SUR UN THÉORÈME DE MONGE ET SUR UNE GÉNÉRALISATION DE CE THÉORÈME.

PAR

PAUL APPELL

à PARIS.

Dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1781 se trouve un écrit de Monge où sont données, d'une façon incidente, à propos du problème théorique des déblais et remblais, les propriétés essentielles des lignes de courbure et des systèmes de droites formant ce qu'on appelle aujourd'hui des congruences.

Le grand géomètre y propose le problème suivant: *deux volumes équivalents étant donnés, les décomposer en particules infiniment petites se correspondant deux à deux, de telle façon que les sommes des produits des chemins parcourus en transportant chaque parcelle sur celle qui lui correspond par le volume de la parcelle transportée, soient un minimum.*

Pour simplifier le langage, il donne les noms de déblai et de remblai aux volumes qu'il considère, sans prétendre traiter une question relative à l'art de l'ingénieur.

En prenant un système d'axes rectangulaires, nous apellerons alors x, y, z les coordonnées d'un point du déblai, x_1, y_1, z_1, les coordonnées correspondantes du point du remblai, x_1, y_1, z_1 étant des fonctions inconnues de x, y, z.

On pourra appliquer à ce problème toutes les considérations relatives à la déformation d'un milieu continu, telles qu'elles sont exposées dans le chapitre 32 du tome III de mon Traité de Mécanique rationnelle, avec cette addition que, la transformation par symétrie étant admise, le déterminant fonctionnel D peut être négatif; dans ce qui suit les fonctions $\varphi(x, y, z)$, φ_1, ψ ou ψ_1 peuvent donc être négatives. L'hypothèse que nous ferons est que les chemins suivis par les particules qui vont du point x, y, z au point x_1, y_1, z_1, sont des lignes droites. Nous supposerons que la densité varie d'un point à l'autre du déblai; cette densité ϱ étant une fonction donnée de x, y, z: $\varrho = \varphi(x, y, z)$. De même $\varrho_1 = \varphi_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{\psi(x_1, y_1, z_1)}$ sera la densité au point du remblai x_1, y_1, z_1. Les masses du déblai et du remblai sont supposées égales, et d'après l'énoncé de Monge, il faut déterminer x_1, y_1, z_1 en fonctions d'x, y, z, de telle façon qu'en posant

$$I = \iiint_D L\varrho \, dx \, dy \, dz$$

l'intégrale triple étant étendue à tout le volume D du déblai, I soit un minimum, L désignant la distance

$$L = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}.$$

L'équation exprimant que les masses des deux éléments correspondants sont égales, c'est-à-dire l'équation de continuité, s'écrit actuellement, avec la notation habituelle pour les déterminants fonctionnels,

$$(1) \qquad \varrho_1 \frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(x, y, z)} - \varrho = 0, \quad \frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(x, y, z)} - \varphi(x, y, z)\, \psi(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Nous généraliserons le problème de Monge en cherchant à déterminer x_1, y_1, z_1 en fonctions de x, y, z, de façon à rendre minimum une intégrale de la forme

$$J = \iiint_D f(L)\, \varphi(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

sous la condition (1), $f(L)$ désignant une fonction continue quelconque de la variable L; dans le cas considéré par Monge, $f(L) = L$.

Pour obtenir les valeurs d'x_1, y_1, z_1, rendant l'intégrale J minimum, nous devons égaler à zéro la variation de cette intégrale, quand x_1, y_1, z_1 subissent des variations quelconques dans le volume D, sous la condition (1).

On peut remarquer d'ailleurs que ces variations étant, comme nous venons de le dire, arbitraires dans le volume, sont, sur la surface S_1 du remblai $F(x_1, y_1, z_1) = 0$, liées par une relation linéaire qui est la suivante:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial F}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial F}{\partial z_1}\delta z_1=0.$$

Si on remplace, dans $F(x_1, y_1, z_1)$, x_1, y_1, z_1, par leurs expressions en x, y, z, on obtiendra l'équation de la surface S qui limite le déblai: cette équation, après la substitution, sera $F(x_1, y_1, z_1)=0$. On devra donc avoir l'équation suivante obtenue en égalant à zéro la variation de l'intégrale J dans laquelle on ajoute, pour tenir compte de la relation (1) le terme

$$\lambda\,[D-\varphi(x, y, z)\,\psi(x_1, y_1, z_1)]\,dx\,dy\,dz$$

λ étant une fonction arbitraire de x, y, z. On a ainsi:

$$J'=\iiint\limits_D\left[f(L)\,\varphi(x, y, z)+\lambda\left(\frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(x, y, z)}-\varphi\psi\right)\right]dx\,dy\,dz,$$

