ÜBER DIE INTEGRATION DER LINEAREN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN DURCH REIHEN.

Von

ALFRED KIENAST

in KÜSNACHT bei ZÜRICH.

Die Koeffizienten $P_i(x)$ der homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$P(y) = \sum_{i=0}^{n} P_i(x)\, x^i\, y^{(i)} = 0 \tag{1}$$

seien im Kreisring

$$R_1 < |x| < R_2 \tag{2}$$

reguläre Funktionen und $P_n(x)$ verschwinde in diesem Kreisring nicht. Dann gibt es[1] ein Fundamentalsystem $y_1, \ldots y_n$, dessen Lösungen darstellbar sind in der Form

$$y_i = x^{r_i}\{f_{0i}(x) + f_{1i}(x)\lg x + \cdots + f_{ki}(x)(\lg x)^k\}$$

$$i = 1, 2, \ldots n;$$

hierin bedeuten $f_{\lambda\mu}(x)$ Funktionen, die im Kreisring (2) eindeutig und regulär sind; sie lassen sich also, ebenso wie $P_i(x)[P_n(x)]^{-1}$ durch Laurentsche Reihen darstellen, die im Kreisring (2) konvergieren.

Die Aufgabe, diese Laurentschen Reihen f und die Exponenten r_i wirklich zu berechnen, ist von Helge von Koch[2] mit Hilfe der unendlichen Determinanten gelöst worden. Dabei ist es nötig vorauszusetzen

---

[1] FUCHS, Journal für die reine und angewandte Mathematik 66, 68.

[2] H. v. KOCH, Acta mathematica 15, 16, 18.

$$P_n(x) = 1; \quad P_{n-1}(x) = 0.$$

Hierdurch werden in dem besonders interessierenden Falle, dass alle $P_i(x)$ ganze rationale Funktionen von x sind, einfache Beziehungen verwischt.

Es scheint daher nicht ganz aussichtslos, zur Lösung der genannten Aufgabe noch einen anderen Weg zu suchen. In dem speziellen Falle dass $R_1 = 0$ und die Funktionen P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ in $x = 0$ nicht unendlich werden, hat Frobenius[3] ein zu dem genannten Ziele führendes, sehr vorteilhaftes Verfahren angegeben. Im vorliegenden Aufsatz werde ich dessen wesentliche Gedanken benutzen, soweit dies die vorliegenden Resultate über Differenzengleichungen gestatten, um das Problem in dem Falle zu lösen, in dem alle $P_i(x)$ Polynome sind. Hierbei stütze ich mich auf die Sätze über Differenzengleichungen, die Herr Perron[4], Herr Kreuser[5] und Herr Nörlund[6] bewiesen haben.

I.

Ich setze in der Differentialgleichung (1) für y

$$g(x, \varrho) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_\nu x^{\nu+\varrho} \tag{3}$$

ein und erhalte

$$P(g(x, \varrho)) = \sum g_\nu P(x^{\nu+\varrho}).$$

Nun ist

$$P(x^\varrho) = x^\varrho f(x, \varrho),$$

wenn

$$f(x, \varrho) = \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-n+1) P_n(x) + \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-n+2) P_{n-1}(x) + \cdots + P_0(x)$$

und folglich ist

$$P(g(x, \varrho)) = \sum g_\nu f(x, \varrho+\nu) x^{\nu+\varrho}.$$

Die $P_i(x)$ sind Polynome von höchstens m-tem Grade und daher ist auch

---

[3] FROBENIUS, Journal für die reine und angewandte Mathematik 76.
[4] O. PERRON, Acta mathematica 34.
[5] P. KREUSER, Inaugural-Dissertation, Tübingen 1914.
[6] N. E. NÖRLUND, Acta mathematica 40.

$$f(x,\varrho)=\sum_{0}^{m} f_\nu(\varrho)\,x^\nu$$

ein Polynom vom Grade m in x und vom Grade n in ϱ. Somit ist

$$P(g(x,\varrho))=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}[g_\nu f_0(\varrho+\nu)+g_{\nu-1}f_1(\varrho+\nu-1)+\cdots+g_{\nu-m}f_m(\varrho+\nu-m)]\,x^{\nu+\varrho}.$$

Soll die Reihe (3) die Differentialgleichung befriedigen, so müssen ihre Koeffizienten so bestimmt werden, dass die Rekursionsformeln

$$g_\nu f_0(\varrho+\nu)+g_{\nu-1}f_1(\varrho+\nu-1)+\cdots+g_{\nu-m}f_m(\varrho+\nu-m)=0 \tag{4}$$

$$\nu=\cdots-2,-1,0,1,2,\ldots$$

erfüllt sind. Unter diesen Gleichungen sehe ich zunächst von derjenigen für $\nu=\theta$ ab, wodurch die übrigen in zwei Gruppen zerfallen, diejenigen für $\nu>\theta$ und für $\nu<\theta$.

Durch Auflösung des Gleichungssystems, das man aus (4) erhält für $\nu=\theta+1$, $\theta+2,\ldots\nu$ kann man g_ν berechnen, ausgedrückt durch $g_{\theta-m+1},\ldots g_\theta$. Man findet

$$g_\nu=\frac{(-1)^{\nu-\theta-1}h_\nu(\varrho)}{f_0(\varrho+\theta+1)f_0(\varrho+\theta+2)\cdots f_0(\varrho+\nu)}\qquad(\nu=\theta+1,\theta+2,\ldots)$$

wobei

$$h_\nu(\varrho)=\begin{vmatrix} X_1 & f_0(\varrho+\theta+1) & 0 & 0 & . & . & 0\\ X_2 & f_1(\varrho+\theta+1) & f_0(\varrho+\theta+2) & 0 & . & . & 0\\ . & . & . & . & . & & .\\ 0 & f_m(\varrho+\theta+1) & f_{m-1}(\varrho+\theta+2) & . & f_0(\varrho+\theta+m+1) & \ldots & 0\\ . & . & . & . & . & \ldots & .\\ 0 & . & . & f_m(\varrho+\nu-m) & \ldots & & .\, f_1(\varrho+\nu-1)\end{vmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} X_1 &= g_{\theta-m+1}f_m(\varrho+\theta-m+1)+g_{\theta-m+2}f_{m-1}(\varrho+\theta-m+2)+\cdots+g_\theta f_1(\varrho+\theta)\\ X_2 &= \qquad\qquad g_{\theta-m+2}f_m(\varrho+\theta-m+2)+\cdots+g_\theta f_2(\varrho+\theta)\\ & \\ X_m &= \qquad\qquad g_\theta f_m(\varrho+\theta)\end{aligned}$$

h_ν ist daher eine ganze Funktion von ϱ.

