	$+ 0,8106851$	$+ 0,4299068$
$-\frac{1}{2}$	$-0,0361004$	$-0,6569442$	$+ 0,2389211$	$+ 1,1894118$	$+ 0,7632403$
$-\frac{3}{4}$	$-0,0808588$	$-0,6874103$	$+ 0,2980064$	$+ 1,3404051$	$+ 0,9102059$
$-1$	$-0,1528052$	$-0,7288125$	$+ 0,3015205$	$+ 1,3825484$	$+ 0,9583333$
	$x = 0,75$	$x = 1$	$x = 1,25$	$x = 1,5$	
$y = \frac{1}{16}$	$-0,0467885$	$-0,0329033$	$-0,0146055$	$+ 0,00263468$	
$\frac{1}{8}$	$-0,1017618$	$-0,0657572$	$-0,0263773$	$+ 0,0054522$	
$\frac{1}{4}$	$-0,2302474$	$-0,1302368$	$-0,0507709$	$+ 0,0125896$	
$\frac{1}{2}$	$-0,4472007$	$-0,2389211$	$-0,0852669$	$+ 0,0361004$	
$\frac{3}{4}$	$-0,5639899$	$-0,2980064$	$-0,0890049$	$+ 0,0808588$	
$1$	$-0,5990176$	$-0,3015205$	$-0,0547183$	$+ 0,1528052$	

Nr. 10.  $\pi \cdot U(x, y)$  und  $\pi \cdot V(x, y)$ . [Formel (68).]

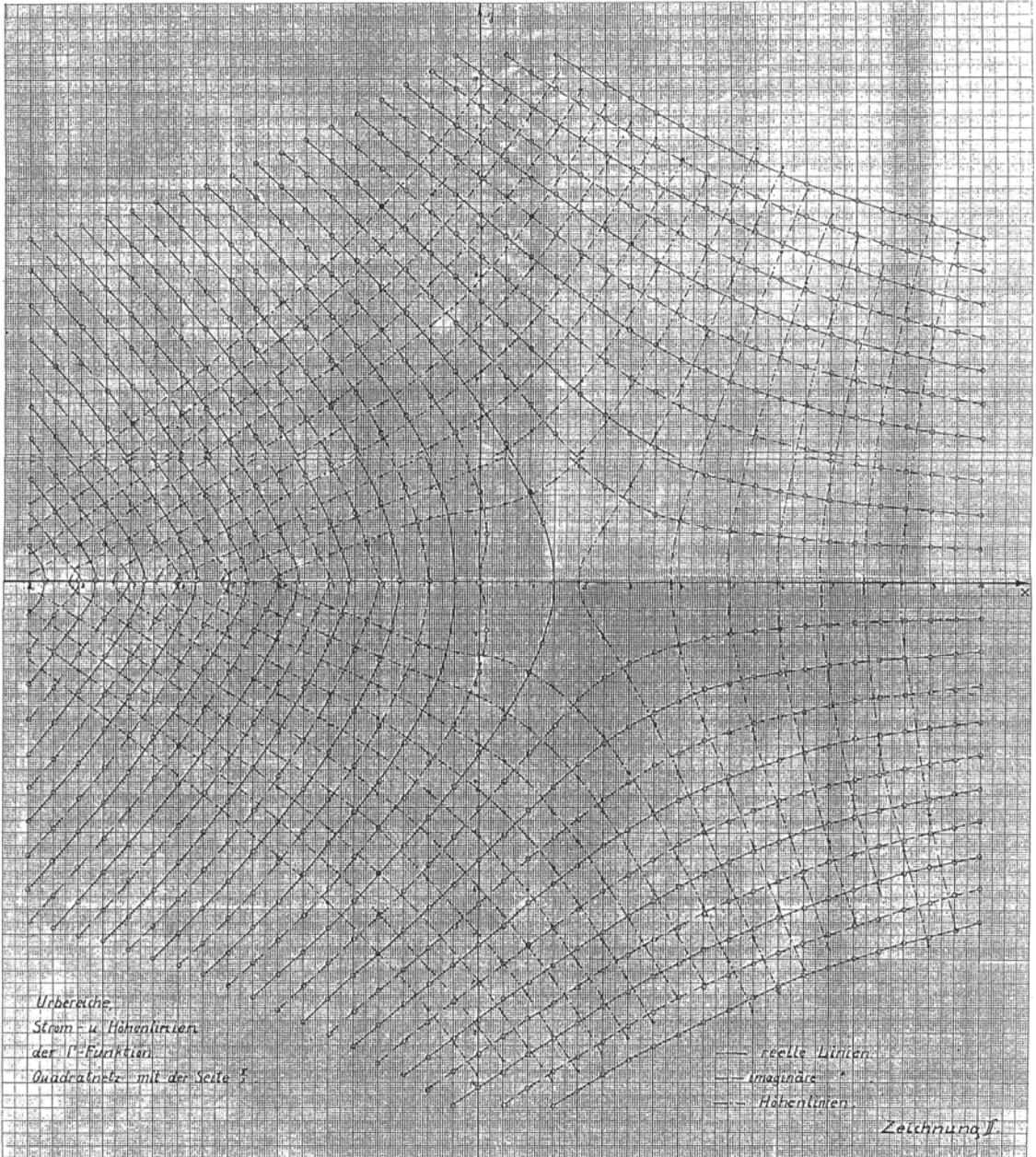
	$\xi=0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$y=\frac{1}{16}$	0,6090436	1,1739654	16,205090	1,1739654	0,6090436
$\frac{1}{8}$	1,1739655	0,6557942	8,407068	2,060238	1,1739655
$\frac{1}{4}$	2,060239	0,9171523	4,799517	2,881319	2,060239
$\frac{1}{2}$	2,881320	0,9962721	3,425378	3,129881	2,881320
$\frac{3}{4}$	3,085652	0,9998386	3,198548	3,141086	3,085652
1	3,129881	0,9999930	3,153348	3,141571	3,129881
$y=\frac{1}{16}$	0	2,914002	0	-2,914002	0
$\frac{1}{8}$	0	2,371713	0	-2,371713	0
$\frac{1}{4}$	0	1,252040	0	-1,252040	0
$\frac{1}{2}$	0	1,271015	0	-1,271015	0
$\frac{3}{4}$	0	0,05643913	0	-0,05643913	0
1	0	0,01173345	0	-0,01173345	0

Urbereiche d.  $\Gamma$ -Funktion. (Schematisch.)



Zeichnung I.

Ingeborg Ginzel. Die Abbildung durch die Gammafunktion.



Ingeborg Ginzler. Die Abbildung durch die Gammafunktion.