$$\delta J'=0,$$

$$\iiint\limits_D f'(L)\,\varphi\,\frac{(x_1-x)\,\delta x_1+(y_1-y)\,\delta y_1+(z_1-z)\,\delta z_1}{L}\,dx\,dy\,dz$$

$$-\iiint\limits_D \lambda\varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\delta z_1\right)dx\,dy\,dz$$

$$+\iiint\limits_D \lambda\left[\frac{\partial(\delta x_1)}{\partial x}\,\frac{D(y_1, z_1)}{D(y, z)}+\frac{\partial(\delta x_1)}{\partial y}\,\frac{D(y_1, z_1)}{D(z, x)}+\frac{\partial(\delta x_1)}{\partial z}\,\frac{D(y_1, z_1)}{D(x, y)}\right.$$

$$+\frac{\partial(\delta y_1)}{\partial x}\,\frac{D(z_1, x_1)}{D(y, z)}+\frac{\partial(\delta y_1)}{\partial y}\,\frac{D(z_1, x_1)}{D(z, x)}+\frac{\partial(\delta y_1)}{\partial z}\,\frac{D(z_1, x_1)}{D(x, y)}$$

$$\left.+\frac{\partial(\delta z_1)}{\partial x}\,\frac{D(x_1, y_1)}{D(y, z)}+\frac{\partial(\delta z_1)}{\partial y}\,\frac{D(x_1, y_1)}{D(z, x)}+\frac{\partial(\delta z_1)}{\partial z}\,\frac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)}\right]dx\,dy\,dz.$$

D'après les identités

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{D(y_1, z_1)}{D(y, z)}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{D(y_1, z_1)}{D(z, x)}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{D(y_1, z_1)}{D(x, y)}\right]=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{D(z_1, x_1)}{D(y, z)}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{D(z_1, x_1)}{D(z, x)}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{D(z_1, x_1)}{D(x, y)}\right]=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{D(x_1, y_1)}{D(y, z)}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{D(x_1, y_1)}{D(z, x)}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)}\right]=0,$$

la troisième intégrale de volume peut, à l'aide de la formule d'Ostrogradsky ou de Green, s'écrire:

$$
\begin{aligned}
-\iiint_D \Bigg\{ & \left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{D(y_1,z_1)}{D(y,z)}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{D(y_1,z_1)}{D(z,x)}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{D(y_1,z_1)}{D(x,y)}\right]\delta x_1 \\
+ & \left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{D(z_1,x_1)}{D(y,z)}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{D(z_1,x_1)}{D(z,x)}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{D(z_1,x_1)}{D(x,y)}\right]\delta y_1 \\
+ & \left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{D(x_1,y_1)}{D(y,z)}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{D(x_1,y_1)}{D(z,x)}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{D(x_1,y_1)}{D(x,y)}\right]\delta z_1\Bigg\}\,dx\,dy\,dz \\
+\iint_S \Bigg\{ & \lambda\left[\alpha\frac{D(y_1,z_1)}{D(y,z)}+\beta\frac{D(y_1,z_1)}{D(z,x)}+\gamma\frac{D(y_1,z_1)}{D(x,y)}\right]\delta x_1 \\
& +\lambda\left[\alpha\frac{D(z_1,x_1)}{D(y,z)}+\beta\frac{D(z_1,x_1)}{D(z,x)}+\gamma\frac{D(z_1,x_1)}{D(x,y)}\right]\delta y_1 \\
& +\lambda\left[\alpha\frac{D(x_1,y_1)}{D(y,z)}+\beta\frac{D(x_1,y_1)}{D(z,x)}+\gamma\frac{D(x_1,y_1)}{D(x,y)}\right]\delta z_1\Bigg\}\,d\sigma,
\end{aligned}
$$

dans laquelle $d\sigma$ est un élément quelconque de la surface S du déblai, α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale extérieure sur cet élément.

Dans l'intégrale triple finale, on doit égaler à zéro les coefficients de δx_1, δy_1, δz_1 qui sont arbitraires à l'intérieur; on a ainsi les équations

$$
\begin{aligned}
& f'(L)\varphi\frac{x_1-x}{L}-\lambda\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_1}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{D(y_1,z_1)}{D(y,z)}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{D(y_1,z_1)}{D(z,x)}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{D(y_1,z_1)}{D(x,y)}=0, \\
& f'(L)\varphi\frac{y_1-y}{L}-\lambda\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y_1}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{D(z_1,x_1)}{D(y,z)}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{D(z_1,x_1)}{D(z,x)}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{D(z_1,x_1)}{D(x,y)}=0, \\
& f'(L)\varphi\frac{z_1-z}{L}-\lambda\varphi\frac{\partial\psi}{\partial z_1}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{D(x_1,y_1)}{D(y,z)}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{D(x_1,y_1)}{D(z,x)}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{D(x_1,y_1)}{D(x,y)}=0.
\end{aligned}
$$

Nous allons résoudre ces trois équations par rapport à $\frac{\partial\lambda}{\partial x}, \frac{\partial\lambda}{\partial y}, \frac{\partial\lambda}{\partial z}$.