Die Auflösung des Gleichungssystems, das sich aus (4) ergibt für $\nu = \theta - 1$, $\theta - 2, \ldots, m - \nu$ liefert $g_{-\nu}$ ausgedrückt durch $g_{\theta-1}, g_{\theta-2}, \ldots, g_{\theta-m}$; man findet

$$g_{-\nu} = \frac{(-1)^{\nu-m+\theta-1} k_\nu(\varrho)}{f_m(\varrho-m+\theta-1)\, f_m(\varrho-m+\theta-2) \cdots f_m(\varrho-\nu)} \qquad (\nu = m-\theta+1,\ m-\theta+2, \ldots)$$

wobei

$$k_\nu(\varrho) = \begin{vmatrix} 0 & . & . & . & 0 & f_m(\varrho-m+\theta-1) & Y_1 \\ 0 & . & . & . & f_m(\varrho-m+\theta-2) & f_{m-1}(\varrho-m+\theta-1) & Y_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & f_0(\varrho-m+\theta-1) & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ f_{m-1}(\varrho-\nu+1) & \cdot f_0(\varrho+m-\nu) \cdot & & & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

und

$$Y_1 = g_{\theta-m} f_{m-1}(\varrho+\theta-m) + \cdots + g_{\theta-2} f_1(\varrho+\theta-2) + g_{\theta-1} f_0(\varrho+\theta-1)$$

$$Y_2 = g_{\theta-m} f_{m-2}(\varrho+\theta-m) + \cdots + g_{\theta-2} f_0(\varrho+\theta-2)$$

$$\cdot$$

$$Y_m = g_{\theta-m} f_0(\varrho+\theta-m)$$

k_ν ist somit eine ganze Funktion von ϱ.

Im Ansatz (3) ist der Parameter ϱ enthalten, über den erst später verfügt wird. Es ist aber nicht nötig für ϱ andere Werte in Betracht zu ziehen, als solche, für die der reelle Teil von ϱ der Bedingung genügt

$$0 \leqq \Re(\varrho) < 1. \tag{5}$$

Die beiden Funktionen $f_0(\varrho)$ und $f_m(\varrho)$, die in den Nennern von g_ν und $g_{-\nu}$ auftreten, sind Polynome von ϱ, deren Grad höchstens n ist. Sie haben also je höchstens n Nullstellen: $f_0(\varrho)$ die Stellen ϱ_i, $f_m(\varrho)$ die Stellen σ_i. Zu jeder dieser Stellen gibt es im Streifen (5) eine kongruente Stelle: $\varrho_{i1} = \varrho_i + N_i$, $\sigma_{i1} = \sigma_i + M_i$, wo N_i und M_i ganze Zahlen bedeuten, die so beschaffen sind, dass

$$0 \leqq \Re(\varrho_{i1}) < 1, \quad 0 \leqq \Re(\sigma_{i1}) < 1.$$

Wenn man diese höchstens $2n$ Stellen ϱ_{i1}, σ_{i1} durch kleine Kreise ausschliesst und ϱ auf den hierdurch übrig bleibenden Teil des Streifens (5) beschränkt, der

T genannt werde, dann können die Nenner von g_ν und $g_{-\nu}$ für keinen Wert von ϱ aus T verschwinden.

Man kann aber das Verschwinden der Nenner von g_ν und $g_{-\nu}$ auch noch durch passende Verfügung über die willkürlichen Konstanten $g_{\theta-m}, g_{\theta-m+1}, \ldots g_\theta$ vermeiden. Setzt man

$$g_i = f_0(\varrho+N_1)\, f_0(\varrho+N_2) \cdots f_0(\varrho+N_n)\, f_m(\varrho+M_1) \cdots f_m(\varrho+M_m)\, C_i(\varrho)$$

$$i = \theta - m,\ \theta - m + 1, \ldots, \theta,$$

wo die $C_i(\varrho)$ willkürliche Funktionen von ϱ sind, so bleiben die Funktionen $g_\nu(\varrho)$, $g_{-\nu}(\varrho)$ für jeden beliebigen Wert ϱ des Streifens (5) endlich.

Die mit den Koeffizienten g_ν, $g_{-\nu}$ gebildete Reihe (3) enthält noch $m+1$ willkürliche Konstante. Wenn man diese so bestimmen kann, dass die Reihe konvergiert, dann ist $y = g(x, \varrho)$ ein Integral der Differentialgleichung

$$(6)\qquad P(y) = x^{\varrho+\theta}\{g_\theta f_0(\varrho+\theta) + g_{\theta-1} f_1(\varrho+\theta-1) + \cdots + g_{\theta-m} f_m(\varrho+\theta-m)\}.$$

Es kommt also zunächst darauf an die Konvergenz nachzuweisen.

II.

Die Koeffizienten $g_{\theta-m+\nu}\ (\nu = 1, 2, \ldots)$ sind dadurch charakterisiert, dass sie der Gleichung (4), d.h.

$$(7)\qquad g_{\nu+m} f_0(\varrho+\nu+m) + g_{\nu+m-1} f_1(\varrho+\nu+m-1) + \cdots + g_\nu f_m(\varrho+\nu) = 0$$

$$\nu = \theta - m + 1,\ \theta - m + 2, \ldots$$

genügen. Dies ist eine Differenzengleichung m-ter Ordnung. Irgend eine ihrer Lösungen ist durch ihre m Anfangswerte $g_{\theta-m+1}, g_{\theta-m+2}, \ldots g_\theta$ eindeutig bestimmt.

Ebenso sind die $g_{-\nu}\ (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ dadurch charakterisiert, dass sie (4) oder

$$g_{-\nu-m} f_m(\varrho-\nu-m) + g_{-\nu-m+1} f_{m-1}(\varrho-\nu-m+1) + \cdots + g_{-\nu} f_0(\varrho-\nu) = 0$$

$$\nu = -\theta+1,\ -\theta+2, \ldots 0, 1, 2, \ldots$$

genügen. Setzt man $g_{-\nu} = G_\nu$, so genügen diese Grössen der Differenzengleichung

$$(8)\qquad G_{\nu+m} f_m(\varrho-\nu-m) + G_{\nu+m-1} f_{m-1}(\varrho-\nu-m+1) + \cdots + G_\nu f_0(\varrho-\nu) = 0$$

und irgend eine ihrer Lösungen ist eindeutig bestimmt durch die Anfangswerte

$$g_{\theta-1} = G_{-\theta+1},\ g_{\theta-2} = G_{-\theta+2}, \ldots g_{\theta-m} = G_{-\theta+m}.$$

Um über die Konvergenz von (3) etwas aussagen zu können, muss man das Verhalten der Lösungen von (7) und (8) kennen für unendlich grosse Werte von ν. Hierüber geben die Untersuchungen von O. Perron[4] und P. Kreuser[5] vollständig Auskunft. Perron setzt voraus, dass der Koeffizient der Funktion mit dem höchsten Index in der Differenzengleichung den Wert 1 hat. Man muss also (7) durch $f_0(\varrho+\nu+m)$ und (8) durch $f_m(\varrho-\nu-m)$ dividieren können. Somit dürfen $f_0(\varrho+\nu+m)$ für $\nu = \theta - m + 1,\ \theta - m + 2, \ldots$ und $f_m(\varrho - \nu - m)$ für $\nu = -\theta + 1,\ -\theta + 2, \ldots$ nicht verschwinden. Perron setzt weiter voraus, dass der Koeffizient der Funktion mit dem niedrigsten Index nie verschwindet. Somit dürfen $f_m(\varrho+\nu)$ für $\nu = \theta - m + 1,\ \theta - m + 2, \ldots$ und $f_0(\varrho - \nu)$ für $\nu = -\theta + 1,\ -\theta + 2, \ldots$ nicht verschwinden.

