ÜBER DIE EINER BELIEBIGEN DIFFERENTIALGLEICHUNG
ERSTER ORDNUNG ANGEHÖRIGEN
SELBSTÄNDIGEN TRANSCENDENTEN

VON

LEO KOENIGSBERGER
in WIEN.

Einer homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung gehören bekanntlich höchstens m algebraisch von einander unabhängige Transcendenten als Integrale an, indem jedes Integral sich als homogene lineare Function von m Fundamentalintegralen ausdrücken lässt; ähnliches gilt für jede lineare nicht homogene Differentialgleichung beliebiger Ordnung, und ich habe diese Frage, welche identisch ist mit der Untersuchung des algebraischen Zusammenhanges zwischen dem allgemeinen und einer bestimmten Anzahl von particulären Integralen, wenigstens für diejenigen Fälle, in welchen in jenen algebraischen Zusammenhang für Differentialgleichungen erster Ordnung nur 1, 2 oder 3 particuläre Integrale eintreten, schon früher behandelt (¹). Ich lege mir nunmehr das Problem ganz allgemein vor, *sämmtliche Differentialgleichungen*

$$F\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

anzugeben, für welche sich alle Integrale durch n selbständige nicht algebraisch mit einander verbundene Transcendenten und durch nicht weniger algebraisch ausdrücken lassen oder anders ausgesprochen, *welche nur n algebraisch von einander unabhängige transcendente Integrale besitzen,* oder endlich auch, da in das allgemeine Integral eine willkührliche Constante eintreten muss, *alle*

(¹) »Über den Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und den particulären Integralen von Differentialgleichungen», Journal f. Math. B. 91, H. 4, und in meinem Buche »Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen», § 9.

Differentialgleichungen (1) *zu charakterisiren, für welche das allgemeine Integral z eine algebraische Function von n algebraisch von einander unabhängigen transcendenten Integralen $z_1, z_2, \ldots z_n$, der unabhängigen Variabeln x und einer willkührlichen Constanten*

$$z = f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c) \tag{2}$$

ist, wobei angenommen werden darf, dass n die kleinste Anzahl der von einander unabhängigen transcendenten Integrale ist, für welche diese Darstellung möglich ist.

Setzen wir die Gleichung (1) in die Form

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x, z), \tag{3}$$

wodurch ein in $\frac{dz}{dx}$ irreductibler Factor von (1) dargestellt sein mag, so ergiebt sich vermöge der für diesen Factor geltenden Voraussetzung (2)

$$\varphi(x, f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z_1}\varphi(x, z_1) + \frac{\partial f}{\partial z_2}\varphi(x, z_2) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_n}\varphi(x, z_n), \tag{4}$$

und da wir angenommen haben, dass zwischen $x, z_1, z_2, \ldots z_n$ nicht schon selbst ein algebraischer Zusammenhang stattfinden soll, so wird diese Gleichung eine in $x, z_1, z_2, \ldots z_n, c$ identische sein müssen, worin die einzelnen φ-Functionen Zweige der algebraisch vieldeutigen Function $\varphi(x, z)$ darstellen werden. Differentiirt man die Gleichung (4) nach einer der Variabeln z_ρ und der willkührlichen Constanten c, was wegen ihrer Identität für alle Werthe dieser Variabeln gestattet ist, so erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi(x, f(x, z_1, \ldots z_n, c))}{\partial f(x, z_1, \ldots z_n, c)} \frac{\partial f(x, z_1, \ldots z_n, c)}{\partial z_\rho} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_\rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_\rho}\varphi(x, z_1) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial z_n \partial z_\rho}\varphi(x, z_n) + \frac{\partial f}{\partial z_\rho}\frac{\partial\varphi(x, z_\rho)}{\partial z_\rho} \end{aligned} \tag{5}$$

und

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi(x, f(x, z_1, \ldots z_n, c))}{\partial f(x, z_1, \ldots z_n, c)} \frac{\partial f(x, z_1, \ldots z_n, c)}{\partial c} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial c}\varphi(x, z_1) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial z_n \partial c}\varphi(x, z_n), \end{aligned} \tag{6}$$

und durch Elimination von $\dfrac{\partial\varphi(x, f(x, z_1, \dots z_n, c))}{\partial f(x, z_1, \dots z_n, c)}$ zwischen diesen beiden Gleichungen

$$(7)\qquad \frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z_\rho} - \frac{\partial f}{\partial z_\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial c} + \varphi(x, z_1)\left\{\frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial z_\rho} - \frac{\partial f}{\partial z_\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial c}\right\} + \cdots$$
$$+ \varphi(x, z_n)\left\{\frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial^2 f}{\partial z_n\partial z_\rho} - \frac{\partial f}{\partial z_\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial z_n\partial c}\right\} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial f}{\partial z_\rho}\frac{\partial\varphi(x, z_\rho)}{\partial z_\rho} = 0$$

oder auch

$$(8)\qquad \frac{\partial\varphi(x, z_\rho)}{\partial z_\rho} + \frac{\partial}{\partial x}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\} + \sum_{1}^{n}{}_\mu\,\varphi(x, z_\mu)\frac{\partial}{\partial z_\mu}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\},$$

welche Gleichung wiederum für alle Werthe der Variabeln identisch erfüllt sein muss. Setzen wir $\varphi(x, z_\rho) = Z_\rho$, fassen Z_ρ nur als Function von z_ρ auf und setzen die Gleichung (8) in die Form

$$(9)\qquad \frac{dZ_\rho}{dz_\rho} + Z_\rho\frac{\partial}{\partial z_\rho}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\} = -\frac{\partial}{\partial x}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\} - \sum_{1}^{n}{}^{(\rho)}_\mu\,\varphi(x, z_\mu)\frac{\partial}{\partial z_\mu}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\},$$

worin das der Summe angefügte (ρ) bedeuten soll, dass $\mu = \rho$ auszuschliessen ist, so giebt die Integration der in Z_ρ und z_ρ linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(10)\qquad Z_\rho = \mathsf{L}\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}} - \frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}\int\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\frac{\partial}{\partial x}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\} + \frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\sum_{1}^{n}{}^{(\rho)}_\mu\,\varphi(x, z_\mu)\frac{\partial}{\partial z_\mu}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\}\right]dz_\rho,$$

worin L eine im allgemeinen von $x, z_1, z_2, \dots z_n$ (z_ρ ausgeschlossen) und c abhängige Function sein wird, oder

$$(11)\qquad \varphi(x, z_\rho) = \mathsf{L}\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}} - \frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}\int\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\}dz_\rho - \frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}\sum_{1}^{n}{}^{(\rho)}_\mu\,\varphi(x, z_\mu)\int\frac{\partial}{\partial z_\mu}\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\}dz_\rho,$$

in welchem Ausdrucke für $\varphi(x, z_\rho)$ auf der rechten Seite die Werthe $z_1, \dots z_{\rho-1}, z_{\rho+1}, \dots z_n$, c völlig willkührlich gewählt werden können, (1) oder auch symmetrischer geschrieben:

---

(1) Es mag nur noch bemerkt werden, dass die willkührliche Wahl dieser Grössen so zu verstehen ist, dass ihnen allgemeine, völlig von einander unabhängige Werthe beigelegt werden können, dass jedoch die Festsetzung gewisser Beziehungen zwischen ihnen zu unendlichen oder unbestimmten Ausdrücken führen kann, welche erst wieder durch eine bestimmte Wahl von L beseitigt werden könnten; wir wollen dies an einem Beispiel erläutern. Für die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} = \omega(x)z^2 + \Lambda(x)z + \pi(x),$$

in welcher $\omega(x)$, $\Lambda(x)$, $\pi(x)$ beliebige algebraische Functionen von x bedeuten, findet zwischen dem allgemeinen und 3 ihrer particulären Integrale (s. meine »allg. Untersuchungen aus der Theorie der Diff.-gleichungen», S. 99) die Beziehung statt

$$z = \frac{c_3 z_1(z_2 - z_3) + c z_2(z_3 - z_1)}{c_3(z_2 - z_3) + c(z_3 - z_1)},$$

und da in diesem Falle für die oben gewählten Bezeichnungen sich für $\rho = 1$

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial c}}{\dfrac{\partial f}{\partial z_1}} = \frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_1)}{(c_3 - c)(z_2 - z_3)}$$

ergiebt, so geht die Gleichung (11) in

$$\varphi(x, z_1) = \mathsf{L}\frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_1)}{(c_3 - c_1)(z_2 - z_3)} - \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}\varphi(x, z_2) - \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}\varphi(x, z_3)$$

über, also in der That in einen Ausdruck von der Form $\omega(x)z^2 + \Lambda(x)z + \pi(x)$; setzt man aber z. B. $z_2 = z_3$, so würden die einzelnen Posten unendlich werden, und bringt man die letzte Gleichung in die Form

$$(z_2 - z_3)\varphi(x, z_1) + (z_3 - z_1)\varphi(x, z_2) + (z_1 - z_2)\varphi(x, z_3) = \mathsf{L}\frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_1)}{c_3 - c_1},$$

so folgt in der That, wenn $\varphi(x, z) = \omega(x)z^2 + \Lambda(x)z + \pi(x)$ eingesetzt wird, wie unmittelbar zu sehen

$$\mathsf{L} = (c_3 - c_1)\omega(x)(z_2 - z_3),$$

so dass die durch Gleichsetzen von z_2 und z_3 hervorgebrachte Unendlichkeit aus dem Ausdrucke für $\varphi(x, z_1)$ wieder herausfällt.

$$\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\,\varphi(x,\ z_\mu)\frac{\partial}{\partial z_\mu}\int\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\,dz_\rho = \mathsf{L} - \frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\,dz_\rho,$$

worin ρ irgend eine der Zahlen $1 \ldots n$ sein darf.

