ÜBER DIE KOEFFIZIENTENSUMME EINER BESCHRÄNKTEN UND SCHLICHTEN POTENZREIHE.

VON

LEOPOLD FEJÉR

in BUDAPEST.

Einleitung.

Bei Untersuchungen über Fouriersche Reihen und Potenzreihen wurde man auf die Frage geführt, die Glieder oder die Partialsummen einer solchen Reihe abzuschätzen, wenn die obere Grenze des absoluten Betrages der entwickelten Funktion bekannt ist. Sucht man den Ursprung der auf die Partialsummen bezüglichen Fragestellung, so kommt man zur Theorie der divergenten Fourierreihen und zur Theorie der divergenten Potenzreihen, welch' letztere durch Herrn G. MITTAG-LEFFLER so wesentlich gefördert worden ist.

1. Bezeichnet $f(z)$ eine *beliebige,* im Einheitskreise $|z|<1$ reguläre analytische Funktion, für welche $|f(z)|\leqq 1$ bleibt, wenn $|z|<1$ ist, so sind in ihrer Potenzreihenentwicklung

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

sämmtliche *Koeffizienten* dem absoluten Betrage nach $\leqq 1$. D. h.

$$(1) \qquad |a_n|\leqq 1, \qquad n=0, 1, 2, \ldots .$$

Dieser Satz rührt im wesentlichen von CAUCHY her.

Auch für die *Koeffizientensummen*

$$s_0=a_0,\ s_1=a_0+a_1, \ldots s_n=a_0+a_1+\cdots+a_n, \ldots$$

einer beliebigen Funktion, die zur Klasse E der im Einheitskreise regulären und dem absoluten Betrage nach den Wert 1 nicht übersteigenden Funktionen gehört, existieren entsprechende Sätze. So ist für eine beliebige Funktion der Klasse E

(2)
$$\left|\frac{s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}}{n}\right| \leqq 1, \qquad n=1, 2, \ldots .$$[1]

Herr I. SCHUR hat bewiesen[2], dass sogar die schärferen Ungleichungen

(3)
$$\frac{|s_0|+|s_1|+\cdots+|s_{n-1}|}{n} \leqq 1,$$

$$n=1, 2, 3, \ldots$$

(4)
$$\frac{|s_0|^2+|s_1|^2+\cdots+|s_{n-1}|^2}{n} \leqq 1,$$

bestehen, sobald $f(z)$ der Klasse E angehört.

2. Hiernach genügen die absoluten Beträge der *arithmetischen Mittel* der Koeffizientensummen, oder die arithmetischen Mittel ihrer absoluten Beträge, oder die quadratischen Mittel $\sqrt{\dfrac{|s_0|^2+|s_1|^2+\cdots+|s_{n-1}|^2}{n}}$ dieser absoluten Beträge für eine beliebige Funktion der Klasse E derselben einfachen Ungleichung, welche nach Cauchy durch die Folge der absoluten Beträge $|a_n|$ der Koeffizienten befriedigt wird. (Übrigens können diese Ungleichungssätze in gewissem Sinne nicht weiter verbessert werden.) Demgegenüber finden wir bei der Folge $|s_n|$ der absoluten Beträge der Koeffizientensummen selbst einen komplizierteren Sachverhalt, der jedoch durch die Resultate verschiedener Mathematiker in befriedigender Weise geklärt ist.

---

[1] L. FEJÉR: Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierte Mittelkurven und Mittelflächen, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 38, S. 79—97, 1914. Vgl. weiter E. LANDAU: a) Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe (Dritte Abhandlung), Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, Bd. 24, S. 250—260, 1915; b) Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, S. 7—9, 17—29; O. SZÁSZ: Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe, Mathematische Zeitschrift, Bd. 1, S. 163—183, 1918, insb. Fussnote 2).

[2] I. SCHUR: a) Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 147, S. 205—232, 1917; b) Zweite Mitteilung, Bd. 148, S. 122—145, 1918, vgl. insb. § 11 der zweiten Mitteilung. Ferner: O. SZÁSZ a. a. O. § 6, wo auch die einschlägige Literatur angegeben ist mit einem Hinweis auf die Untersuchungen der Herren HARDY und LITTLEWOOD über den Mittelwert $\dfrac{|s_0|+|s_1|+\cdots+|s_{n-1}|}{n}$ bei der Fourierreihe.