Unter den hier gemachten Voraussetzungen sind die Bedingungen Perrons erfüllt, wenn man ϱ auf das vorhin angegebene Gebiet T beschränkt, was im folgenden vorausgesetzt werde.

Wenn die Koeffizienten in (1) bezeichnet sind durch

$$P_i(x) = c_{i0} + c_{i1}x + \cdots + c_{im}x^m,$$

so erhält man

$$f_i(\varrho) = \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+1)c_{ni} + \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+2)c_{n-1,i} + \cdots + c_{0i}.$$

Der Grad des Polynoms $f_i(\varrho)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots m)$ sei $h(i) \leqq n$. Dann ist $c_{ni} = c_{n-1,i} = \cdots = c_{h(i)+1,i} = 0$, $c_{h(i),i} \neq 0$ und

$$\lim_{\nu\to\infty} f_i(\nu)\,\nu^{-h(i)} = c_{h(i),i}.$$

Wenn mit Kreuser, in Anlehnung an Perron, jede für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ definierte Funktion f, für die

$$\lim_{\nu\to\infty} f\nu^{-k} = 1,$$

bezeichnet wird durch $[\nu^k]$, dann ist

$$f_i(\nu) = c_{h(i),i}\,[\nu^{h(i)}]. \tag{9}$$

Nun erfüllen die beiden Differenzengleichungen

$$(7) \qquad g_{\nu+m} + g_{\nu+m-1} \frac{f_1(\varrho+\nu+m-1)}{f_0(\varrho+\nu+m)} + \cdots + g_\nu \frac{f_m(\varrho+\nu)}{f_0(\varrho+\nu+m)} = 0$$

$$(8) \qquad G_{\nu+m} + G_{\nu+m-1} \frac{f_{m-1}(\varrho-\nu-m+1)}{f_m(\varrho-\nu-m)} + \cdots + G_\nu \frac{f_0(\varrho-\nu)}{f_m(\varrho-\nu-m)} = 0$$

die Voraussetzungen von Perron und Kreuser. Denn wenn

$$(10) \qquad D_{\nu+m} + D_{\nu+m-1}\, a_1^{(\nu)} + \cdots + D_\nu\, a_m^{(\nu)} = 0$$

die Differenzengleichung ist, so setzt Perron voraus

$$(11) \qquad a_i^{(\nu)} = a_i \left| [\nu^{k(i)}] \right|,$$

wo die a_i von null verschiedene Konstante sind, während Kreuser, zur Vervollständigung der Perronschen Resultate, voraussetzt

$$(12) \qquad a_i^{(\nu)} = a_i\, [\nu^{k(i)}].$$

In den hier vorliegenden Gleichungen (7) und (8) ist (12) und damit (11) erfüllt; denn

$$\frac{f_i(\varrho+\nu+m-i)}{f_0(\varrho+\nu+m)} = \frac{c_{h(i),i}}{c_{h(0),0}} [\nu^{h(i)-h(0)}]$$

$$\frac{f_{m-i}(\varrho-\nu-m+i)}{f_m(\varrho-\nu-m)} = \frac{c_{h(m-i),m-i}}{c_{h(m),m}} [\nu^{h(m-i)-h(m)}].$$

Wenn $f_i(\varrho) \equiv 0$, was nach Voraussetzung nur eintreten kann, wenn i von 0 und m verschieden ist, dann ist $c_{0i} = \cdots = c_{n,i} = 0$. In diesem Falle haben die beiden Quotienten $f_i f_0^{-1}$ und $f_i f_m^{-1}$ für alle ν den Wert Null und können durch das Symbol $[\nu^{-\infty}]$, multipliziert mit einem beliebigen, von Null verschiedenen, Zahlenfaktor, dargestellt werden.

Die Exponenten $k(i)$ in (11) und (12) (k_i bei Perron und Kreuser) sind somit für die Differenzengleichung (7)

$$(13) \qquad k(0) = 0,\ k(i) = h(i) - h(0) \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

und für die Differenzengleichung (8)

$$(14) \qquad k(0) = 0,\ k(i) = h(m-i) - h(m) \qquad (i = 1, 2, \ldots m),$$

Unter diesen ist $k(m) = \pm (h(m) - h(0))$ sicher von $-\infty$ verschieden, da f_0 und f_m nach Voraussetzung von Null verschieden sind. Dagegen ist es möglich, dass man für einen der anderen Exponenten $k(i)$ das Zeichen $-\infty$ zu setzen hat.

Um die Sätze von Perron und Kreuser aussprechen zu können, werden die Punkte $P_0, P_1, \ldots P_m$ mit den Koordinaten

$$X = i, \quad Y = k(i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

mit einem nach der positiven Y-Axe konvexen Newton-Puiseuxschen Polygon umspannt. Dieses ist bestimmt durch die Forderung, dass jede Ecke einer der Punkte P_i ist, während die übrigen dieser Punkte nicht auf der konvexen Seite liegen dürfen.

Die Ecken dieses Polygons werden bezeichnet durch

$$P_{e_0} = P_0, \; P_{e_1}, \ldots, P_{e_\sigma} = P_m,$$

deren Abszissen $e_0 = 0, e_1, \ldots, e_\sigma = m$ sind.

Wenn q_λ die trigonometrische Tangente des Winkels ist, den die λ-te Polygonseite mit der positiven X-Axe bildet, so ist

$$q_\lambda = \frac{k(e_\lambda) - k(e_{\lambda-1})}{e_\lambda - e_{\lambda-1}}.$$

Hierdurch sind die σ Grössen

$$q_1 > q_2 > \cdots > q_\sigma$$

definiert; $e_\lambda - e_{\lambda-1}$ ist die Abszissendifferenz der Endpunkte der λ-ten Polygonseite. Unter Verwendung dieser Bezeichnungen gilt der Perronsche

Satz[7]: Die Differenzengleichung besitzt ein Fundamentalsystem von Lösungen, die derart in σ Klassen zerfallen, dass die Lösungen der λ-ten Klasse und ihre linearen Verbindungen den Ungleichungen genügen

$$|g_\nu| < C^\nu (\nu!)^{q_\lambda} \text{ für alle hinreichend grossen } \nu,$$

$$|g_\nu| > c^\nu (\nu!)^{q_\lambda} \text{ für unbegrenzt viele } \nu.$$

C und c sind von ν unabhängige Konstanten. Die Anzahl der Integrale der λ-ten Klasse ist $e_\lambda - e_{\lambda-1}$; man sagt, sie seien von der Ordnung q_λ.

---

[7] O. Perron, Acta mathematica 34 S. 135.