Wir können an diese für die rechte Seite der Differentialgleichung (3) gefundene Form schon einige allgemeine Schlüsse knüpfen. Da unter der Annahme, dass nicht schon zwischen $x,\ z_1,\ z_2, \ldots z_n$ ein algebraischer Zusammenhang stattfinde, die Gleichung (4) für alle Werthe von $x,\ z_1, z_2, \ldots z_n$, c identisch befriedigt sein musste, so wird sie also auch bestehen, wenn man für $z_1,\ z_2, \ldots z_n$ willkührliche andere Integrale $Z_1,\ Z_2, \ldots Z_n$ der Differentialgleichung (3) einsetzt, und somit

$$\varphi(x, f(x,\ Z_1,\ Z_2, \ldots Z_n,\ c)) = \frac{\partial f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)}{\partial Z_1}\varphi(x,\ Z_1) + \cdots + \frac{\partial f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)}{\partial Z_n}\varphi(x,\ Z_n) \tag{12}$$

sein; da aber

$$\varphi(x,\ Z_\rho) = \frac{dZ_\rho}{dx} \tag{13}$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{\partial f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)}{\partial Z_1}\frac{dZ_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)}{\partial Z_n}\frac{dZ_n}{dx} = \varphi(x,\ f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)) \tag{14}$$

oder

$$\frac{df(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)}{dx} = \varphi(x,\ f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c)), \tag{15}$$

woraus folgt, dass wiederum

$$Z = f(x,\ Z_1, \ldots Z_n,\ c) \tag{16}$$

ein Integral der Differentialgleichung (3) ist, und zwar wird es das allgemeine Integral derselben sein, wenn durch Einsetzen der Integrale

$Z_1, \ldots Z_n$ in $f(x, z_1, \ldots z_n, c)$ statt der Grössen $z_1, \ldots z_n$ die willkührliche Constante c nicht herausfällt [1]. Wir erhalten somit den folgenden Satz, welcher als ein specieller Fall des von mir bewiesenen Satzes (s. allg. Untersuchungen etc. Kapitel II) von der Erhaltung der algebraischen Beziehung

---

[1] Es mögen hier noch einige Bemerkungen zu dem eben bewiesenen Satze Platz finden, die theils zum allgemeinen Verständnisse desselben nöthig sind, theils noch zum Zwecke anderer Betrachtungen im Laufe dieser Arbeit verwerthet werden. Da man in der Beziehung

$$(\alpha) \qquad z = f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c)$$

für z_1 irgend ein anderes Integral setzen darf, wenn nur für z ein anderes passendes Integral substituirt wird, so kann man auch $z_2 = z_1$ annehmen; da man jedoch vorausgesetzt hat, dass das allgemeine Integral sich nicht schon durch x und $n - 1$ particuläre Integrale algebraisch ausdrücken lassen soll, andererseits aber z doch wieder nach dem bewiesenen Satze ein Integral der Differentialgleichung bleibt, so folgt, dass, wenn man in dem Ausdrucke (α) zwei Integrale der rechten Seite einander gleich setzt, die Constante c von selbst herausfallen muss, und die Beziehung (α) eine identische sein wird, und dies ist eine charakteristische Eigenschaft jener algebraischen Relation; so wird die für die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = \omega(x)z^2 + A(x)z + \pi(x)$$

geltende Beziehung

$$z = \frac{c_3 z_1(z_2 - z_3) + c z_2(z_3 - z_1)}{c_3(z_2 - z_3) + c(z_3 - z_1)},$$

weil z sich nicht schon durch x, z_1 und z_2 algebraisch ausdrücken lässt, für die Substitution $z_2 = z_1$ in $z = z_1$ übergehen, also in eines der particulären Integrale. Eine weitere Bemerkung, die ebenso wie die frühere, vorzüglich im Hinblicke auf die analogen Untersuchungen für Differentialgleichungen höherer Ordnung gemacht werden mag, bezieht sich auf den Fall, dass die Differentialgleichung algebraische Integrale besitzt; man sieht sogleich, dass, wenn man in (α) dem c denjenigen Werth giebt, welcher das allgemeine Integral z in das particuläre algebraische Integral überführt, sich schon zwischen $z_1, z_2, \ldots z_n$ und x eine algebraische Beziehung der Voraussetzung widerstreitend ergeben würde, es muss der entsprechende Werth von c in diesem Falle also stets derart sein, dass die entstehende Relation an sich eine identisch wird. So liefert nach S. 82 meines Buches die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = Az^2 + Bz + C,$$

worin A, B, C algebraische Functionen von x bedeuten, für den Fall, dass dieselbe zwei zwischen Integralen von Differentialgleichungen betrachtet werden kann, aber, wie man durch Vergleichung mit dem allgemeinen Theoreme sieht, für Differentialgleichungen erster Ordnung eine völlige Willkühr aller Integrale bis auf eines gestattet:

Findet zwischen dem allgemeinen Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung und n algebraisch von einander unabhängigen particulären Integralen derselben, der unabhängigen Variabeln und einer willkührlichen Constanten eine algebraische Beziehung statt, so darf man n der Integrale

---

particuläre algebraische Integrale ξ_1 und ξ_2 besitzt, die folgende Beziehung zwischen dem allgemeinen z und einem particulären Integrale z_0

$$(\beta) \qquad z = \frac{(c_0\xi_1 - c\xi_2)z_0 + (c - c_0)\xi_1\xi_2}{(c_0 - c)z_0 + (c\xi_1 - c_0\xi_2)},$$

und setzt man hierin $z = \xi_1$, so folgt unmittelbar

$$c\xi_1(z_0 - \xi_1) = c\xi_2(z_0 - \xi_1)$$

d. h. $c = 0$, und für diesen Werth der Constanten fällt z_0 ganz aus der Beziehung heraus.

Andererseits ist klar, dass, wenn man in (α) irgend eines der Integrale $z_1, z_2, \ldots z_n$ durch ein algebraisches Integral der Differentialgleichung ersetzt, die Constante c von selbst herausfallen muss, weil sonst das allgemeine Integral wieder algebraisch durch nur $n - 1$ Integrale ausdrückbar sein würde; so wird, wenn in (β) $z_0 = \xi_1$ gesetzt wird, $z = \xi_1$, also wieder eines jener particulären algebraischen Integrale. Es mag noch hinzugefügt werden, dass sich die Relation (β), wie man unmittelbar sieht, in die Form setzen lässt

$$(\gamma) \qquad \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2} = \frac{c}{c_0}\,\frac{z_0 - \xi_1}{z_0 - \xi_2},$$

woraus folgt, dass, wenn

$$(\delta) \qquad \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2} = Z, \quad \frac{z_0 - \xi_1}{z_0 - \xi_2} = Z_0$$

gesetzt wird, die Beziehung in

$$(\varepsilon) \qquad Z = \frac{c}{c_0} Z_0,$$

mithin in einen von x freien Zusammenhang übergeht, in welchem das allgemeine und ein particuläres Integral der durch die Substitution (δ) hervorgehenden Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dZ}{dx} = A(\xi_1 - \xi_2)Z$$

stehen.

durch willkührliche andere, die aber mit den früheren zum Theil übereinstimmen können, ersetzen, immer wird ein $(n+1)^{\text{tes}}$ *Integral der Differentialgleichung existiren, welches mit den n neu gewählten wieder denselben Functionalausdruck befriedigt.*

Setzt man nunmehr in (2) $z = z_1$, so wird nur eines der Integrale der rechten Seite z. B. z_1 durch ein anderes zu ersetzen sein, und da jedes andere wiederum nach (2) die Form hat

$$f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, k),$$

worin k irgend einen constanten, hier einen im Allgemeinen von c abhängigen Werth haben wird, so wird die Gleichung

$$z = f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c) \tag{17}$$

die Beziehung

$$z_1 = f\{x, f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, k), z_2, \ldots z_n, c\} \tag{18}$$

hervorrufen [1], welche, da $z_1, z_2, \ldots z_n$ nicht schon selbst in einem algebraischen Zusammenhange stehen sollten, eine identische sein muss.

---

[1] So wird, wenn in der in der vorigen Anmerkung gegebenen Beziehung

$$z = \frac{c_3 z_1(z_2 - z_3) + c z_2(z_3 - z_1)}{c_3(z_2 - z_3) + c(z_3 - z_1)}$$

z durch z_1 ersetzt wird, wie unmittelbar zu sehen,

$$z_1 = \frac{c_3 z_1(z_2 - z_3) + k z_2(z_3 - z_1)}{c_3(z_2 - z_3) + k(z_3 - z_1)}$$

zu substituiren sein, worin

$$k = \frac{c c_3}{c - c_3}$$

ist. Es mag hier noch folgende Eigenschaft einer algebraischen Beziehung zwischen dem allgemeinen und einer Anzahl von particulären Integralen Erwähnung finden. Sei die algebraische Beziehung wieder

$$z = f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c) \tag{α}$$

oder

$$z^\lambda + f_1(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c) z^{\lambda-1} + \cdots + f_\lambda(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c) = 0, \tag{β}$$

worin $f_1, f_2, \ldots f_n$ rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen sein mögen, und

Untersuchen wir nun zuerst den Fall, in welchem $f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c)$ eine ganze Function der Grössen $z_1, z_2, \ldots z_n$ darstellt, und denken uns dieselbe nach Potenzen von z_1 in der Form geordnet

(19) $$f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c)$$
$$= f_0(x, z_2, \ldots z_n, c) z_1^{\mu} + f_1(x, z_2, \ldots z_n, c) z_1^{\mu-1} + \cdots + f_\mu(x, z_2, \ldots z_n, c),$$

---

die in dem Sinne als irreductibel aufgefasst werden mag, dass sie sich nicht in Factoren zerlegen lässt, deren Coefficienten rational aus $x, z_1, z_2, \ldots z_n$ zusammengesetzt sind, ohne Rücksicht auf etwa eintretende Constanten. Vertauscht man in (a) zwei der Integrale der rechten Seite mit einander z. B. z_1 und z_2, so wissen wir nach dem allgemeinen Satze von der Erhaltung der algebraischen Beziehung, dass, indem nur z_2 statt z_1 und z_1 statt z_2 gesetzt ist, nothwendig z wieder ein Integral, und da c im Allgemeinen nicht herausfällt, das allgemeine Integral der Differentialgleichung bleiben wird; setzen wir

(γ) $$Z = f(x, z_2, z_1, z_3, \ldots z_n, c),$$

so wird auch Z nach (a) in der Form darstellbar sein müssen

(δ) $$Z = f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, k),$$

worin k eine Function von c sein wird. Nach (β) wird nun Z durch die irreductible Gleichung definirt sein

$$Z^\lambda + f_1(x, z_1, z_2, \ldots z_n, k) Z^{\lambda-1} + \cdots + f_\lambda(x, z_1, z_2, \ldots z_n, k) = 0$$

und wird mit der nach (a) und (γ) bestehenden Gleichung

$$Z^\lambda + f_1(x, z_2, z_1, \ldots z_n, c) Z^{\lambda-1} + \cdots + f_\lambda(x, z_2, z_1, \ldots z_n, c) = 0$$

eine Lösung gemein haben, also mit ihr identisch sein, und es wird somit für die rationalen Coefficienten der Gleichung (β) die Beziehung bestehen

(ε) $$f_\lambda(x, z_2, z_1, \ldots z_n, c) = f_\lambda(x, z_1, z_2, \ldots z_n, k),$$

und eine Vertauschung der Grössen $z_1, z_2, \ldots z_n$ daher keine Veränderung der rationalen Functionen hervorbringen, wenn nur statt c eine passende Constante k gesetzt wird; so wird die oben behandelte Relation

$$z = \frac{c_3 z_1 (z_2 - z_3) + c z_2 (z_3 - z_1)}{c_3 (z_2 - z_3) + c (z_3 - z_1)},$$

die selbst schon rational ist, wenn z_1 mit z_2 vertauscht und c durch $k = \frac{c_3^2}{c}$ ersetzt wird, unverändert bleiben.