Pour cela, multiplions la première par $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, la deuxième par $\frac{\partial y_1}{\partial x}$, la troisième par $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, et ajoutons, en remarquant que le coefficient de $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$ devient

$\frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(x, y, z)}$ c'est à dire $\varphi\psi$ et que les coefficients de $\frac{\partial\lambda}{\partial y}$ et $\frac{\partial\lambda}{\partial z}$ sont nuls. Nous avons, en divisant par φ;

$$f'(L)\left[\frac{x_1-x}{L}\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{y_1-y}{L}\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{z_1-z}{L}\frac{\partial z_1}{\partial x}\right]$$
$$-\lambda\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)-\psi\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0.$$

Mais en dérivant L par rapport à x, on a

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{x_1-x}{L}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}-1\right)+\frac{y_1-y}{L}\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{z_1-z}{L}\frac{\partial z_1}{\partial x},$$

et, d'autre part,

$$\frac{\partial\psi}{dx}=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x}.$$

L'équation précédente peut donc s'écrire:

$$f'(L)\left[\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{x_1-x}{L}\right]-\lambda\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{x_1-x}{L}=\frac{1}{f'(L)}\frac{\partial\,[\lambda\psi-f(L)]}{\partial x}$$

de même on a

$$\frac{y_1-y}{L}=\frac{1}{f'(L)}\frac{\partial\,[\lambda\psi-f(L)]}{\partial y}$$

$$\frac{z_1-z}{L}=\frac{1}{f'(L)}\frac{\partial\,[\lambda\psi-f(L)]}{\partial z}.$$

Le calcul qui conduit à ces formules est la généralisation de celui que j'ai donné dans les Mémoires des Savants Etrangers (deuxième série, t. 29). (Voyez Comptes Rendus, t. 180, 1925, p. 781—782). On peut donc écrire:

$$\frac{x_1-x}{L}=\frac{1}{f'(L)}\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\frac{y_1-y}{L}=\frac{1}{f'(L)}\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{z_1-z}{L}=\frac{1}{f'(L)}\frac{\partial U}{\partial z},$$

où

$$U=\lambda\psi-f(L).$$

Parmi les conséquences bien connues qu'on peut tirer de ces formules, je me borne à signaler la suivante: Les segments ayant pour projections x_1-x, y_1-y, z_1-z, sont, au point x, y, z, normaux à celles des surfaces $U=C^{te}$ qui passe par ce point.

Dans le cas considéré par Monge, on a $f'(L)=1$ et les surfaces $U=C^{te}$ sont parallèles, car on a alors

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2=1.$$

Il est évident que, dans l'énoncé même du problème, on peut échanger x, y, z avec x_1, y_1, z_1, et ϱ avec ϱ_1.

Le même calcul donne alors le résultat suivant: on a à considérer la même intégrale

$$J'=\iiint_D \left\{f(L)\varphi+\lambda\left[\frac{D(x_1,y_1,z_1)}{D(x,y,z)}-\frac{\varrho}{\varrho_1}\right]\right\}dx\,dy\,dz,$$

où on fait le changement de variables consistant à remplacer x, y, z par les nouvelles variables x_1, y_1, z_1. Alors

$$dx\,dy\,dz=\frac{D(x,y,z)}{D(x_1,y_1,z_1)}dx_1\,dy_1\,dz_1$$

donc

$$J'=\iiint_R \left\{f(L)\varrho_1+\lambda\left[1-\frac{\varrho}{\varrho_1}\frac{D(x,y,z)}{D(x_1,y_1,z_1)}\right]\right\}dx_1\,dy_1\,dz_1,$$

$$J'=\iiint_R \left\{\varrho_1 f(L)+\lambda_1\left[\frac{D(x,y,z)}{D(x_1,y_1,z_1)}-\frac{\varrho_1}{\varrho}\right]\right\}dx_1\,dx_1\,dz_1$$

en posant

$$\lambda_1=-\lambda\frac{\varrho}{\varrho_1},$$

intégrale de la forme précédente où λ est remplacé par $-\frac{\lambda\varrho}{\varrho_1}$; on a alors