Man hat also, ausgehend von den speziellen Werten (13) der $k(i)$ das Polygon zu bilden, das zur Differenzengleichung (7) gehört. Das Polygon besitze eine horizontale Seite; es sei die τ-te; dann ist $q_\tau = 0$. Alle $q_\lambda, \lambda = 1, 2, \ldots, \tau - 1$, sind positiv; die q_λ für $\lambda = \tau + 1, \ldots, \sigma$ sind negativ. Die Anzahl der Lösungen der Differenzengleichung, die positiven q_λ korrespondieren, sei p; diejenige, die negativen q_λ entsprechen, sei r und zu $q_\tau = 0$ gehören $e_\tau - e_{\tau-1} = s$ Lösungen. Dann ist

$$p + r + s = m.$$

Nun betrachte ich das Polygon, das zur Differenzengleichung (8) gehört. Die Ordinaten seiner Ecken ergeben sich aus den Exponenten (14). Diese schreibe ich folgendermassen:

$$k(0) = h(m) - h(0) - (h(m) - h(0)), \ldots k(i) = h(m-i) - h(0) - (h(m) - h(0)) \ldots$$
$$\ldots k(m) = -(h(m) - h(0)).$$

Man ersieht leicht, dass diese Reihe von Zahlen aus der Reihe (13) erhalten wird, indem man die Reihe (13) von rechts nach links durchläuft und von jeder Zahl die feste Zahl $h(m) - h(0)$ subtrahiert. Zu (14) gehört also ein Polygon, das aus demjenigen der Exponentenfolge (13) erhalten wird, indem man in Bezug auf die Y-Axe zum Spiegelbild übergeht und dieses dann noch verschiebt, bis sein linker Anfangspunkt im Punkte $X = 0$, $Y = 0$ sich befindet.

Hieraus folgt, dass die aus der Reihe (14) sich ergebenden Zahlen q_λ dieselben sind, die aus der Reihe (13) folgen, in umgekehrter Reihenfolge und multipliziert mit -1. Somit gehören r Lösungen der Differenzengleichung (8) zu positiven Exponenten q_λ; p ihrer Lösungen gehören zu negativen Exponenten q_λ und s ihrer Lösungen gehören zu $q_\tau = 0$.

Jede Lösung der Differenzengleichung (7), die zu einem negativen Exponenten q gehört, liefert eine Reihe $\sum\limits_{\theta+1}^{\infty} g_\nu x^\nu$, die für jedes endliche x konvergiert. Ebenso liefert jede Lösung von (8), die zu einem positiven Exponenten q gehört, eine Reihe $\sum\limits_{-\theta+1}^{\infty} g_{-\nu} x^{-\nu}$, die für jedes $x \neq 0$ konvergiert.

Die s Lösungen jeder der Differenzengleichungen, die zu $q_\tau = 0$ gehören, liefern Potenzreihen, die innerhalb, bezw. ausserhalb, ihrer Konvergenzkreise konvergieren. Ihr Verhalten für unendlich wachsendes ν ergibt sich aus einem Satz von Kreuser (Satz VI).

Darnach zeigen die $e_\lambda - e_{\lambda-1}$ Lösungen der λ-ten Klasse dasselbe Verhalten für jedes $\lambda = 1, 2, \ldots, \sigma$. Hier interessiert uns speziell die Klasse $\lambda = \tau$ und ich werde die Eigenschaften daher aussprechen für die $e_\tau - e_{\tau-1} = s$ Lösungen, die der τ-ten Seite des Polygons korrespondieren. Zu diesen gehört die charakteristische Gleichung

$$b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \cdots + b_s = 0. \tag{15}$$

Wenn man die Differenzengleichung, geschrieben in der Form (10), zu grunde legt, mit der Bestimmung (12), dann ist

$$\begin{array}{ll} b_i = a_{e_{\tau-1}+i} & \text{falls der Punkt} \\ 0 & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \\ e_{\tau-1}+i,\, k(e_{\tau-1}+i) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{auf der } \tau\text{-ten Seite} \\ \text{nicht auf der } \tau\text{-ten Seite} \end{array} \right.$$

des zu (10) gehörenden Polygons liegt.

Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\omega$ die von einander verschiedenen und der Grösse nach geordneten absoluten Beträge der Nullstellen der charakteristischen Gleichung (15). m_γ sei die Anzahl der ihrer Vielfachheit entsprechend gezählten Wurzeln vom absoluten Betrag α_γ; dann ist

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_\omega = e_\tau - e_{\tau-1} = s.$$

Dann lautet das Ergebniss von Kreuser:

Satz: Jede der im Satze von Perron genannten Klassen zerfällt in ω Unterklassen in der Weise, dass den m_γ Wurzeln der charakteristischen Gleichung, die den absoluten Betrag α_γ haben, m_γ Lösungen des Fundamentalsystems entsprechen mit der Eigenschaft, dass für sie und ihre linearen Verbindungen die Beziehung gilt

$$\limsup_{\nu \to \infty} \frac{\sqrt[\nu]{|g_\nu|}}{(\nu!)^{\frac{q_\tau}{\nu}}} = \alpha_\gamma \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots \omega)$$

Da im vorliegenden Falle q_τ den Wert Null hat, so gilt für die der horizontalen Seite des Polygons zugeordneten Lösungen des Fundamentalsystems

$$\limsup_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|g_\nu|} = \alpha_\gamma.$$

Ich bestimme jetzt die zu $q_\tau = 0$ gehörenden charakteristischen Gleichungen von (7) und (8). Die b_i sind von der Form

$$c_{h(i),\,i}\left[c_{h(0),\,0}\right]^{-1}.$$

Da der Exponent $h(i)-h(0)$ die Ordinate des Punktes P_i ergibt, da diese den grösst möglichen Wert haben muss, weil P_i auf der horizontalen Seite des Polygons sich befinden soll, und da dieser grösste Wert $h(i)=n$ ist, so lautet die zur horizontalen Seite des Polygons von (7) gehörende charakteristische Gleichung

$$c_{n,\,\beta}\,x^s + c_{n,\,\beta+1}\,x^{s-1} + \cdots + c_{n,\,\beta+s} = 0, \qquad \beta \geqq 0. \tag{16}$$

Hierin haben alle diejenigen $c_{n,\,i}$ den Wert Null, für die der zugehörige Punkt nicht auf der horizontalen Seite des Polygons liegt und die Gleichung beginnt mit $c_{n,\,0}\,x^s$, wenn $c_{n,\,0} \neq 0$. In diesem Spezialfall sind alle Exponenten (13) negativ, mit Ausnahme von $k(0)=0$. Dann beginnt das Polygon mit einer horizontalen Seite.

Analog erhält man als charakteristische Gleichung, die zur horizontalen Seite des Polygons von (8) gehört,

$$c_{n,\,m-\beta}\,x^s + c_{n,\,m-\beta-1}\,x^{s-1} + \cdots + c_{n,\,m-\beta-s} = 0. \tag{17}$$

Diese Gleichung beginnt mit $c_{n,\,m}\,x^s$, wenn $c_{n,\,m} \neq 0$.

Wenn $c_{n,\,\beta}\,x^s$ das wirkliche Anfangsglied von (16) ist, dann ist

$$c_{n,\,0} = c_{n,\,1} = \cdots = c_{n,\,\beta-1} = 0;$$

dann kann man aber auch

$$c_{n,\,0}\,x^{s+\beta} + c_{n,\,1}\,x^{s+\beta-1} + \cdots + c_{n,\,\beta-1}\,x^{s+1}$$

in (16) zufügen ohne die Gleichung zu ändern.