so dass sich also

$$(20)\qquad f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, k)$$
$$= f_0(x, z_2, \ldots z_n, k) z_1^{\mu} + f_1(x, z_2, \ldots z_n, k) z_1^{\mu-1} + \cdots + f_{\mu}(x, z_2, \ldots z_n, k)$$

ergiebt, so folgt aus (18), (19) und (20)

$$(21)\qquad z_1 =$$
$$f_0(x, z_2, \ldots z_n, c)\{f_0(x, z_2, \ldots z_n, k) z_1^{\mu} + f_1(x, z_2, \ldots z_n, k) z_1^{\mu-1} + \ldots + f_{\mu}(x, z_2, \ldots z_n, k)\}^{\mu}$$
$$+ f_1(x, z_2, \ldots z_n, c)\{f_0(x, z_2, \ldots z_n, k) z_1^{\mu} + \ldots + f_{\mu}(x, z_2, \ldots z_n, k)\}^{\mu-1}$$
$$+ \ldots + f_{\mu}(x, z_2, \ldots z_n, c),$$

und hieraus, da die Gleichung eine für alle $z_1, z_2, \ldots z_n$ identische sein soll, wenn $\mu > 1$,

$$f_0(x, z_2, \ldots z_n, c) f_0(x, z_2, \ldots z_n, k)^{\mu} = 0;$$

da nun aber keiner der beiden Factoren verschwinden kann, weil k ebenso wie c, indem es eine von dieser Grösse abhängige Constante bedeutet, völlig willkührlich ist, so wird $\mu = 1$,(¹) und also z eine ganze lineare Function von z_1 sein müssen, und da dasselbe auch von den anderen Grössen $z_2, z_3, \ldots z_n$ gilt, so wird z eine ganze lineare Function der n Grössen $z_1, z_2, \ldots z_n$ sein, die wir, ohne die Allgemeinheit des Resultats zu beeinträchtigen, nur der Kurze der Rechnung halber in der einfachsten Form voraussetzen wollen

$$(22)\qquad \begin{aligned} z = m_0 + m_1 z_1 &+ m_{12} z_1 z_2 + m_{13} z_1 z_3 + \cdots\cdots + m_{1n} z_1 z_n \\ &+ m_2 z_2 \quad + m_{23} z_2 z_3 + \cdots\cdots + m_{2n} z_2 z_n \\ &\qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad\qquad + m_{n-1} z_{n-1} + m_{n-1n} z_{n-1} z_n \\ &\qquad\qquad\qquad + m_n z_n \\ &= f(x, z_1, z_2, \ldots z_n\, c), \end{aligned}$$

worin die Grössen m von x und c algebraisch abhängen.

Nachdem für diesen Fall die Gestalt der Function f der Gleichung (2) gefunden, wird wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c} z_1 + \frac{\partial m_{12}}{\partial c} z_1 z_2 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c} z_1 z_n \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{\partial m_n}{\partial c} z_n \end{aligned}$$

(¹) und nach (21)

$$f_0(x, z_2, \ldots z_n, c) f_0(x, z_2, \ldots z_n, k) = 1.$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = m_1 + m_{12}z_2 + m_{13}z_3 + \cdots + m_{1n}z_n$$

der Gleichung (11) gemäss für $\rho = 1$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} = \frac{m_1 + m_{12}z_2 + m_{13}z_3 + \cdots + m_{1n}z_n}{\frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c}z_1 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_1 z_n + \cdots + \frac{\partial m_n}{\partial c}z_n},$$

also

$$\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1$$

$$= \frac{m_1 + m_{12}z_2 + \cdots + m_{1n}z_n}{\frac{\partial m_1}{\partial c} + \frac{\partial m_{12}}{\partial c}z_2 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_n} \log\left\{\frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c}z_1 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_1 z_n + \cdots + \frac{\partial m_n}{\partial c}z_n\right\}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z_\mu}\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \mathbf{P}\log\mathbf{Q}$$

$$+\frac{m_1 + m_{12}z_2 + \cdots + m_{1n}z_n}{\frac{\partial m_1}{\partial c} + \frac{\partial m_{12}}{\partial c}z_2 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_n} \cdot \frac{\frac{\partial m_\mu}{\partial c} + \frac{\partial m_{1\mu}}{\partial c}z_1 + \cdots + \frac{\partial m_{\mu-1\mu}}{\partial c}z_{\mu-1} + \frac{\partial m_{\mu\mu+1}}{\partial c}z_{\mu+1} + \cdots + \frac{\partial m_{\mu n}}{\partial c}z_n}{\frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c}z_1 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_1 z_n + \cdots + \frac{\partial m_n}{\partial c}z_n},$$

worin der logarithmische Posten nur seiner Form nach bezeichnet ist; daraus ergiebt sich

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} \frac{\partial}{\partial z_\mu}\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \mathbf{R}\log\mathbf{Q}$$

$$+\frac{\frac{\partial m_\mu}{\partial c} + \frac{\partial m_{1\mu}}{\partial c}z_1 + \cdots + \frac{\partial m_{\mu-1\mu}}{\partial c}z_{\mu-1} + \frac{\partial m_{\mu\mu+1}}{\partial c}z_{\mu+1} + \cdots + \frac{\partial m_{\mu n}}{\partial c}z_n}{\frac{\partial m_1}{\partial c} + \frac{\partial m_{12}}{\partial c}z_2 + \frac{\partial m_{13}}{\partial c}z_3 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_n},$$

und ebenso, weil

$$\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\, dz_1 = \mathbf{S} \log \mathbf{Q}$$

$$+ \frac{m_1 + m_{12}z_2 + \cdots + m_{1n}z_n}{\frac{\partial m_1}{\partial c} + \frac{\partial m_{12}}{\partial c}z_2 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_n} \frac{\frac{\partial^2 m_0}{\partial c \partial x} + \frac{\partial^2 m_1}{\partial c \partial x}z_1 + \cdots + \frac{\partial^2 m_{1n}}{\partial c \partial x}z_1 z_n + \cdots + \frac{\partial^2 m_n}{\partial c \partial x}z_n}{\frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c}z_1 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_1 z_n + \cdots + \frac{\partial m_n}{\partial c}z_n}$$

ist,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\, dz_1 = \mathbf{T} \log \mathbf{Q} + \frac{\frac{\partial^2 m_0}{\partial c \partial x} + \frac{\partial^2 m_1}{\partial c \partial x}z_1 + \cdots + \frac{\partial^2 m_{1n}}{\partial c \partial x}z_1 z_n + \cdots + \frac{\partial^2 m_n}{\partial c \partial x}z_n}{\frac{\partial m_1}{\partial c} + \frac{\partial m_{12}}{\partial c}z_2 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_n}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (11) ein, so folgt, wenn man beachtet, dass $\varphi(x, z_1)$ eine algebraische Function von x und z_1 sein muss, die logarithmischen Glieder aus dem Endausdrucke also herausfallen müssen,

$$\varphi(x, z_1) = \mathbf{L} \, . \frac{\frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c}z_1 + \frac{\partial m_{12}}{\partial c}z_1 z_2 + \cdots + \frac{\partial m_n}{\partial c}z_n}{m_1 + m_{12}z_2 + \cdots + m_{1n}z_n}$$

$$- \frac{\frac{\partial^2 m_0}{\partial c \partial x} + \frac{\partial^2 m_1}{\partial c \partial x}z_1 + \cdots + \frac{\partial^2 m_{1n}}{\partial c \partial x}z_1 z_n + \cdots + \frac{\partial^2 m_n}{\partial c \partial x}z_n}{\frac{\partial m_1}{\partial c} + \frac{\partial m_{12}}{\partial c}z_2 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_n}$$

$$- \sum_2^n {}_{\mu}\, \varphi(x, z_\mu) \frac{\frac{\partial m_\mu}{\partial c} + \frac{\partial m_{1\mu}}{\partial c}z_1 + \cdots + \frac{\partial m_{\mu-1\,\mu}}{\partial c}z_{\mu-1} + \frac{\partial m_{\mu\,\mu+1}}{\partial c}z_{\mu+1} + \cdots + \frac{\partial m_{\mu n}}{\partial c}z_n}{\frac{\partial m_1}{\partial c} + \frac{\partial m_{12}}{\partial c}z_2 + \frac{\partial m_{13}}{\partial c}z_3 + \cdots + \frac{\partial m_{1n}}{\partial c}z_n},$$

worin $\mathbf{L}$ von $x, z_2, z_3, \ldots z_n$ und c algebraisch abhängt. Setzt man nun, da die linke Seite der Gleichung nur von x und z_1 abhängt, $z_2, z_3, \ldots z_n$ gleich beliebigen Constanten, so folgt, dass für willkührliche z_1 die Function $\varphi(x, z_1)$ eine lineare ganze Function von z_1 bedeutet, und dass daher in diesem Falle die Differentialgleichung (3) die Form annimmt

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)z + \varphi_2(x),$$

für welche bekanntlich die gesuchte Relation zwischen dem allgemeinen und particulären Integralen für willkührliche Functionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ lautet (s. S. 90 der »allg. Untersuchungen»)

$$z = \frac{c - c_2}{c_1 - c_2} z_1 + \frac{c - c_1}{c_2 - c_1} z_2 .$$

Wir erhalten somit den Satz:

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine ganze Function irgend einer Anzahl particulärer Integrale sein soll, deren Coefficienten von der willkührlichen Constanten und der unabhängigen Variabeln algebraisch abhängen, ist die der linearen.

Gehen wir jetzt zu dem allgemeineren Falle über, in dem sich z als rationale Function von $z_1, z_2, \ldots z_n$ ausdrücken lässt, deren Coefficienten algebraisch von x und c abhängen, so wird wiederum aus der Gleichung (18) unter der Voraussetzung, dass

$$f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c) = \frac{f_0(x, z_2, \ldots z_n, c) z_1^{\mu} + f_1(x, z_2, \ldots z_n, c) z_1^{\mu-1} + \cdots + f_\mu(x, z_2, \ldots z_n, c)}{\varphi_0(x, z_2, \ldots z_n, c) z_1^{\nu} + \varphi_1(x, z_2, \ldots z_n, c) z_1^{\nu-1} + \cdots + \varphi_\nu(x, z_2, \ldots z_n, c)}$$

ist, aus den auf S. 77 meiner »allg. Untersuchungen» angegebenen Gründen sich $\mu = \nu = 1$ ergeben, und da dies für alle Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ gilt, so erhält man die nothwendige Form einer solchen rationalen Beziehung als eine in allen particulären Integralen linear gebrochene Function

$$z = \frac{m_0 + m_1 z_1 + m_{12} z_1 z_2 + \cdots}{\mu_0 + \mu_1 z_1 + \mu_{12} z_1 z_2 + \cdots} = f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, c),$$

oder kürzer geschrieben

$$z = \frac{A_0 + A_1 z_1}{B_0 + B_1 z_1}, \tag{23}$$

worin A_0, A_1, B_0, B_1 lineare ganze Functionen von $z_2, \ldots z_n$ und algebraische Functionen von x und c sind. Da nun aus (23) folgt, dass

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} = \frac{A_1 B_0 - A_0 B_1}{z_1^2 \left[B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}\right] + z_1 \left[\left(B_1 \frac{\partial A_0}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_0}{\partial c}\right) + \left(B_0 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_0 \frac{\partial B_1}{\partial c}\right)\right] + \left(B_0 \frac{\partial A_0}{\partial c} - A_0 \frac{\partial B_0}{\partial c}\right)},$$

also

$$\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \frac{A_1 B_0 - A_0 B_1}{\left(B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}\right)(a - b)} \log\left(\frac{z_1 - a}{z_1 - b}\right)$$

ist, worin a und b als Lösungen des obigen Nenners algebraische Functionen von $z_2, \ldots z_n$, x und c sind,(¹) so erhält man