So habe ich durch Beispiele zum ersten Male bewiesen[1], dass die Folge

$$|s_0|, |s_1|, \ldots, |s_n|, \ldots$$

selbst für eine *einzelne* Funktion der Klasse E *nicht beschränkt zu sein braucht;* d. h. es kann für eine, für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe $a_0 + a_1 z + \cdots$ die Ungleichung

$$|a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots| \leqq 1, \qquad |z| < 1,$$

gültig sein, ohne dass die Folge

$$|a_0|, |a_0 + a_1|, \ldots, |a_0 + a_1 + \cdots + a_n|, \ldots$$

beschränkt wäre.[2]

---

[1] L. FEJÉR: Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1910, Nr. 3, 17 S. — Vgl. auch E. LANDAU: Ergebnisse ..., S. 7—9, 17—29.

[2] Während aber $|a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n|$ im Kreise $|z| \leqq 1$ für eine Funktion der Klasse E beliebig gross sein kann, ist im Kreise $|z| \leqq \frac{1}{2}$ wieder

$$\left.\begin{array}{c} |s_n(z)| = |a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n| \leqq 1, \\ |z| \leqq \frac{1}{2}, \end{array}\right. \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

für jede Funktion der Klasse E, nicht aber im Kreise $|z| \leqq \frac{1}{2} + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Diesen Satz habe ich in meiner Arbeit: Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten (Erste Mitteilung), Acta litterarum ac scientiarum regiae universitatis hungaricae Francisco-Josephinae, sectio scientiarum mathematicarum, Bd. II, Heft II, 1925, S. 75—86 auf Seite 81 angegeben, mit zwei einfachen Beweisen. Indessen kann, worauf mich Herr LANDAU freundlichst aufmerksam machte, dieser Satz auch als spezieller Fall eines Satzes von Herrn W. ROGOSINSKI erhalten werden, der in seiner Arbeit: Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten, Math Zeitschrift, Bd. 17, S. 260—276, 1923, auf S. 271 angeführt ist (Satz II, 5). — Vgl. weiter: E. LANDAU: Über einen Fejérschen Satz, Göttinger Nachrichten, 1925, S. 22 und I. SCHUR und G. SZEGÖ: Über die Abschnitte einer im Einheitskreise beschränkten Potenzreihe, Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, 1925, S. 545—560. In der letzten Arbeit wird weitergehend u. a. der grösste Kreis $|z| \leqq \varrho_n$ bestimmt, für welchen

$$\begin{array}{c} |s_n(z)|, |s_{n+1}(z)|, \ldots \leqq 1, \\ |z| \leqq \varrho_n, \end{array}$$

gültig ist für jede Funktion der E-Klasse.

Herr LANDAU hat dann die obere Grenze von $|s_n|$ bei festem n bestimmt[1], wenn $f(z)$ die ganze Klasse E durchläuft und den Wert

$$G_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}\right)^2 \sim \frac{1}{\pi} \log n$$

gefunden; Herr H. BOHR hat später die Frage geklärt, wie nahe das Wachstum von

$$|s_0|, |s_1|, \ldots, |s_n|, \ldots$$

bei einem *einzelnen* $f(z)$ der Klasse E dem Wachstum der Landauschen Folge der *Klassengrenzen*

$$G_0, G_1, \ldots, G_n, \ldots$$

kommen kann.[2]

3. In den folgenden Zeilen möchte ich hauptsächlich zeigen, dass für diejenige Unterklasse E^* der Klasse E, die aus den im Einheitskreise *schlichten* Funktionen der Klasse E besteht, die absoluten Koeffizientensummen

$$|s_0|, |s_1|, \ldots, |s_n|, \ldots$$

eine numerische obere Schranke haben, also eine obere Schranke, die von der Funktion $f(z)$ und vom Index n unabhängig ist. Für diese, seit den Untersuchungen von Herrn KOEBE stets besonders beachtete schlichte Unterklasse E^* existiert also ein Satz, der denselben Charakter trägt wie die in **1.** angeführten Sätze. Dieser Satz lautet:

---

[1] E. LANDAU: Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe (Zweite Mitteilung), Archiv der Math. u. Physik, III. Reihe, Bd. 21, S. 250—255, 1913 und E. LANDAU: Ergebnisse..., S. 7—9, 17—29. — Die Landauschen Konstanten G_n bei der Potenzreihe entsprechen den Lebesgueschen Konstanten bei der Fourierreihe.