Wenn $c_{n,\,\beta+s}$ das wirkliche Schlussglied ist, dann ist

$$c_{n,\,\beta+s+1} = \cdots = c_{n,\,m} = 0;$$

daher kann man (16) mit $x^{m-\beta-s}$ multiplizieren und

$$c_{n,\,\beta+s+1}\,x^{m-\beta-s-1} + \cdots + c_{n,\,m}$$

hinzufügen. Dadurch wird den Wurzeln von (16) nur die $(m-\beta-s)$-fache Wurzel null hinzugefügt. Ebenso kann man mit (17) verfahren und man ersieht leicht dass (16), abgesehen von einer Potenz von x, übereinstimmt mit

$$x^m\,P_n(x^{-1}) = 0 \tag{18}$$

und (17) mit

$$P_n(x) = 0. \tag{19}$$

Die s Wurzeln der charakteristischen Gleichung, die zu $q_\tau = 0$ für (7) gehört, sind demnach die von Null verschiedenen Wurzeln von (18) und die zu $q_\tau = 0$ für (8) gehörenden sind die von Null verschiedenen Wurzeln von (19).

Bezeichnen jetzt $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\omega$ die von einander verschiedenen absoluten Beträge der von Null verschiedenen Nullstellen von $P_n(x) = 0$ und ist m_γ die Anzahl der ihrer Vielfachheit entsprechend gezählten Wurzeln vom absoluten Betrage α_γ, so ist

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_\omega = s.$$

Weiter sind

$$\alpha_\omega^{-1}, \alpha_{\omega-1}^{-1}, \ldots, \alpha_1^{-1}$$

die der Grösse nach geordneten, von einander verschiedenen, absoluten Beträge der von Null verschiedenen Nullstellen von $x^m P_n(x^{-1})$.

Ich fasse jetzt eine Wurzel von (18), deren absoluter Betrag α_i^{-1} ist, ins Auge. Die Differenzengleichung (7) besitzt nach dem vorangehenden

$$m_\omega + m_{\omega-1} + \cdots + m_i = t$$

Lösungen eines Fundamentalsystems, für die

$$\limsup_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|g_\nu|} \leqq \alpha_i^{-1}.$$

Diesen t Lösungen entsprechen t Reihen

$$\sum_{\theta+1}^{\infty} g_\nu x^\nu, \tag{20}$$

deren Konvergenzradius mindestens α_i ist. Ausserdem haben, wie oben angegeben, r Lösungen des Fundamentalsystems eine negative Ordnung (Satz von Perron) und somit lässt sich durch lineare Verbindung aus diesen $r + t$ Reihen eine Reihe (20) bilden, worin in den g_ν $r + t$ willkürliche Konstante auftreten

Jetzt betrachte ich eine Wurzel von (18), deren absoluter Betrag α_{i-1}^{-1} ist dann ist α_{i-1} absoluter Betrag einer Wurzel von (19). Die Differenzengleichung (8) besitzt

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_{i-1} = s - t$$

Lösungen eines Fundamentalsystems, für die

$$\lim_{\nu \to \infty} \sup \sqrt[\nu]{|g_{-\nu}|} \leqq \alpha_{i-1}.$$

Diesen $s - t$ Lösungen entsprechen ebensoviele Reihen

$$\sum_{-\theta+1}^{+\infty} g_{-\nu} x^{-\nu}, \tag{21}$$

die mindestens ausserhalb des Kreises mit Radius α_{i-1} konvergieren. Ausserdem haben p Lösungen des Fundamentalsystems eine positive Ordnung und ergeben daher Reihen (21), die für jedes $x \neq 0$ konvergieren. Indem man die lineare Verbindung dieser $p + s - t$ Reihen bildet, erhält man eine Reihe (21), worin die $g_{-\nu}$ $p + s - t$ willkürliche Konstante enthalten.

Die beiden Reihen (20), (21) greifen übereinander; die Koeffizienten $g_{\theta-m+1}, \ldots, g_{\theta-1}$ müssen in beiden dieselben Werte haben, wenn (20) und (21) zusammen genommen eine Reihe (3) bilden sollen. Setzt man daher die Ausdrücke, die man in beiden Fällen für die g erhält, einander gleich, so sind dies $m - 1$ Gleichungen zur Berechnung der festgestellten

$$(r + t) + (p + s - t) = m$$

willkürlichen Konstanten. Diese können somit, abgesehen von einem gemeinsamen Faktor, berechnet werden und damit ist dann eine Reihe (3) gewonnen, die im Kreisring

$$\alpha_{i-1} < |x| < \alpha_i$$

konvergiert und eine Lösung von (6) darstellt, deren rechte Seite jetzt bis auf denselben Faktor bestimmt ist.

III.

Der nächste Schritt besteht darin, die soeben skizzierte Bestimmung der Koeffizienten $g_{\theta-m+1}, \ldots g_{\theta-1}$ durchzuführen.

Die in den Sätzen von Perron und Kreuser festgestellten Lösungen der Differenzengleichung bilden ein Fundamentalsystem. Dieses sei für (7)

$$H_i(\varrho + \nu) \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

und für $i = 1, 2, \ldots r + t$ seien dies diejenigen Funktionen, die auf die soeben beschriebene Weise zu Reihen (20) führen, deren Konvergenzradius α_i oder grösser ist.

Das analoge Fundamentalsystem für (8) sei

$$K_i(\nu - \varrho) \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

und unter diesen Funktionen seien die für $i = 1, 2, \ldots (p + s - t)$ diejenigen, die zu Reihen (21) führen, die ausserhalb eines Kreises konvergieren, dessen Radius α_{i-1} oder kleiner als α_{i-1} ist.

Perron hat in den Lösungen dieser Fundamentalsysteme ν auf die Folge ganzzahliger Werte $1, 2, 3, \ldots$ beschränkt. Da jede Lösung durch ihre m Anfangswerte eindeutig bestimmt ist, ist es leicht, die H und K als analytische Funktionen von $\nu + \varrho$ auszudrücken, in den Fällen, in denen man für die Differenzengleichung ein Fundamentalsystem, bestehend aus analytischen Funktionen, angeben kann.

Ich setze daher voraus, die Funktionen $H_i(\nu + \varrho)$ und $K_i(\nu - \varrho)$ seien als analytische Funktionen von ν bekannt. Dann lassen sich die Koeffizienten der Reihen (20) und (21) linear durch sie ausdrücken

$$(22) \qquad \begin{aligned} g_\nu &= \sum_{i=1}^{r+t} A_i H_i(\varrho + \nu) && (\nu = \theta - m + 1,\ \theta - m + 2, \ldots) \\ g_{-\nu} &= \sum_{i=1}^{p+s-t} B_i K_i(\nu - \varrho) && (\nu = -\theta + 1,\ -\theta + 2, \ldots). \end{aligned}$$

Da man ferner (8) aus (7) erhalten hat, indem man $-\nu$ für ν substituierte, so sind die $H_i(\varrho + \nu)$ und $K_i(-\nu - \varrho)$ Fundamentalsysteme derselben Differenzengleichung und müssen sich daher linear durch einander ausdrücken lassen. Es sei

$$(23) \qquad K_i(-\nu - \varrho) = \sum_{\lambda=1}^{m} \mathfrak{C}_{i\lambda} H_\lambda(\nu + \varrho) \qquad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Die beiden Darstellungsarten (22) müssen dieselben Koeffizienten $g_{\theta-m+1}\dots g_{\theta-1}$ ergeben, woraus die $(m-1)$ Gleichungen folgen

$$\sum A_i H_i(\varrho+\lambda) - \sum B_i K_i(-\lambda-\varrho) = 0 \tag{24}$$

$$\lambda = \theta-m+1,\ \theta-m+2, \dots \theta-1,$$

für die m Unbekannten $A_i (i=1, 2, \dots r+t)$, $B_i (i=1, 2, \dots p+s-t)$.