---

(¹) Sind die beiden Lösungen a und b einander gleich, so wird

$$\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}} \frac{1}{z_1 - a}$$

und daher

$$\frac{\partial}{\partial z_\mu} \int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}} \frac{\frac{\partial a}{\partial z_\mu}}{(z_1 - a)^2} + \frac{1}{z_1 - a} \frac{\partial}{\partial z_\mu} \left(\frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}}\right)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}} \frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{(z_1 - a)^2} + \frac{1}{z_1 - a} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}}\right),$$

woraus sich

$$\varphi(x, z_1) = \mathsf{L} \frac{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}}{A_1 B_0 - A_0 B_1} (z_1 - a)^2$$

$$+ \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}}{A_1 B_0 - A_0 B_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}}\right)(z_1 - a)$$

$$+ \sum_2^n {}_\mu\, \varphi(x, z_\mu) \left\{ \frac{\partial a}{\partial z_\mu} - \frac{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}}{A_1 B_0 - A_0 B_1} \frac{\partial}{\partial z_\mu} \left(\frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{B_1 \frac{\partial A_1}{\partial c} - A_1 \frac{\partial B_1}{\partial c}}\right)(z_1 - a) \right\}$$

also wieder wie oben als eine ganze Function zweiten Grades in z_1 ergiebt.

$$\frac{\partial}{\partial z_\mu}\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\, dz_1 = \mathbf{P}\log \mathbf{Q} +$$

$$\frac{(A_1B_0-A_0B_1)}{a-b}\,\frac{z_1\left[\frac{\partial b}{\partial z_\mu}-\frac{\partial a}{\partial z_\mu}\right]+\left(b\frac{\partial a}{\partial z_\mu}-a\frac{\partial b}{\partial z_\mu}\right)}{z_1^2\left[B_1\frac{\partial A_1}{\partial c}-A_1\frac{\partial B_1}{\partial c}\right]+z_1\left[\left(B_1\frac{\partial A_0}{\partial c}-A_1\frac{\partial B_0}{\partial c}\right)+\left(B_0\frac{\partial A_1}{\partial c}-A_0\frac{\partial B_1}{\partial c}\right)\right]+\left(B_0\frac{\partial A_0}{\partial c}-A_0\frac{\partial B_0}{\partial c}\right)}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\, dz_1 = \mathbf{S}\log \mathbf{Q}$$

$$+\frac{(A_1B_0-A_0B_1)}{a-b}\,\frac{z_1\left[\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial x}\right]+\left(b\frac{\partial a}{\partial x}-a\frac{\partial b}{\partial x}\right)}{z_1^2\left[B_1\frac{\partial A_1}{\partial c}-A_1\frac{\partial B_1}{\partial c}\right]+\cdots+\left(B_0\frac{\partial A_0}{\partial c}-A_0\frac{\partial B_0}{\partial c}\right)},$$

und hieraus nach (11), wenn man wiederum aus den angegebenen Gründen die logarithmischen Glieder fortlässt

$$\varphi(x, z_1) =$$

$$\mathsf{L}\,\frac{z_1^2\left[B_1\frac{\partial A_1}{\partial c}-A_1\frac{\partial B_1}{\partial c}\right]+z_1\left[\left(B_1\frac{\partial A_0}{\partial c}-A_1\frac{\partial B_0}{\partial c}\right)+\left(B_0\frac{\partial A_1}{\partial c}-A_0\frac{\partial B_1}{\partial c}\right)\right]+\left(B_0\frac{\partial A_0}{\partial c}-A_0\frac{\partial B_0}{\partial c}\right)}{A_1B_0-A_0B_1}$$

$$-\frac{z_1\left[\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial x}\right]+\left(b\frac{\partial a}{\partial x}-a\frac{\partial b}{\partial x}\right)}{a-b}-\sum_{2}^{n}{}_{\mu}\,\varphi(x, z_\mu)\frac{\left\{z_1\left[\frac{\partial b}{\partial z_\mu}-\frac{\partial a}{\partial z_\mu}\right]+\left(b\frac{\partial a}{\partial z_\mu}-a\frac{\partial b}{\partial z_\mu}\right)\right\}}{a-b},$$

also eine ganze Function zweiten Grades in der willkührlichen Grösse z_1, und es wird daher in diesem Falle die Differentialgleichung die Form annehmen

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)z^2 + \varphi_2(x)z + \varphi_3(x), \tag{24}$$

worin $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ algebraische Functionen von x bedeuten; umgekehrt wissen wir aber auch nach S. 99 meines Buches, dass für alle Differentialgleichungen der Form (24) unabhängig von der Beschaffenheit der Coefficienten eine lineargebrochene Beziehung statt hat, und wir erhalten somit den Satz:

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine rationale gebrochene Function irgend einer Anzahl particulärer Integrale sein soll, deren Coefficienten von der willkührlichen Constanten und der unabhängigen Variabeln algebraisch abhängen, ist die durch die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)z^2 + \varphi_2(x)z + \varphi_3(x)$$

dargestellte, und für alle diese besteht zwischen dem allgemeinen und drei particulären Integralen die Beziehung

$$z = \frac{c_3 z_1(z_2 - z_3) + c z_2(z_3 - z_1)}{c_3(z_2 - z_3) + c(z_3 - z_1)} . \tag{25}$$ [1]

---

[1] Es ist wohl nicht überflüssig zu bemerken, dass, wenn auch für die der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)z^2 + \varphi_2(x)z + \varphi_3(x) \tag{α}$$

zugehörigen 4 Integrale z, z_1, z_2, z_3 die durch die Gleichung (25) ausgedrückte Beziehung besteht, welche von dem expliciten x frei ist, doch unter gewissen Umständen das allgemeine Integral schon durch zwei particuläre Integrale in rationaler Form darstellbar sein kann, in welche jedoch die unabhängige Variable x explicite eintritt; denn bekanntlich geht die obige Differentialgleichung durch die Substitution

$$z = -\frac{1}{\varphi_1(x)} \frac{d \log u}{dx} \tag{β}$$

in die homogene lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu = 0 \tag{γ}$$

über, in welcher

$$P = -\left(\frac{\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)} + \varphi_2(x)\right), \qquad Q = \varphi_1(x)\varphi_3(x) \tag{δ}$$

ist, und es drückt sich das allgemeine Integral von (α) mit Hülfe zweier particulärer Integrale z_1, z_2 eben dieser Differentialgleichung und den beiden diesen entsprechenden particulären Integralen u_1, u_2 der Differentialgleichung (γ) in der Form aus

$$z = \frac{u_1 z_1 + c u_2 z_2}{u_1 + c u_2}, \tag{ε}$$

Die Untersuchung wäre somit für alle diejenigen Fälle abgeschlossen, in denen das allgemeine Integral sich als *rationale* Function irgend einer Anzahl von particulären Integralen ausdrücken lässt, deren Coefficienten algebraisch aus x und der willkührlichen Constanten zusammengesetzt sind; dass es aber noch ausserdem Differentialgleichungen erster Ordnung giebt, für welche das allgemeine Integral algebraisch, wenn auch nicht rational, aus einer Anzahl von particulären Integralen, der unabhängigen

---

worin c eine willkührliche Constante bedeutet. Wenn nun z. B. der Quotient der beiden Integrale u_1, u_2 eine algebraische Function, also

$$(\eta) \qquad \frac{u_2}{u_1} = \omega(x)$$

oder

$$(\zeta) \qquad z_1 - z_2 = \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} \frac{1}{\varphi_1(x)}$$

ist, so wird (ε) in eine Beziehung der oben angegebenen Form übergehen

$$(\vartheta) \qquad z = \frac{z_1 + c\omega(x)z_2}{1 + c\omega(x)};$$

und zu dieser Form mag noch die folgende ergänzende Bemerkung hinzugefügt werden. Ich habe nämlich im § 9 meines Buches gezeigt, dass, wenn zwischen zwei Fundamentalintegralen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und der unabhängigen Variabeln x irgend eine algebraische Beziehung stattfindet, dann auch zwei particuläre Fundamentalintegrale existiren, welche homogenen linearen algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen, also die Form haben müssen

$$U_1 = e^{\int \Omega_1(x)dx}, \qquad U_2 = e^{\int \Omega_2(x)dx},$$

worin $\Omega_1(x)$ und $\Omega_2(x)$ algebraische Functionen bedeuten; dann werden aber nach (β) die entsprechenden particulären Integrale der Differentialgleichung (α)

$$Z_1 = -\frac{\Omega_1(x)}{\varphi_1(x)}, \qquad Z_2 = -\frac{\Omega_2(x)}{\varphi_1(x)}$$

algebraische Functionen von x sein, und nach dem S. 82 meines Buches bewiesenen Satze drückt sich dann das allgemeine Integral schon mit Hülfe *eines* particulären in algebraischer Weise in der Form aus

$$z = \frac{(c_1Z_1 - cZ_2)z_1 + (c - c_1)Z_1Z_2}{(c_1 - c)z_1 + cZ_1 - c_1Z_2}.$$

Variabeln und einer willkührlichen Constanten zusammengesetzt ist, geht schon daraus hervor, dass eine willkührliche algebraische Substitution

$$z = F(x, Z) \tag{26}$$

auf die Differentialgleichung (24) ausgeübt dieselbe in eine andere algebraische Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dZ}{dx} = \Phi(x, Z) \tag{27}$$

überführt, für welche die algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und drei particulären Integralen erhalten wird, wenn man den Ausdruck (26) für $z = z, z_1, z_2, z_3$ mit den entsprechenden Werthen $Z = Z, Z_1, Z_2, Z_3$ in die oben gefundene rationale lineare Relation (25) einsetzt.

Man könnte nun zur Untersuchung der Möglichkeit einer beliebigen algebraischen Beziehung zwischen dem allgemeinen und n particulären Integralen wiederum von der Relation

$$z_1 = f\{x, f(x, z_1, z_2, \ldots z_n, k), z_2, \ldots z_n, c\}$$

ausgehen und, wie es eben für rationale Functionen geschehen, hier für algebraische Functionen nachweisen, dass dies nur für solche algebraische Functionen möglich ist, welche aus einer rationalen, also nach dem bisher bewiesenen aus einer rationalen linearen durch eine algebraische Substitution von der Form (26) abgeleitet sind, und für diesen Nachweis wäre es, wie schon aus den Betrachtungen über rationale Beziehungen ersichtlich ist, gleichgültig, ob x in die f-Function explicite eintritt oder nicht. Ich ziehe es aber vor, mich hier einer anderen Methode zu bedienen, um die Anwendung der Pfaff'schen Differentialgleichung auf derartige Probleme zu zeigen und die Untersuchung der Integrabilitätsbedingungen einmal an einer grösseren Klasse solcher Differentialgleichungen durchzuführen. Es wird nach dem obigen genügen, hier den Fall zu erörtern, in welchem die unabhängige Variable in jene algebraische Relation nicht explicite eintritt, die Function f in (2) also x nicht enthält; da dann in der Gleichung (11)

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial z_\rho}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right) dz_\rho = 0$$

ist, so wird, wenn wir $z_1, z_2, \dots z_n$ (z_ρ ausgeschlossen) willkührlichen Constanten gleichgesetzt denken, die Function $\varphi(x, z_\rho)$ die Form annehmen

$$\varphi(x, z_\rho) = \varphi_1(x)\psi_1(z_\rho) + \varphi_2(x)\psi_2(z_\rho) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_\rho) \tag{28}$$

und *die nothwendige Form aller Differentialgleichungen, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function von n algebraisch von einander unabhängigen Integralen und der willkührlichen Constanten ist, in welche die unabhängige Variable nicht eintritt, ist somit*

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z), \tag{29}$$

worin die rechts stehenden Functionen sämmtlich algebraisch sind.