[2] H. BOHR: Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe, Göttinger Nachrichten, 1916, S. 276—291; Zweite Mitteilung, Göttinger Nachrichten, 1917, S. 119—128. Herr BOHR beweist, dass für jedes feste $f(z)$ der Klasse E

$$\lim_{n \to \infty} \{G_n - |s_n|\} = \infty$$

ist; es gibt aber ein $f(z)$ in E mit

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|s_n|}{G_n} = 1.$$

Vgl. auch die in Fussnote [2] S. 184 unter b) zitierte Arbeit von Herrn I. SCHUR, insb. S. 130, und L. NEDER: Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe, Math. Zeitschrift, Bd 11, S. 115—123, 1921.

Ist die Potenzreihe

$$f(z)=a_0+a_1 z+\cdots+a_n z^n+\cdots$$

für $|z|<1$ *konvergent und ist* $|f(z)|\leqq 1$ *für* $|z|<1$, *so gilt*

$$|a_0+a_1+\cdots+a_n|\leqq 1+\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{5}$$

falls $f(z)$ *für* $|z|<1$ *schlicht ist (d. h.* $f(z_1)\neq f(z_2)$, *wenn* $|z_1|<1, |z_2|<1$, $z_1\neq z_2$*).*

§ 1. **Beweis des Hauptsatzes.**

4. Es sei

$$f(z)=a_0+a_1 z+\cdots+a_n z^n+\cdots \tag{6}$$

irgendeine Potenzreihe. Da

$$s_n=a_0+a_1+\cdots+a_n=\frac{(n+1)a_0+n a_1+\cdots+a_n}{n+1}+\frac{a_1+2a_2+\cdots+n a_n}{n+1},$$

so gilt

$$s_n=a_0+a_1+\cdots+a_n=\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}+\frac{a_1+2a_2+\cdots+n a_n}{n+1}$$

und mit Rücksicht auf die Schwarzsche Ungleichung

$$\begin{aligned}
|s_n| &\leqq \left|\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}\right|+\frac{|a_1|+2|a_2|+\cdots+n|a_n|}{n+1}\\
&=\left|\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}\right|+\frac{1}{n+1}\left(\sqrt{1}\cdot\sqrt{1}\cdot|a_1|+\cdots+\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\,|a_n|\right)\\
&\leqq \left|\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}\right|+\frac{1}{n+1}\sqrt{1+2+\cdots+n}\sqrt{|a_1|^2+2|a_2|^2+\cdots+n|a_n|^2}\\
&=\left|\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sqrt{|a_1|^2+2|a_2|^2+\cdots+n|a_n|^2}\\
&\leqq \left|\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|a_1|^2+2|a_2|^2+\cdots+n|a_n|^2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Ist nun die Potenzreihe (6) für $|z|<1$ konvergent und überdies $|f(z)|\leqq 1$ für $|z|<1$ (d. h. gehört $f(z)$ zu E), so folgt nach Ungleichung (2)

$$\left|\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}\right|\leqq 1. \tag{8}$$

Ist $f(z)$ ausserdem schlicht für $|z|<1$ (d. h. $f(z_1)\neq f(z_2)$, wenn $|z_1|<1$, $|z_2|<1$, $z_1\neq z_2$), so ist der *Flächeninhalt*[1] des konformen Bildes, welches die Funktion $w=f(z)$ in der w-Ebene vom Kreise $|z|\leqq r<1$ der z-Ebene entwirft, jedenfalls nicht grösser als der Flächeninhalt π des Einheitskreises, also

$$\pi\left(|a_1|^2+2|a_2|^2r^2+\cdots+n|a_n|^2r^{2n}+\cdots\right)\leqq\pi.$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$|a_1|^2+2|a_2|^2r^2+\cdots+n|a_n|^2r^{2n}\leqq 1,$$

aus welcher, da sie für jedes $0\leqq r<1$ besteht,

$$|a_1|^2+2|a_2|^2+\cdots+n|a_n|^2\leqq 1 \tag{9}$$

geschlossen werden kann. Mit Rücksicht auf (7), (8), (9) ergibt sich also

$$|s_n|\leqq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ich habe also den am Schlusse der Einleitung ausgesprochenen Satz bewiesen.