Bezeichnet man die Unterdeterminanten der Elemente der ersten Zeile der Determinante

$$\Delta(\varrho+\theta) = \begin{vmatrix} H_1(\varrho+\theta-m)\cdots H_{r+t}(\varrho+\theta-m) & K_1(m-\theta-\varrho)\cdots K_{p+s-t}(m-\theta-\varrho) \\ \dots\dots & \dots\dots \\ H_1(\varrho+\theta-1)\cdots H_{r+t}(\varrho+\theta-1) & K_1(1-\theta-\varrho)\cdots K_{p+s-t}(1-\theta-\varrho) \end{vmatrix}$$

mit Δ_λ $(\lambda=1, 2, \dots m)$, so erhält man aus (24)

$$A_i = C\Delta_i \qquad (i=1, 2, \dots r+t)$$

$$-B_i = C\Delta_{r+t+i} \quad (i=1, 2, \dots p+s-t)$$

wobei C als willkürliche Funktion von ϱ anzusetzen ist. Diese Werte in (22) eingetragen, ergeben die Anfangswerte $g_{\theta-m}\dots g_\theta$.

Die Reihe (3), die im Kreisring $\alpha_{i-1} < |x| < \alpha_i$ konvergiert, ist damit vollständig bestimmt.

Man kann jetzt auch die rechte Seite in (6) berechnen; es ist

$$\Phi(\varrho) = g_\theta f_0(\varrho+\theta) + g_{\theta-1} f_1(\varrho+\theta-1) + \cdots + g_{\theta-m} f_m(\varrho+\theta-m)$$

$$= f_m(\varrho+\theta-m)\left\{ g_{\theta-m} - \sum_1^{r+t} A_i H_i(\varrho+\theta-m)\right\};$$

denn die Differenzengleichung (7) ist auch erfüllt für $\nu=\theta-m$, wenn man für g_ν den in (22) angegebenen Ausdruck benutzt. Weiter lässt sich $g_{\theta-m}$ durch die zweite der Formeln (22) ausdrücken; dies gibt

$$\Phi(\varrho) = -f_m(\varrho+\theta-m)\left\{\sum_1^{r+t} A_i H_i(\varrho+\theta-m) - \sum_1^{p+s-t} B_i K_i(m-\theta-\varrho)\right\}$$

$$= -Cf_m(\varrho+\theta-m)\left\{\sum \Delta_i H_i(\varrho+\theta-m) + \sum \Delta_{i+r+t} K_i(m-\theta-\varrho)\right\}$$

$$= -Cf_m(\varrho+\theta-m)\Delta(\varrho+\theta)$$

und es bleibt übrig, die Determinante $\varDelta$ zu berechnen.

Berücksichtigt man (23), so erhält man

$$\varDelta(\varrho+\theta) = |H_i(\varrho+\theta-m-1+\lambda)| \begin{vmatrix} 1 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 & & & \\ . & . & . & . & & & \\ 0 & . & . & 1 & 0 & . & 0 \\ \mathfrak{C}_{11} & . & . & \mathfrak{C}_{1,v} & \mathfrak{C}_{1,v+1} & . & \mathfrak{C}_{1,m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \mathfrak{C}_{w,1} & . & . & \mathfrak{C}_{w,v} & \mathfrak{C}_{w,v+1} & . & \mathfrak{C}_{w,n} \end{vmatrix}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m; \ \lambda = 1, 2, \ldots, m,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird $r+t=v$, $p+s-t=w$. Ferner sei

$$\mathfrak{C} = |\mathfrak{C}_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots w; \ \beta = v+1, \ v+2, \ldots, m).$$

$D(\varrho+\theta) = |H_i(\varrho+\theta-m-1+\lambda)|\,(i, \lambda = 1, 2, \ldots, m)$ ist die Determinante des Fundamentalsystems der H_i; somit ist D für jeden zu den singulären Stellen der Differenzengleichung (7) inkongruenten Wert ϱ von Null verschieden. Diese singulären Stellen bestehen unter den hier gemachten Voraussetzungen aus den Nullstellen ϱ_i von $f_0(\varrho)$ und σ_i von $f_m(\varrho)$.

Verfügt man über die Bezeichnung in (7) so, dass

$$f_0(\varrho) = (\varrho-\varrho_1)(\varrho-\varrho_2)\ldots(\varrho-\varrho_n)$$

$$f_m(\varrho) = d(\varrho-\sigma_1)(\varrho-\sigma_2)\ldots(\varrho-\sigma_n),$$

so ergibt sich leicht, dass $D(\varrho+\theta)$ einer Differenzengleichung 1-ter Ordnung genügt, aus der, $(-1)^m d = e$ gesetzt, folgt

$$D(\varrho+\theta) = \frac{\Pi(\varrho+\theta-m-\sigma_1-1)\cdots\Pi(\varrho+\theta-m-\sigma_n-1)}{\Pi(\varrho+\theta-\varrho_1-1)\cdots\Pi(\varrho+\theta-\varrho_n-1)}\, e^\varrho \varDelta(\varrho),$$

wo $\varDelta(\varrho)$ eine periodische Funktion von ϱ ist mit der Periode 1. Π ist das Gausssche Zeichen für die Gammafunktion. Somit ist

$$\Phi(\varrho) = -\,C\,d\,e^\varrho \frac{\Pi(\varrho+\theta-m-\sigma_1)\cdots\Pi(\varrho+\theta-m-\sigma_n)}{\Pi(\varrho+\theta-\varrho_1-1)\cdots\Pi(\varrho+\theta-\varrho_n-1)}\, \varDelta(\varrho)\,\mathfrak{C}.$$

$\mathit{\Delta}(\varrho)$ und $\mathfrak{C}$ sind durch die besonderen Fundamentalsysteme H_i und K_i gegeben. Sie sind bisher, meines Wissens, nur ermittelt worden von Nörlund[6] für eine »normale» Differenzengleichung (7) in der $f_m(\varrho+\nu)$ und $f_0(\varrho+\nu+m)$ Polynome des Grades n der beigefügten Argumente sind, während der Grad von $f_1 \ldots f_{m-1}$ nicht höher als n ist.

Ich habe nicht die Absicht, hier $\mathit{\Delta}(\varrho)$ und $\mathfrak{C}$ noch für andere Klassen von Differenzengleichungen zu bestimmen und nehme daher jetzt an, dass für (7) die Nörlundsche Voraussetzung erfüllt ist.