Wir gehen nun auf eine genauere Untersuchung der Differentialgleichungen von der Form (29) ein, für welche zwischen dem allgemeinen und n particulären Integralen eine Beziehung

$$z = f(z_1, z_2, \dots z_n, c) \tag{29.a}$$

existirt, in welcher die Variable x explicite nicht vorkommt. Beachtet man, dass für $z, z_1, \dots z_n$ die Gleichungen bestehen

$$\left|\begin{array}{l} \frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z) \\ \frac{dz_1}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z_1) + \varphi_2(x)\psi_2(z_1) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dz_n}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z_n) + \varphi_2(x)\psi_2(z_n) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_n), \end{array}\right. \tag{30}$$

aus denen sich die Differentialgleichung zusammensetzt

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & \cdots & dz_n \\ \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \psi_1(z_2) & \cdots & \psi_1(z_n) \\ \psi_2(z) & \psi_2(z_1) & \psi_2(z_2) & \cdots & \psi_2(z_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_n(z) & \psi_n(z_1) & \psi_n(z_2) & \cdots & \psi_n(z_n) \end{vmatrix} = 0, \tag{31}$$

so kann man (30) als eine dieser Differentialgleichung genügende Beziehung betrachten, für welche nur zu untersuchen ist, in wie weit die Variabeln $z_1, z_2, \dots z_n$ als von einander unabhängig zu betrachten sind. Bildet man aus (30) das Totaldifferential

$$dz = \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n} dz_n, \tag{32}$$

und setzt aus (30) und (32) die Ausdrücke für z und dz in die Differentialgleichung (31) ein, so ergiebt sich ein Ausdruck von der Form

$$P_1 dz_1 + P_2 dz_2 + \cdots + P_n dz_n = 0, \tag{33}$$

in welchem $P_1, P_2, \dots P_n$ algebraische Functionen von $z_1, z_2, \dots z_n$ bedeuten. Wäre z ein Integral von den n unabhängigen Variabeln $z_1, z_2, \dots z_n$, so müssten

$$P_1 = 0 \quad P_2 = 0 \cdots P_n = 0 \tag{34}$$

identisch befriedigt sein und umgekehrt; wir wollen beweisen, dass dies in der That im Allgemeinen der Fall ist. Denn seien die Grössen P alle oder zum Theil von Null verschieden, so wird die Gleichung (33) vermöge der Beziehungen (29.a) die Gestalt annehmen

$$\begin{aligned} P_1\{\varphi_1(x)\psi_1(z_1) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_1)\} + P_2\{\varphi_1(x)\psi_1(z_2) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_2)\} + \cdots \\ \cdots + P_n\{\varphi_1(x)\psi_1(z_n) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_n)\} = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

und diese Gleichung wird vermöge der Annahme, dass zwischen $z_1, z_2, \dots z_n$ und x eine algebraische Beziehung nicht stattfinden sollte, eine für alle Werthe dieser Variabeln identische sein müssen. Differentiirt man nun dieselbe $n - 1$ mal nach einander nach x, so erhält man n lineare Gleichungen in den Grössen $P_1, P_2, \dots P_n$, deren Determinante, wenn nicht sämmtliche P Null sind, verschwinden müsste; es wäre somit

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x)\psi_1(z_1) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_1), & \varphi_1(x)\psi_1(z_2) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_2), & \dots \varphi_1(x)\psi_1(z_n) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z_n) \\ \varphi'_1(x)\psi_1(z_1) + \cdots + \varphi'_n(x)\psi_n(z_1), & \varphi'_1(x)\psi_1(z_2) + \cdots + \varphi'_n(x)\psi_n(z_2), & \dots \varphi'_1(x)\psi_1(z_n) + \cdots + \varphi'_n(x)\psi_n(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x)\psi_1(z_1) + \cdots + \varphi_n^{(n-1)}(x)\psi_n(z_1), & \varphi_1^{(n-1)}(x)\psi_1(z_2) + \cdots + \varphi_n^{(n-1)}(x)\psi_n(z_2), & \dots \varphi_1^{(n-1)}(x)\psi_1(z_n) + \cdots + \varphi_n^{(n-1)}(x)\psi_n(z_n) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(36) \qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \cdots & \varphi'_n(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1(z_1) & \psi_2(z_1) & \cdots & \psi_n(z_1) \\ \psi_1(z_2) & \psi_2(z_2) & \cdots & \psi_n(z_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_1(z_n) & \psi_2(z_n) & \cdots & \psi_n(z_n) \end{vmatrix} = 0,$$

so dass also für den Fall, dass nicht sämmtliche P verschwinden, die eine oder die andere dieser beiden Determinanten verschwinden müsste. Sei zuerst

$$(37) \qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \cdots & \varphi'_n(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0,$$

so folgt nach einem bekannten Satze,(1) dass zwischen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$

---

(1) der von Herrn Frobenius herrührt und im Journal für Mathematik B. 77 bewiesen ist. Es mag hier bemerkt werden, dass man diesen Satz auch auf einem anderen, unmittelbar ersichtlichen Wege herleiten kann; es ist nämlich leicht einzusehen, dass man beliebige n Functionen von x

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x) \cdots \varphi_n(x)$$

stets als particuläre Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung darstellen kann, da, wenn man

$$(\alpha) \qquad y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)$$

setzt, worin $c_1, c_2, \ldots c_n$ willkührliche Constanten sein sollen, und diese Gleichung (α) n mal nach einander differentiirt, also

$$(\beta) \qquad \begin{cases} y' = c_1\varphi'_1(x) + c_2\varphi'_2(x) + \cdots + c_n\varphi'_n(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)} = c_1\varphi_1^{(n-1)}(x) + c_2\varphi_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n\varphi_n^{(n-1)}(x) \\ y^{(n)} = c_1\varphi_1^{(n)}(x) + c_2\varphi_2^{(n)}(x) + \cdots + c_n\varphi_n^{(n)}(x) \end{cases}$$

eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten von der Form

$$(38) \qquad a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) = 0$$

besteht; setzt man den sich aus dieser Beziehung ergebenden Werth von $\varphi_n(x)$ in die Differentialgleichung (29) ein, so geht diese in

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\varphi_1(x)}{a_n}\left\{a_n\psi_1(z) - a_1\psi_n(z)\right\} + \frac{\varphi_2(x)}{a_n}\left\{a_n\psi_2(z) - a_2\psi_n(z)\right\} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\varphi_{n-1}(x)}{a_n}\left\{a_n\psi_{n-1}(z) - a_{n-1}\psi_n(z)\right\}$$

---

erhält, durch Elimination der Grössen $1, c_1, c_2, \ldots c_n$ aus den $n+1$ Gleichungen (α) und (β) die lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung herleitet

$$(\gamma) \qquad \begin{vmatrix} y & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ y' & \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \cdots & \varphi'_n(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{(n-1)} & \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \\ y^{(n)} & \varphi_1^{(n)}(x) & \varphi_2^{(n)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0,$$

welche offenbar jedes y zum Integral haben wird, welches aus (α) durch willkührliche Wahl der Grössen $c_1, c_2, \ldots c_n$ hervorgeht, also auch die Integrale $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$; da nun aber der Coefficient von $y^{(n)}$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \cdots & \varphi'_n(x) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

vermöge der Gleichung (37) verschwindet, so werden die Functionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$ Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sein, und es wird somit zwischen ihnen eine homogene lineare Beziehung von der Form (38) bestehen müssen.

über, deren rechte Seite somit nur aus der Summe von $n - 1$ Producten algebraischer x- und z-Functionen bestünde. Wird ferner die Determinante

$$
(39) \qquad \begin{vmatrix} \psi_1(z_1) & \psi_2(z_1) \cdots \psi_n(z_1) \\ \psi_1(z_2) & \psi_2(z_2) \cdots \psi_n(z_2) \\ \cdots & \cdots \\ \psi_1(z_n) & \psi_2(z_n) \cdots \psi_n(z_n) \end{vmatrix} = 0,
$$

so muss diese Gleichung der Voraussetzung gemäss eine in den Grössen $z_1, z_2, \ldots z_n$ identische sein, und man darf daher $z_2, z_3, \ldots z_n$ willkührlichen Constanten gleich setzen, woraus sich eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten von der Form ergeben würde

$$
(40) \qquad a_1 \psi_1(z_1) + a_2 \psi_2(z_1) + \cdots + a_n \psi_n(z_1) = 0,
$$

welche wiederum für jedes z_1 gelten müsste, und die Benutzung dieser Beziehung würde die Differentialgleichung in die Form

$$
(41) \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{a_n \varphi_1(x) - a_1 \varphi_n(x)}{a_n} \psi_1(z) + \frac{a_n \varphi_2(x) - a_2 \varphi_n(x)}{a_n} \psi_2(z) + \cdots
$$

$$
\cdots + \frac{a_n \varphi_{n-1}(x) - a_{n-1} \varphi_n(x)}{a_n} \psi_{n-1}(z)
$$

überführen — wir finden somit, dass in allen Fällen, in welchen nicht sämmtliche P der Gleichung (33) identisch verschwinden, die Differentialgleichung sich auf die Form bringen lassen muss

$$
(42) \qquad \frac{dz}{dx} = \Phi_1(x) \Psi_1(z) + \Phi_2(x) \Psi_2(z) + \cdots + \Phi_{n-\rho}(x) \Psi_{n-\rho}(z),
$$

worin die Φ und Ψ wiederum algebraische Functionen bezeichnen, und nunmehr angenommen werden darf, dass weder zwichen den Φ noch zwischen den Ψ eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten bestehe. Für den Fall also, dass sich die Differentialgleichung (29) nicht auf eine Differentialgleichung (42) mit weniger ähnlich gestalteten Summanden der rechten Seite zurückführen lässt, wird (30) ein mit einer willkührlichen Constanten behaftetes Integral der Differentialgleichung (29) mit den n von einander unabhängigen Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ liefern. Lässt sich jedoch die Differentialgleichung (29) auf (42) reduciren, so werden je $n-\rho+1$ Integrale derselben wiederum wie früher die $\rho+1$ totalen Differentialgleichungen liefern

$$
(43)\qquad \begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & \cdots & dz_{n-\rho} \\ \Psi_1(z) & \Psi_1(z_1) & \Psi_1(z_2) & \cdots & \Psi_1(z_{n-\rho}) \\ \Psi_2(z) & \Psi_2(z_1) & \Psi_2(z_2) & \cdots & \Psi_2(z_{n-\rho}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Psi_{n-\rho}(z) & \Psi_{n-\rho}(z_1) & \Psi_{n-\rho}(z_2) & \cdots & \Psi_{n-\rho}(z_{n-\rho}) \end{vmatrix} = 0,
$$