§ 2. Bemerkungen.

5. Die hiermit gewonnene obere Schranke

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

[1] Vgl. L. Fejér: a) La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple, Comptes rendus, Paris, Tome 156, p. 46—49, 1913; b) Über die Konvergenz der Potenzreihe in Fällen der konformen Abbildung auf die schlichte Ebene, Schwarzfestschrift, Berlin 1914, S. 42—53; c) Fourierreihe und Potenzreihe, Monatshefte für Math. u. Physik, Jahrg. 28, S. 64—76, 1917. In diesen Arbeiten wird u. a. für die schlichten Funktionen der Klasse E die Frage der »Randkonvergenz« erledigt.

für den absoluten Betrag sämtlicher Koeffizientensummen aller im Einheitskreise schlichter Funktionen, die ebenda absolut $\leqq 1$ sind, ist kaum die wahre obere Grenze[1] dieser Koeffizientensummen. Diese obere Grenze σ ist selbstverständlich $\geqq 1$. Sie ist aber auch $\geqq \frac{5}{4}$. Denn für

$$f(z) = \frac{1+2z}{2+z} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \cdots$$

ist $s_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$. Also ist $\frac{5}{4} \leqq \sigma \leqq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, d. h.

$$1.25 \leqq \sigma \leqq 1.7071 \ldots . \tag{10}$$

Mehr kann ich über σ nicht aussagen.

6. Aus unserem Satze ergibt sich ohne weiteres der folgende:

Ist die Potenzreihe

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

für $|z| < R$ konvergent und schlicht, so ist, falls $|f(z)| \leqq M$ für $|z| < R$,

$$|s_n(z)| = |a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n| \leqq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) M \tag{11}$$

für

$$|z| \leqq R, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

7. Wir haben gesehen, dass für die Unterklasse der schlichten Funktionen der Klasse E

$$|s_n| = |a_0 + a_1 + \cdots + a_n| \leqq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

gilt. Natürlich besteht eine entsprechende Ungleichung auch für die Unterklasse derjenigen Funktionen der Klasse E, die jeden Wert, den sie für $|z| < 1$ überhaupt annehmen, im selben Kreise $|z| < 1$ höchstens k-mal annehmen. Für diese Unterklasse erhalten wir

---

[1] Die Bestimmung dieser oberen Grenze scheint schwierig zu sein, ebenso die Bestimmung der oberen Grenze von $|a_n|$ oder $|s_n|$ bei festem n, wenn $f(z)$ die Unterklasse E^* durchläuft. Die letzteren Fragen sind mit der folgenden bekannten Frage von Herrn BIEBERBACH eng verwandt: es wird die obere Grenze von $|a_n|$ gesucht, wenn $f(z)$ die Gesamtheit der für $|z| < 1$ regulären und schlichten Funktionen durchläuft (mit der Normierungsnebenbedingung $a_0 = 0$, $a_1 = 1$).

$$|s_n| \leqq 1 + \sqrt{\frac{k}{2}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{12}$$

8. Man kann übrigens aus der Klasse E Unterklassen auch durch die Forderung herausheben, dass entweder $|f'(z)|$ oder ein Mittelwert von $|f'(z)|$ kleiner sein soll als eine gegebene Konstante. Solche Forderungen wären

$$|f'(re^{i\theta})| \leqq C_1, \qquad 0 \leqq r < 1,\ 0 \leqq \theta < 2\pi,$$

$$\frac{1}{2r\pi} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 \, r \, d\theta \leqq C_2^2,$$

$$\frac{1}{2r\pi} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})| \, r \, d\theta \leqq C_3,$$

$$\frac{1}{r^2\pi} \int_{\varrho=0}^{r} \int_{\theta=0}^{2\pi} |f'(\varrho e^{i\theta})|^2 \, \varrho \, d\varrho \, d\theta \leqq C_4^2,$$

für

$$0 < r < 1.$$

Mit diesen Unterklassen will ich mich aber hier nicht beschäftigen.[1]

Budapest, 10. Dezember 1925.

[1] Auch für die Abschätzung der Summen $|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$ bei den verschiedenen Klassen liegt in der Literatur sehr wertvolles neues Material vor; hier sei auf diese Untersuchungen nur hingewiesen.