Dann ist die charakteristische Gleichung (15) resp. (16), nämlich

$$x^m P_n(x^{-1}) = (x-a_1)\cdots(x-a_m), \tag{25}$$

vom Grade m und hat m von Null verschiedene Wurzeln. Nörlund definiert in § 11 zwei Fundamentalsysteme

$$u_i(\nu) \text{ und } \bar{u}_i(\nu) \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

und weist für die u, für $\nu \to +\infty$, das Verhalten nach, das Perron-Kreuser für das oben durch $H_i(\nu)$ bezeichnete System angegeben haben, während er für die $\bar{u}$ findet, dass sie sich für $\nu \to -\infty$ verhalten, wie das oben durch $K_i(\nu)$ bezeichnete System.

Nörlund ermittelt in § 19 $\mathit{\Delta}(\varrho)$ unter zwei Voraussetzungen; erstens wenn die charakteristische Gleichung (25) lauter von einander verschiedene Nullstellen besitzt, und zweitens, wenn

$$x^m P_n(x^{-1}) = (1-x)^m.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist $\mathit{\Delta}(\varrho)$ eine von ϱ und θ unabhängige Konstante.

Die Koeffizienten $\mathfrak{C}_{ik}$ der Relationen (23) und folglich auch $\mathfrak{C}$ sind periodische Funktionen von ϱ mit der Periode 1. Nörlund zeigt, dass sie rationale Funktionen von $e^{2\pi i(\varrho-\varrho_\lambda)}$, $\lambda = 1, 2, \ldots n$ sind und dass sie so viele mod. 1 inkongruente Pole haben, jeder in seiner Vielfachheit gezählt, als $f_0(\varrho)$ Nullstellen besitzt. Ihre Anzahl ist somit n.

Setzt man

$$e^{2\pi i\varrho} = \omega, \qquad e^{2\pi i\varrho_k} = \theta_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

so geht die eindeutige Funktion $\mathfrak{C}(\varrho)$ von ϱ über in eine eindeutige Funktion von ω; sie ist im endlichen, ausser in den Polen $\theta_1, \ldots \theta_n$, überall regulär.

Es sei $\varrho = u + iv$ und

$$\lim_{v \to +\infty} \mathfrak{C} = \gamma_1, \qquad \lim_{v = -\infty} \mathfrak{C} = \gamma_2:$$

γ_1 und γ_2 sind völlig bestimmt und Nörlund zeigt, dass

$$\lim_{v = \pm\infty} \mathfrak{C}_{ik} = 0, \qquad i \gtrless k$$

$$\lim_{v \to -\infty} \mathfrak{C}_{ii} = 1, \qquad \lim_{v \to +\infty} \mathfrak{C}_{ii} = \delta_i \neq 0.$$

Hieraus folgt $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 \neq 0$ und $\neq \infty$. Daher ist $\mathfrak{C}$ eine rationale Funktion von ω, die für $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ die endlichen Werte 1 und γ_2 annimmt; somit ist

$$\mathfrak{C} = \gamma_2 \frac{(\omega - \omega_1) \cdots (\omega - \omega_n)}{(\omega - \theta_1) \cdots (\omega - \theta_n)},$$

wobei

$$\gamma_2 \prod_{k=1}^{n} \omega_k = \prod_{k=1}^{n} \theta_k.$$

Setzt man

$$\omega_k = e^{2\pi i r_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad \gamma_2 = e^{-2\pi i \psi},$$

wodurch r_k, ψ nur bis auf ganze Zahlen bestimmt sind, so ist

$$\exp\{2\pi i (r_1 + \cdots + r_n - \psi)\} = \exp\{2\pi i (\varrho_1 + \cdots + \varrho_n)\}$$

oder bei passender Wahl der r_k, ψ

$$\sum_{k=1}^{n} r_k = \psi + \sum_{k=1}^{n} \varrho_k. \tag{26}$$

Da

$$\frac{\omega - \omega_k}{\omega - \theta_k} = e^{\pi i (r_k - \varrho_k)} \frac{\sin \pi(\varrho - r_k)}{\sin \pi(\varrho - \varrho_k)},$$

so folgt unter Berücksichtigung von (26) die Darstellung

$$\mathfrak{C}(\varrho)=\frac{1}{\sqrt{\gamma_2}}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\,\pi(\varrho-r_k)}{\sin\,\pi(\varrho-\varrho_k)},$$

aus der die Nullstellen ersichtlich sind. Für $\mathfrak{C}$ gibt es also als Funktion von ω ein Partialbruchzerlegung und eine Darstellung durch eine Summe von $\operatorname{ctg}\pi(\varrho-\varrho_k)$, wie dies H. v. Koch[8] für die analoge Grösse Ω ausgeführt hat.

Verfügt man schliesslich über die willkürliche Funktion $C(\varrho)$ dadurch, dass man setzt

$$C(\varrho)=[\Pi(\varrho+\theta-m-\sigma_1)\cdots\Pi(\varrho+\theta-m-\sigma_n)\;\Pi(\varrho_1-\varrho-\theta)\cdots\Pi(\varrho_n-\varrho-\theta)]^{-1},$$

so folgt

$$\Phi(\varrho)=B\,e^{\varrho}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\,\pi(\varrho-r_k)}{\pi}$$

wo B eine von ϱ unabhängige Konstante ist.

Damit ist unter gewissen Voraussetzungen die rechte Seite von (6) ermittelt.

Nachdem im § 2 die Konvergenz der Reihe (3) nachgewiesen wurde, ersieht man hier, dass man aus der Reihe (3) eine Lösung der Differentialgleichung (1) erhält, wenn man für die bisher unbestimmt gelassene Grösse ϱ eine der n Nullstellen r_k von $\mathfrak{C}$ einsetzt.

Besitzt $\mathfrak{C}(\varrho)$ n mod. 1 inkongruente Nullstellen r_k, so erhält man zu jeder eine Lösung der Differentialgleichung (1)

$$y_k=g(x,r_k) \qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

und diese bilden das Fuchssche Fundamentalsystem.

Man kann schliesslich annehmen, dass $0\leqq\Re(r_k)<1$; denn wenn dies nicht der Fall wäre, so könnte man in der Darstellung von $\mathfrak{C}(\varrho)$ leicht zu diesem Fall übergehen, wobei nur eine Potenz von (-1) als Faktor hinzutreten würde.

IV.

Die Reihe (3), wie sie durch die Entwicklungen in § 2 festgelegt wurde, ist Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$P(y)=x^{\varrho+\theta}\,\Phi(\varrho). \tag{6}$$

[8] H. v. Koch, Acta math. 15 S. 58 flg., 16 S. 282.

Differentiiert man hier nach x und eliminiert Φ, so folgt

$$xP'(y) - \varrho P(y) = P_n(x)\, x^{n+1} y^{(n+1)} + \cdots = 0$$

$g(x, \varrho)$ ist somit Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung, in der der Koeffizient der höchsten Ableitung von ϱ unabhängig ist, während die übrigen Koeffizienten lineare Funktionen von ϱ sind. Nach einem fundamentalen Satz von Poincaré folgt daraus, dass $g(x, \varrho)$ eine ganze transzendente Funktion von ϱ ist, wenn der von x unabhängige willkürliche Faktor $C(\varrho)$ richtig gewählt ist.