$$
(44)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & \cdots & dz_{n-\rho+1} \\ \Psi_1(z) & \Psi_1(z_1) & \Psi_1(z_2) & \cdots & \Psi_1(z_{n-\rho+1}) \\ \Psi_2(z) & \Psi_2(z_1) & \Psi_2(z_2) & \cdots & \Psi_2(z_{n-\rho+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Psi_{n-\rho}(z) & \Psi_{n-\rho}(z_1) & \Psi_{n-\rho}(z_2) & \cdots & \Psi_{n-\rho}(z_{n-\rho+1}) \end{vmatrix} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & \cdots & dz_n \\ \Psi_1(z) & \Psi_1(z_1) & \Psi_1(z_2) & \cdots & \Psi_1(z_n) \\ \Psi_2(z) & \Psi_2(z_1) & \Psi_2(z_2) & \cdots & \Psi_2(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Psi_{n-\rho}(z) & \Psi_{n-\rho}(z_1) & \Psi_{n-\rho}(z_2) & \cdots & \Psi_{n-\rho}(z_n) \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right.
$$

mit der Reihe der resp. Variabeln

$$
(\mathrm{V})\qquad \left\{ \begin{array}{llll} z & z_1 & z_2 \cdots z_{n-\rho-1} & z_{n-\rho} \\ z & z_1 & z_2 \cdots z_{n-\rho-1} & z_{n-\rho+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z_1 & z_2 \cdots z_{n-\rho-1} & z_n, \end{array} \right.
$$

und es fragt sich, wie der Ausdruck (30) als Integral des Systems dieser $\rho+1$ totalen Differentialgleichungen mit $n+1$ Variabeln aufzufassen ist. Setzt man den Werth für z aus (30) und

$$
dz = \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n} dz_n
$$

in die Gleichungen (43) und (44) ein, so erhält man die Beziehungen

$$(45)\quad \begin{cases} Z_{11}\,dz_1 + Z_{12}\,dz_2 + \cdots\cdots\cdots + Z_{1n}\,dz_n = 0 \\ Z_{21}\,dz_1 + Z_{22}\,dz_2 + \cdots\cdots\cdots + Z_{2n}\,dz_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_{\rho+1\,1}\,dz_1 + Z_{\rho+1\,2}\,dz_2 + \cdots + Z_{\rho+1\,n}\,dz_n = 0, \end{cases}$$

und wenn aus diesen $\rho + 1$ Gleichungen die ρ Differentialien

$$dz_{n-\rho+1},\quad dz_{n-\rho+2}, \ldots dz_n$$

eliminirt werden, so ergiebt sich eine totale Differentialgleichung

$$(46)\qquad T_1 dz_1 + T_2 dz_2 + \cdots + T_{n-\rho} dz_{n-\rho} = 0,$$

in welcher $T_1, T_2, \ldots T_{n-\rho}$ algebraische Functionen von $z, z_1, z_2, \ldots z_n$ sind. Wären nun die T-Grössen nicht identisch Null für alle Werthe dieser Variabeln, so folgte aus (46) mit Benutzung der Differentialgleichung (42)

$$(47)\quad T_1\{\Phi_1(x)\Psi_1(z_1) + \cdots + \Phi_{n-\rho}(x)\Psi_{n-\rho}(z_1)\} + T_2\{\Phi_1(x)\Psi_1(z_2) + \cdots + \Phi_{n-\rho}(x)\Psi_{n-\rho}(z_2)\}$$
$$+ \cdots + T_{n-\rho}\{\Phi_1(x)\Psi_1(z_{n-\rho}) + \cdots + \Phi_{n-\rho}(x)\Psi_{n-\rho}(z_{n-\rho})\} = 0,$$

welche wieder, weil der Fall, dass schon eine algebraische Relation zwischen $x, z_1, z_2, \ldots z_n$ besteht, ausgeschlossen war, identisch bestehen muss, und es wird daher genau wie oben durch successive Differentiation nach x sich ergeben, dass, wenn nicht alle T identisch verschwänden, zwischen den $n - \rho$ $\Phi(x)$-Grössen oder zwischen den $n - \rho$ $\Psi(z)$-Grössen eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten bestehen müsste, was als möglich ausgeschlossen ist, da die rechte Seite der Differentialgleichung (42) bereits auf die kleinste Anzahl von Summanden reducirt angenommen wurde. Es werden daher die identischen Beziehungen stattfinden

$$T_1 = 0,\quad T_2 = 0,\quad T_{n-\rho} = 0,$$

und somit $z_1, z_2, \ldots z_{n-\rho}$ unabhängige Variabeln sein; es ist daher (30) in diesem Falle ein mit einer willkührlichen Constanten behaftetes Integral mit $n - \rho$ willkührlichen Variabeln des Systems von $\rho + 1$ totalen Differentialgleichungen (43) und (44) von $n + 1$ Variabeln.

Fassen wir die beiden Fälle, von denen der erste ein specieller Fall des zweiten für $\rho = 0$ ist, zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

Wenn eine Differentialgleichung erster Ordnung die Eigenschaft hat, dass zwischen ihrem allgemeinen Integrale und n ihrer particulären Integrale eine von einer willkührlichen Constanten abhängige, aber von der unabhängigen Variabeln x freie algebraische Beziehung von der Form statthat

$$z = f(z_1, z_2, \dots z_n, c), \tag{48}$$

wobei vorausgesetzt wird, dass nicht schon zwischen $z_1, z_2, \dots z_n$ und x eine algebraische Beziehung besteht, so hat die Differentialgleichung die Form

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_{n-\rho}(x)\psi_{n-\rho}(z), \tag{49}$$

in welcher angenommen werden darf, dass zwischen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_{n-\rho}(x)$ sowohl als zwischen $\psi_1(z), \psi_2(z), \dots \psi_{n-\rho}(z)$ nicht mehr eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten existirt, und es ist dann die Beziehung (48) *ein mit einer willkührlichen Constanten versehenes Integral des Systems von $\rho + 1$ totalen Differentialgleichungen von n Variabeln*

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & \dots & dz_{n-\rho} \\ \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \dots & \psi_1(z_{n-\rho}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n-\rho}(z) & \psi_{n-\rho}(z_1) & \dots & \psi_{n-\rho}(z_{n-\rho}) \end{vmatrix} = 0, \dots \begin{vmatrix} dz & dz_1 & \dots & dz_n \\ \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \dots & \psi_1(z_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n-\rho}(z) & \psi_{n-\rho}(z_1) & \dots & \psi_{n-\rho}(z_n) \end{vmatrix} = 0, \tag{50}$$

welches $n - \rho$ unabhängige Variabeln enthält. Umgekehrt wird aber auch, wenn das System von Differentialgleichungen (50) *ein Integral von der Form* (48) *besitzt, jede Differentialgleichung erster Ordnung von der Form* (49), *was auch $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_{n-\rho}(x)$ für Functionen von x sein mögen, die Eigenschaft haben, dass das allgemeine Integral eine wie oben charakterisirte algebraische Function von n particulären Integralen ist,*

und dies letztere ist unmittelbar daraus ersichtlich, dass, wenn z das allgemeine und $z_1, z_2, \dots z_n$ particuläre Integrale von (49) darstellen, aus den durch Einsetzen dieser Werthe in (49) hervorgehenden Differentialgleichungen sich die Reihe der Differentialgleichungen (50) ergiebt, für welche die Existenz eines Integrales der Form (48) angenommen wurde, das somit die verlangte Beziehung zwischen dem allgemeinen und n particulären Integralen liefert.

Beschäftigen wir uns zunächst mit dem Falle, in welchem $\rho = 0$ ist, und somit der Zusammenhang (48) einer Differentialgleichung von der Form zugehört

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z), \tag{51}$$

für welche weder zwischen den $\varphi(x)$- noch zwischen den $\psi(z)$-Functionen eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten stattfindet, und stellen die Frage, *in welchen Fällen die Differentialgleichung*

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & \ldots dz_n \\ \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \psi_1(z_2) & \ldots \psi_1(z_n) \\ \psi_2(z) & \psi_2(z_1) & \psi_2(z_2) & \ldots \psi_2(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_n(z) & \psi_n(z_1) & \psi_n(z_2) & \ldots \psi_n(z_n) \end{vmatrix} = 0 \tag{52}$$

ein algebraisches Integral

$$z = f(z_1, z_2, \ldots z_n, c) \tag{53}$$

besitzt, worin c eine willkührliche Constante und $z_1, z_2, \ldots z_n$ von einander unabhängige Variable sind.

Bringen wir (52) auf die Form

$$R dz + R_1 dz_1 + R_2 dz_2 + \cdots + R_n dz_n = 0 \tag{54}$$

und setzen nach (53)

$$dz = \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n} dz_n$$

in diese Gleichung ein, so erhält man

$$\left(R\frac{\partial f}{\partial z_1} + R_1\right) dz_1 + \left(R\frac{\partial f}{\partial z_2} + R_2\right) dz_2 + \cdots + \left(R\frac{\partial f}{\partial z_n} + R_n\right) dz_n = 0,$$

deren Coefficienten der Annahme gemäss identisch verschwinden müssen, und es ergiebt sich somit

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = -\frac{R_1}{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial z_2} = -\frac{R_2}{R}, \ldots \frac{\partial f}{\partial z_n} = -\frac{R_n}{R},$$

woraus die Integrabilitätsbedingungen folgen

$$(55)\qquad \frac{\partial\left(\frac{R_1}{R}\right)}{\partial z_2}=\frac{\partial\left(\frac{R_2}{R}\right)}{\partial z_1},\quad \frac{\partial\left(\frac{R_1}{R}\right)}{\partial z_3}=\frac{\partial\left(\frac{R_3}{R}\right)}{\partial z_1},\ldots \frac{\partial\left(\frac{R_{n-1}}{R}\right)}{\partial z_n}=\frac{\partial\left(\frac{R_n}{R}\right)}{\partial z_{n-1}},$$

deren Anzahl $\frac{n(n-1)}{2}$ ist, oder auch

$$(56)\qquad R\left[\frac{\partial R_2}{\partial z_1}-\frac{\partial R_1}{\partial z_2}\right]+R_1\left[\frac{\partial R}{\partial z_2}-\frac{\partial R_2}{\partial z}\right]+R_2\left[\frac{\partial R_1}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial z_1}\right]=0\ (^1)$$

und die ähnlich gestalteten, in denen nur die Combination 12 durch irgend eine andere $\alpha\beta$ zu ersetzen ist. Beachtet man nun, dass nach (52)

$$(57)\qquad R=\begin{vmatrix}\psi_1(z_1) & \psi_1(z_2)\ldots\psi_1(z_n)\\ \psi_2(z_1) & \psi_2(z_2)\ldots\psi_2(z_n)\\ \cdots & \cdots\\ \psi_n(z_1) & \psi_n(z_2)\ldots\psi_n(z_n)\end{vmatrix},\qquad R_1=-\begin{vmatrix}\psi_1(z) & \psi_1(z_2)\ldots\psi_1(z_n)\\ \psi_2(z) & \psi_2(z_2)\ldots\psi_2(z_n)\\ \cdots & \cdots\\ \psi_n(z) & \psi_n(z_2)\ldots\psi_n(z_n)\end{vmatrix},$$

$$R_2=\begin{vmatrix}\psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \psi_1(z_3)\ldots\psi_1(z_n)\\ \psi_2(z) & \psi_2(z_1) & \psi_2(z_3)\ldots\psi_2(z_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \psi_n(z) & \psi_n(z_1) & \psi_n(z_3)\ldots\psi_n(z_n)\end{vmatrix},$$

und dass, weil die Glieder je einer Verticalreihe immer nur von einer der Variabeln abhängig sind, das Differential einer jeden dieser Determinanten