$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{1}{f'(L)}\frac{\partial V}{\partial x_1},$$

$$\frac{y-y_1}{L}=\frac{1}{f'(L)}\frac{\partial V}{\partial y_1},$$

$$\frac{z-z_1}{L}=\frac{1}{f'(L)}\frac{\partial V}{\partial z_1}.$$

Les premiers membres des équations précédentes ne changeant pas quand on remplace x, y, z, x_1, y_1, z_1 par $kx, ky, kz, kx_1, ky_1, kz_1$, il en est de même des seconds membres $\frac{1}{f'(L)}\frac{\partial U}{\partial x}, \cdots \frac{1}{f'(L)}\frac{\partial V}{\partial x_1}, \cdots$ Si donc $f(L)$ est du degré d'homogénité n en L, ∂U est multiplié par k^n et ∂V également. Alors U et V sont déterminés à un facteur constant près et à une constante additive près:

$$U=h\left[\frac{\lambda}{\varrho_1}-f(L)\right]+C^{te},$$

$$V=h'\left[\frac{-\frac{\lambda\varrho}{\varrho_1}}{\varrho}-f(L)\right]+C^{te}.$$

Donc

$$h'U+hV=-2hh'f(L)+C^{te}.$$

Par exemple, si la transformation est une translation parallèle à Oz, on a en supposant $z-z_1>0$ et prenant $f(L)=L$, $L=z-z_1$, $U=-z$, $V=z_1$,

$$U+V=-L;$$

alors $h=h'=\frac{1}{2}\cdot$ On trouve le même résultat en supposant les routes convergentes en O et $f(L)=L$; posons

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

avec l'hypothèse $r-r_1>0$. Alors $L=r-r_1$, $U=-r$, $V=r_1$, $U+V=-L$.

Reste enfin l'intégrale de surface,

$$(2)\qquad \iint_S \left\{\lambda\left[\alpha\frac{D(y_1,z_1)}{D(y,z)}+\beta\frac{D(y_1,z_1)}{D(z,x)}+\gamma\frac{D(y_1,z_1)}{D(x,y)}\right]\delta x_1+\cdots+\cdots\right\}d\sigma.$$

Dans cette intégrale, $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ ne sont pas arbitraires, mais sont liées par la relation

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial F}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial F}{\partial z_1}\delta z_1=0.$$

On devra donc écrire que l'intégrale double (2) dans laquelle on ajoute sous le signe $\int\int$ le terme

$$\mu\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial F}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial F}{\partial z_1}\delta z_1\right],$$

où μ est une fonction arbitraire de la position du point sur la surface S, est nulle quels que soient δx_1, δy_1, δz_1.

En égalant à zéro les coefficients de ces quantités, on a les équations:

$$\lambda\left[\alpha\frac{D(y_1,z_1)}{D(y,z)}+\beta\frac{D(y_1,z_1)}{D(z,x)}+\gamma\frac{D(y_1,z_1)}{D(x,y)}\right]+\mu\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,$$

$$\lambda\left[\alpha\frac{D(z_1,x_1)}{D(y,z)}+\beta\frac{D(z_1,x_1)}{D(z,x)}+\gamma\frac{D(z_1,x_1)}{D(x,y)}\right]+\mu\frac{\partial F}{\partial y_1}=0,$$

$$\lambda\left[\alpha\frac{D(x_1,y_1)}{D(y,z)}+\beta\frac{D(x_1,y_1)}{D(z,x)}+\gamma\frac{D(x_1,y_1)}{D(x,y)}\right]+\mu\frac{\partial F}{\partial z_1}=0,$$

qui, multipliées respectivement par $\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial y_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial x}$ et ajoutées, puis par $\frac{\partial x_1}{\partial y}, \frac{\partial y_1}{\partial y}, \frac{\partial z_1}{\partial y}$ et ajoutées, puis enfin par $\frac{\partial x_1}{\partial z}, \frac{\partial y_1}{\partial z}, \frac{\partial z_1}{\partial z}$ et ajoutées donnent

$$\lambda\alpha\frac{D(x_1,y_1,z_1)}{D(x,y,z)}+\mu\frac{\partial F}{\partial x}=0,\ \lambda\beta\frac{D(x_1,y_1,z_1)}{D(x,y,z)}+\mu\frac{\partial F}{\partial y}=0,\ \lambda\gamma\frac{D(x_1,y_1,z_1)}{D(x,y,z)}+\mu\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

équations de la forme

$$\alpha=\nu\frac{\partial F}{\partial x},\ \beta=\nu\frac{\partial F}{\partial y},\ \gamma=\nu\frac{\partial F}{\partial z}$$

ce qui est évident, car α, β, γ sont proportionnels à $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$. L'intégrale de surface ne donne donc aucune condition nouvelle, sinon que λ et μ sont liés sur la surface au coefficient ν par la relation

$$\lambda\nu\varphi\psi+\mu=0.$$

Paris 6 avril 1925.