In Bezug auf x ist $g(x, \varrho)$ (nach § 2) regulär in der Umgebung jeder Stelle x innerhalb des Kreisringes

(27) $$\alpha_{i-1} < |x| < \alpha_i.$$

Somit ist $g(x, \varrho)$ für jedes Wertepaar x_1, ϱ_1, wo x_1 dem Kreisringan gehört, und $|\varrho_1| < G$, entwickelbar in eine Potenzreihe

$$g(x, \varrho) = c_0 + c_{11}(x - x_1) + c_{12}(\varrho - \varrho_1) + \cdots;$$

folglich ist $g(x, \varrho)$ eine stetige Funktion des Paares x, ϱ in dem genannten Gebiet.

Es sei x_2 irgend ein Wert von x, der auf einem innerhalb des Kreisringes verlaufenden und zu diesem konzentrischen Kreise K liegt, dessen Radius r sei. Dann nimmt $g(x_2, \varrho)$ seinen maximalen Wert an für eine Stelle ϱ_2, die auf dem Rande des Gebietes liegt, auf das ϱ beschränkt wird. Dieses sei das Rechteck L, bestimmt durch

$$0 \leqq \Re(\varrho) < 1 \qquad |\Im(\varrho)| < G,$$

wo $\Re(\varrho)$ den reellen und $\Im(\varrho)$ den rein imaginären Teil von ϱ bezeichnen.

Betrachtet man daher

$$F(x_2, \varrho_2) = |g(x_2, \varrho_2)|,$$

wo jetzt x_2 und ϱ_2 zwei beliebige Stellen des Kreises K und des Randes von L sind, so folgt, dass $F(x_2, \varrho_2)$ eine stetige Funktion des Paares x_2, ϱ_2 ist. Da jede der beiden Variabeln x_2, ϱ_2 auf einer geschlossenen Kurve variiert, so hängt jede nur von einem reellen Parameter ab, nämlich den Bogenlängen s_1, s_2 der Kurven und diese Parameter sind beschränkt auf das Intervall 0 bis ganze Länge der Kurve, $2\pi r$ im Falle des Kreises, l für das Rechteck.

Es ist also $F(x_2, \varrho_2)$ eine reelle Funktion der beiden reellen Variabeln s_1, s_2; sie ist eine stetige Funktion dieses Paares im Innern und auf dem Rande des Gebietes

$$0 \leqq s_1 \leqq 2\pi r, \qquad\qquad 0 \leqq s_2 \leqq l$$

und folglich hat sie in diesem Gebiet ein Maximum F. Daraus folgt, dass

$$|g(x, \varrho)| < F$$

für jedes x auf dem Kreise K und jedes ϱ aus dem Rechteck L.

Jetzt ergibt die Koeffizientenabschätzungsformel für die Laurentsche Reihe, angewendet auf (3), dass für jedes ϱ aus L,

$$(28) \qquad |g_\nu| \leqq F r^{-\nu} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ = -1, -2, \ldots \end{pmatrix}$$

Die Reihe (3) ist für den Kreisring (27) aufgestellt worden. Durch Einführung der neuen Variabeln ξ, $x = \xi \sqrt{\alpha_{i-1}\alpha_i}$, wird er transformiert in den Kreisring

$$\sqrt{\alpha_{i-1}\alpha_i^{-1}} < |\xi| < \sqrt{\alpha_i \alpha_{i-1}^{-1}},$$

der die Eigenschaft hat, dass der Kreis mit Radius 1 in ihm liegt. Man kann daher voraussetzen, dass diese Eigenschaft von Anfang an vorhanden ist, also $\alpha_{i-1} < 1 < \alpha_i$.

Jetzt betrachte man im Kreisring (27) zwei Kreise K_1, dessen Radius $R_1 > 1$, und K_2, dessen Radius $R_2 < 1$. Dann gibt es zufolge obiger Betrachtung zwei Maxima F_1, F_2, sodass

$$|g(x, \varrho)| < F_1 \qquad \text{für jedes } x \text{ auf } K_1$$

$$|g(x, \varrho)| < F_2 \qquad \text{für jedes } x \text{ auf } K_2$$

und jedes ϱ das L angehört. Weiter ist nach (28)

$$|g_\nu| \leqq F_1 R_1^{-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$|g_\nu| \leqq F_2 R_2^{-\nu} \qquad (\nu = -1, -2, \ldots)$$

Hieraus folgt endlich, dass die Reihe, durch die $g(x, \varrho)$ dargestellt ist, gleichmässig konvergiert für alle ϱ des Rechtecks L und alle x zwischen den Kreisen K_1 und K_2.

Folglich erhält man durch gliedweise Differentiation der Reihe $g(x, \varrho)$ den Differentialquotienten der dargestellten Funktion.

Nachdem in § 3 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (1) angegeben worden ist, unter der Voraussetzung, dass die Nullstellen von $\mathfrak{C}(\varrho)$ von einander verschieden sind, bleibt noch der Fall zu betrachten, dass $\mathfrak{C}$ mehrfache Nullstellen besitzt.

r_1 sei eine k-fache Nullstelle von $\mathfrak{C}$ und somit von $\Phi(\varrho)$ und r_1 liege im Einheitsstreifen. Das Rechteck L werde fixiert, indem man setzt $G > |r_1|$. Dann erhält man

$$P\left\{\frac{\partial^\lambda g(x,\varrho)}{\partial \varrho^\lambda}\right\} = \frac{\partial^\lambda}{\partial \varrho^\lambda}\{x^{\varrho+\theta}\,\Phi(\varrho)\}\,.$$

Hier hat die rechte Seite die Nullstelle r_1 für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots k-1$ und somit gehören zur k-fachen Nullstelle r_1 als Lösungen der Differentialgleichung die k Funktionen

$$\left\{\frac{\partial^\lambda g(x,\varrho)}{\partial \varrho^\lambda}\right\}_{\varrho=r_1} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots k-1).$$

Sie bilden mit den zu den übrigen Wurzeln gehörigen Lösungen das Fuchssche Fundamentalsystem.

* * *

Die dargestellte Lösung konnte nur unter Zuhilfenahme von einigen sehr beschränkenden Voraussetzungen durchgeführt werden, weil nur für diese die nötigen Resultate über Differenzengleichungen zur Verfügung standen. Die Eigenschaften von $\Phi(\varrho)$ entsprechen vollständig denjenigen, die H. v. Koch für die analoge Funktion gefunden hat unter Verwendung viel umfassenderer Voraussetzungen. Es ist daher nicht unwahrscheinlich, dass die oben gefundenen Resultate wieder erhalten werden, wenn die erforderlichen Sätze für weitere Klassen von Differenzengleichungen zur Verfügung stehen.

Oder man kann das Interesse auch auf die fehlenden Sätze, z. B. über nicht »normale» Differenzengleichungen, richten und sagen: es ist nicht unwahrscheinlich, dass diese ungefähr so lauten werden, wie die ihnen analogen, die in diesem Aufsatz gebraucht worden sind.

Küsnacht (Zürich), 30 Nov. 1925.