(1) Bekanntlich können dieselben auch, wenn z durch z_0, R durch R_0 ersetzt und

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial z_\beta}-\frac{\partial R_\beta}{\partial z_\alpha}=(\alpha,\beta)$$

gesetzt wird, durch die Determinante ausgedrückt werden

$$\begin{vmatrix}(00) & (01) & (02)\\ (10) & (11) & (12)\\ R_0 & R_1 & R_2\end{vmatrix}=0$$

und die ähnlich gestalteten.

nach einer der Variabeln aus der entsprechenden Determinante erhalten wird, wenn man die entsprechenden Functionen einer Verticalreihe durch die Ableitungen derselben ersetzt, so geht die Gleichung (56) in

$$
(58)\quad
\begin{vmatrix}
\psi_1(z) & \psi'_1(z_1)+\psi'_1(z_2) & \psi_1(z_3)\dots\psi_1(z_n) \\
\psi_2(z) & \psi'_2(z_1)+\psi'_2(z_2) & \psi_2(z_3)\dots\psi_2(z_n) \\
\dots & \dots & \dots \\
\psi_n(z) & \psi'_n(z_1)+\psi'_n(z_2) & \psi_n(z_3)\dots\psi_n(z_n)
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
\psi_1(z_1) & \psi_1(z_2) & \psi_1(z_3)\dots\psi_1(z_n) \\
\psi_2(z_1) & \psi_2(z_2) & \psi_2(z_3)\dots\psi_2(z_n) \\
\dots & \dots & \dots \\
\psi_n(z_1) & \psi_n(z_2) & \psi_n(z_3)\dots\psi_n(z_n)
\end{vmatrix}
$$

$$
+
\begin{vmatrix}
\psi_1(z_1) & \psi'_1(z_2)+\psi'_1(z) & \psi_1(z_3)\dots\psi_1(z_n) \\
\psi_2(z_1) & \psi'_2(z_2)+\psi'_2(z) & \psi_2(z_3)\dots\psi_2(z_n) \\
\dots & \dots & \dots \\
\psi_n(z_1) & \psi'_n(z_2)+\psi'_n(z) & \psi_n(z_3)\dots\psi_n(z_n)
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
\psi_1(z_2) & \psi_1(z) & \psi_1(z_3)\dots\psi_1(z_n) \\
\psi_2(z_2) & \psi_2(z) & \psi_2(z_3)\dots\psi_2(z_n) \\
\dots & \dots & \dots \\
\psi_n(z_2) & \psi_n(z) & \psi_n(z_3)\dots\psi_n(z_n)
\end{vmatrix}
$$

$$
+
\begin{vmatrix}
\psi_1(z_2) & \psi'_1(z)+\psi'_1(z_1) & \psi_1(z_3)\dots\psi_1(z_n) \\
\psi_2(z_2) & \psi'_2(z)+\psi'_2(z_1) & \psi_2(z_3)\dots\psi_2(z_n) \\
\dots & \dots & \dots \\
\psi_n(z_2) & \psi'_n(z)+\psi'_n(z_1) & \psi_n(z_3)\dots\psi_n(z_n)
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
\psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \psi_1(z_3)\dots\psi_1(z_n) \\
\psi_2(z) & \psi_2(z_1) & \psi_2(z_3)\dots\psi_2(z_n) \\
\dots & \dots & \dots \\
\psi_n(z) & \psi_n(z_1) & \psi_n(z_3)\dots\psi_n(z_n)
\end{vmatrix}
= 0
$$

über, und die Gleichung muss eine für alle Werthe von $z_1, z_2, \dots z_n$ identische sein, weil sie von der willkührlichen Constanten c frei ist, also mit der Gleichung (53) nicht zusammenfallen kann, andererseits aber ein gleichzeitiges Bestehen dieser beiden Gleichungen durch Elimination von z einen Zusammenhang zwischen $z_1, z_2, \dots z_n$ liefern würde, während diese Variabeln von einander unabhängig sein sollten. Betrachten wir in der Gleichung (58) die Grössen $z_1, z_2, \dots z_n$ als Parameter und sehen sie nur als eine Gleichung in der Variabeln z an, welche für alle Werthe von z identisch sein muss, so erkennt man unmittelbar, dass die Ableitungen der ψ-Functionen der Variabeln z nur in dem Ausdrucke vorkommen

$$
(\mathrm{A}) \qquad \begin{vmatrix} \psi_1(z_1) & \psi'_1(z) & \psi_1(z_3)\ldots\psi_1(z_n) \\ \psi_2(z_1) & \psi'_2(z) & \psi_2(z_3)\ldots\psi_2(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_n(z_1) & \psi'_n(z) & \psi_n(z_3)\ldots\psi_n(z_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1(z_2) & \psi_1(z) & \psi_1(z_3)\ldots\psi_1(z_n) \\ \psi_2(z_2) & \psi_2(z) & \psi_2(z_3)\ldots\psi_2(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_n(z_2) & \psi_n(z) & \psi_n(z_3)\ldots\psi_n(z_n) \end{vmatrix}
$$

$$
- \begin{vmatrix} \psi_1(z_2) & \psi'_1(z) & \psi_1(z_3)\ldots\psi_1(z_n) \\ \psi_2(z_2) & \psi'_2(z) & \psi_2(z_3)\ldots\psi_2(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_n(z_2) & \psi'_n(z) & \psi_n(z_3)\ldots\psi_n(z_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1(z_1) & \psi_1(z) & \psi_1(z_3)\ldots\psi_1(z_n) \\ \psi_2(z_1) & \psi_2(z) & \psi_2(z_3)\ldots\psi_2(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_n(z_1) & \psi_n(z) & \psi_n(z_3)\ldots\psi_n(z_n) \end{vmatrix},
$$

während alle anderen Ausdrücke nur eine homogene lineare Function der Grössen $\psi_1(z), \psi_2(z), \ldots \psi_n(z)$ liefern. Setzt man nun den ersten Posten von (A) in die Form

$$[A_1\psi'_1(z) + A_2\psi'_2(z) + \cdots + A_n\psi'_n(z)][B_1\psi_1(z) + B_2\psi_2(z) + \cdots + B_n\psi_n(z)],$$

so sieht man unmittelbar, dass, weil der zweite aus dem ersten durch Vertauschung von $\psi_a(z)$ mit $\psi'_a(z)$ hervorgeht, dieser die Gestalt annimmt

$$[A_1\psi_1(z) + A_2\psi_2(z) + \cdots + A_n\psi_n(z)][B_1\psi'_1(z) + B_2\psi'_2(z) + \cdots + B_n\psi'_n(z)],$$

und dass daher die Gleichung (58) auf die Form gebracht werden kann

$$(59) \qquad \sum_1^n{}_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}[\psi_\lambda(z)\psi'_\mu(z) - \psi_\mu(z)\psi'_\lambda(z)] = T_1\psi_1(z) + T_2\psi_2(z) + \cdots + T_n\psi_n(z),$$

worin $\lambda\ \mu$ die $\frac{n(n-1)}{2}$ Combinationen verschiedener Indices von 1 bis n annehmen, und $a_{\lambda\mu}$ sowie $T_1, T_2, \ldots T_n$ algebraische Functionen von $z_1, z_2, \ldots z_n$ bedeuten, die als Parameter aufgefasst wurden. Da wir aber auch $\frac{n(n-1)}{2}$ solcher Integrabilitätsbedingungen (56) haben, so werden sich ebensoviele der Gleichung (59) analoge Gleichungen ergeben, und man wird aus diesen in den $\frac{n(n-1)}{2}$ Klammern der linken Seite linearen Gleichungen diese homogen linear in den rechten Seiten in der Form ausgedrückt erhalten

$$(60) \qquad \psi_\lambda(z)\psi'_\mu(z) - \psi_\mu(z)\psi'_\lambda(z) = U_1^{(\lambda\mu)}\psi_1(z) + U_2^{(\lambda\mu)}\psi_2(z) + \cdots + U_n^{(\lambda\mu)}\psi_n(z),$$

worin die U-Grössen wiederum algebraisch von $z_1, z_2, \ldots z_n$ abhängen. Wählen wir $\lambda = 1$, setzen ferner

$$\frac{\psi_\mu(z)}{\psi_1(z)} = v_\mu, \qquad \frac{dz}{\psi_1(z)} = dt, \tag{61}$$

so erhalten wir aus (60), wenn $\mu = 2, 3, \ldots n$ gesetzt wird,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dv_2}{dt} = U_{12} + U_{22}v_2 + U_{32}v_3 + \cdots + U_{n2}v_n \\ \frac{dv_3}{dt} = U_{13} + U_{23}v_2 + U_{33}v_3 + \cdots + U_{n3}v_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dv_n}{dt} = U_{1n} + U_{2n}v_2 + U_{3n}v_3 + \cdots + U_{nn}v_n, \end{array}\right. \tag{62}$$

worin die U wieder sämmtlich als Constante in Bezug auf v_ρ und t zu betrachten sind. Bestimmt man nun $n - 1$ Constante $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ derart, dass

$$\begin{array}{l} U_{12} + U_{22}\alpha_2 + U_{32}\alpha_3 + \cdots + U_{n2}\alpha_n = 0 \\ U_{13} + U_{23}\alpha_2 + U_{33}\alpha_3 + \cdots + U_{n3}\alpha_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_{1n} + U_{2n}\alpha_2 + U_{3n}\alpha_3 + \cdots + U_{nn}\alpha_n = 0 \end{array}$$

ist, so gehen mit Hülfe der Substitution

$$v_\rho = w_\rho + \alpha_\rho \tag{63}$$

die Differentialgleichungen (62) in

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dw_2}{dt} = U_{22}w_2 + U_{32}w_3 + \cdots + U_{n2}w_n \\ \frac{dw_3}{dt} = U_{23}w_2 + U_{33}w_3 + \cdots + U_{n3}w_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dw_n}{dt} = U_{2n}w_2 + U_{3n}w_3 + \cdots + U_{nn}w_n \end{array}\right. \tag{64}$$

über, deren Integrale bekanntlich, wenn $\nu_2, \nu_3, \ldots \nu_n$ die Lösungen der Gleichung

$$(65)\qquad \begin{vmatrix} U_{22}-\nu & U_{32} & \ldots & U_{n2} \\ U_{23} & U_{33}-\nu & \ldots & U_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{2n} & U_{3n} & \ldots & U_{nn}-\nu \end{vmatrix} = 0$$

bezeichnen, und ein Constantensystem aus den Gleichungen bestimmt wird

$$(66)\qquad \begin{cases} (U_{22}-\nu_\rho)A_2^{(\rho)} + U_{32}A_3^{(\rho)} + \cdots + U_{n2}A_n^{(\rho)} = 0 \\ U_{23}A_2^{(\rho)} + (U_{33}-\nu_\rho)A_3^{(\rho)} + \cdots + U_{n3}A_n^{(\rho)} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_{2n}A_2^{(\rho)} + U_{3n}A_3^{(\rho)} + \cdots + (U_{nn}-\nu_\rho)A_n^{(\rho)} = 0, \end{cases}$$

durch die Beziehungen dargestellt werden

$$(67)\qquad \begin{cases} w_2 = c_2 A_2^{(2)} e^{\nu_2 t} + c_3 A_2^{(3)} e^{\nu_3 t} + \cdots + c_n A_2^{(n)} e^{\nu_n t} \\ w_3 = c_2 A_3^{(2)} e^{\nu_2 t} + c_3 A_3^{(3)} e^{\nu_3 t} + \cdots + c_n A_3^{(n)} e^{\nu_n t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_n = c_2 A_n^{(2)} e^{\nu_2 t} + c_3 A_n^{(3)} e^{\nu_3 t} + \cdots + c_n A_n^{(n)} e^{\nu_n t}. \end{cases}$$

Man erhält somit vermöge der Substitutionen (61) und (63) die nachfolgenden Beziehungen

$$(68)\qquad \begin{cases} \psi_2(z) = a_2\psi_1(z) + c_2 A_2^{(2)}\psi_1(z)\,e^{\nu_2\int\frac{dz}{\psi_1(z)}} + \cdots + c_n A_2^{(n)}\psi_1(z)\,e^{\nu_n\int\frac{dz}{\psi_1(z)}} \\ \psi_3(z) = a_3\psi_1(z) + c_2 A_3^{(2)}\psi_1(z)\,e^{\nu_2\int\frac{dz}{\psi_1(z)}} + \cdots + c_n A_3^{(n)}\psi_1(z)\,e^{\nu_n\int\frac{dz}{\psi_1(z)}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_n(z) = a_n\psi_1(z) + c_2 A_n^{(2)}\psi_1(z)\,e^{\nu_2\int\frac{dz}{\psi_1(z)}} + \cdots + c_n A_n^{(n)}\psi_1(z)\,e^{\nu_n\int\frac{dz}{\psi_1(z)}}, \end{cases}$$

worin $\psi_1(z), \psi_2(z), \ldots \psi_n(z)$ algebraische Functionen von z sein müssen; wir durften die Grössen $\nu_2, \nu_3, \ldots \nu_n$ hier als verschieden betrachten — wären sie nicht verschieden, so würden zu den Exponentialfunctionen noch algebraische Functionen von t hinzutreten — weil die Coefficienten der

Gleichung (65) von den völlig willkührlichen Grössen $z_2, z_3, \dots z_n$ abhängen, welche wir als Parameter betrachteten. Aus der Beziehung

$$(69) \qquad \frac{\psi_\lambda(z)}{\psi_1(z)} = a_\lambda + c_2 A_\lambda^{(2)} e^{\nu_2 \int \frac{dz}{\psi_1(z)}} + c_3 A_\lambda^{(3)} e^{\nu_3 \int \frac{dz}{\psi_1(z)}} + \dots + c_n A_\lambda^{(n)} e^{\nu_n \int \frac{dz}{\psi_1(z)}}$$

folgt aber durch $(n - 2)$-malige successive Differentiation nach z ein System von $n - 1$ in den $n - 1$ Grössen $e^{\nu_2 \int \frac{dz}{\psi_1(z)}}, \dots e^{\nu_n \int \frac{dz}{\psi_1(z)}}$ linearen Gleichungen [1], aus denen sich

$$(70) \qquad e^{\nu_\rho \int \frac{dz}{\psi_1(z)}} = F_\rho(z)$$

ergiebt, worin $F_\rho(z)$ eine algebraische Function von z sein muss — und dass das lineare System auflösbar ist, geht daraus hervor, dass die Determinante nur für gleiche Werthe der ν-Grössen verschwinden würde; aus (70) folgt aber

$$F_\rho(z) = e^{\nu_\rho \int \frac{dz}{\psi_1(z)}} = \left(e^{\nu_2 \int \frac{dz}{\psi_1(z)}}\right)^{\frac{\nu_\rho}{\nu_2}} = F_2(z)^{\frac{\nu_\rho}{\nu_2}},$$

worin $\frac{\nu_\rho}{\nu_2}$ eine rationale Zahl sein muss, da der Ausdruck eine algebraische Function sein soll, und da $\psi_1(z)$ nach (70) für $\rho = 2$ durch den Ausdruck definirt ist

$$\psi_1(z) = \frac{\nu_2 F_2(z)}{F'_2(z)},$$

so folgt, wenn $F_2(z) = F(z)$ gesetzt wird, aus (69) das Gleichungssystem

$$(71) \qquad \left\{ \begin{aligned} \psi_1(z) &= \frac{\nu_2 F(z)}{F'(z)} \\ \psi_2(z) &= \frac{a_2 \nu_2 F(z)}{F'(z)} + \frac{k_{22} \nu_2 F(z)^2}{F'(z)} + \frac{k_{32} \nu_2 F(z)^{\frac{\nu_3}{\nu_2}+1}}{F'(z)} + \dots + \frac{k_{n2} \nu_2 F(z)^{\frac{\nu_n}{\nu_2}+1}}{F'(z)} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi_n(z) &= \frac{a_n \nu_2 F(z)}{F'(z)} + \frac{k_{2n} \nu_2 F(z)^2}{F'(z)} + \frac{k_{3n} \nu_2 F(z)^{\frac{\nu_3}{\nu_2}+1}}{F'(z)} + \dots + \frac{k_{nn} \nu_2 F(z)^{\frac{\nu_n}{\nu_2}+1}}{F'(z)}, \end{aligned} \right.$$

[1] Der Fall, in welchem $c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$ ist, darf ausgeschlossen werden, weil dieser $\psi_2(z) = a_2 \psi_1(z), \dots \psi_n(z) = a_n \psi_1(z)$, also lineare homogene Relationen zwischen den ψ-Functionen liefern würde, was gegen die Annahme wäre.

worin die k Constanten bedeuten. Setzt man diese Werthe von $\psi_1(z)$, $\psi_2(z), \ldots \psi_n(z)$ in die Differentialgleichung (51) und führt die abhängige Variable Z durch die Beziehung ein

$$F(z) = Z, \tag{72}$$

so geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{dZ}{dx} = f_1(x)Z + f_2(x)Z^2 + f_3(x)Z^{\varepsilon_3} + \cdots + f_n(x)Z^{\varepsilon_n}, \tag{73}$$

worin $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots \varepsilon_n$ rationale Zahlen bedeuten; setzt man endlich

$$\varepsilon_3 = \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \qquad \varepsilon_4 = \frac{\alpha_4}{\beta_4}, \ldots \varepsilon_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

und bezeichnet durch β das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\beta_3, \beta_4, \ldots \beta_n$, setzt ferner

$$\frac{\beta}{\beta_3} = \gamma_3, \qquad \frac{\beta}{\beta_4} = \gamma_4, \ldots \frac{\beta}{\beta_n} = \gamma_n$$

und

$$Z = y^\beta, \tag{74}$$

so ergiebt sich die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x)y^{\mu_1} + F_2(x)y^{\mu_2} + \cdots + F_n(x)y^{\mu_n}, \tag{75}$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ ganze positive oder negative Zahlen bedeuten, und wir finden somit, da die Differentialgleichung (51) als eine vermöge der algebraischen, die unabhängige Variable x nicht enthaltenden Substitutionen (72) und (74) aus der Differentialgleichung (75) abgeleitete betrachtet werden kann, den folgenden Satz:

Sämmtliche Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische, von der unabhängigen Variabeln x freie Function von n particulären Integralen ist, die nicht schon selbst mit x und unter einander in algebraischer Beziehung stehen, haben die Form

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z);$$

unter den hierin enthaltenen Differentialgleichungen werden unter der Voraussetzung, dass weder die Functionen $\varphi_1(x), \dots \varphi_n(x)$ *noch* $\psi_1(z), \dots \psi_n(z)$ *unter einander in homogener linearer Relation mit constanten Coefficienten stehen, nur diejenigen jene Eigenschaft besitzen können, welche die Form haben*

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x) z^{\mu_1} + \varphi_2(x) z^{\mu_2} + \cdots + \varphi_n(x) z^{\mu_n},$$

worin $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ *ganze positive oder negative Zahlen bedeuten, oder diejenigen, welche aus dieser Form durch eine von der unabhängigen Variabeln freie algebraische Substitution für die abhängige Variable abgeleitet sind,*

und es ist unmittelbar einzusehen, dass, wenn für eine solche Differentialgleichung die verlangte Eigenschaft statthat, dieselbe auch besteht für jede andere Differentialgleichung, die durch eine derartige Substitution aus der ersteren abgeleitet ist.

Untersuchen wir nun, welche Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x) z^{\mu_1} + \varphi_2(x) z^{\mu_2} + \cdots + \varphi_n(x) z^{\mu_n} \tag{76}$$

die verlangte Eigenschaft besitzen, oder, was nach den früheren Auseinandersetzungen dasselbe aussagt, für welche Werthe $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ die totale Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 \dots dz_n \\ z^{\mu_1} & z_1^{\mu_1} & z_2^{\mu_1} \dots z_n^{\mu_1} \\ z^{\mu_2} & z_1^{\mu_2} & z_2^{\mu_2} \dots z_n^{\mu_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z^{\mu_n} & z_1^{\mu_n} & z_2^{\mu_n} \dots z_n^{\mu_n} \end{vmatrix} = 0 \tag{77}$$

der oben aufgestellten Bedingung der algebraischen Integrabilität mit n von einander unabhängigen Variabeln genügt.

Machen wir in (77) die Substitutionen

$$z^{-\mu_1+1} = t, \qquad z_1^{-\mu_1+1} = t_1, \dots z_n^{-\mu_1+1} = t_n \text{ (}^1\text{)}, \tag{78}$$

(1) Ist $\mu_1 = 1$, so kann diese Substitution nicht angewandt werden; wir machen dann eine andere Horizontalreihe zur zweiten und setzen z. B.

$$z^{-\mu_2+1} = t, \qquad z_1^{-\mu_2+1} = t_1, \dots z_n^{-\mu_n+1} = t_n.$$

so geht die Determinante (77) in

$$\begin{vmatrix} \frac{z^{\mu_1}}{-\mu_1+1}\,dt & \frac{z_1^{\mu_1}}{-\mu_1+1}\,dt_1 & \cdots & \frac{z_n^{\mu_1}}{-\mu_1+1}\,dt_n \\ z^{\mu_1} & z_1^{\mu_1} & \cdots & z_n^{\mu_1} \\ z^{\mu_1}\, t^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} & z_1^{\mu_1}\, t_1^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} & \cdots & z_n^{\mu_1}\, t_n^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z^{\mu_1}\, t^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} & z_1^{\mu_1}\, t_1^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} & \cdots & z_n^{\mu_1}\, t_n^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} \end{vmatrix} = 0$$

oder nach Weglassung der Factoren in

(79)
$$\begin{vmatrix} dt & dt_1 & dt_2 \ldots & dt_n \\ 1 & 1 & 1 \ldots & 1 \\ t^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} & t_1^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} & \cdots & t_n^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} & t_1^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} & \cdots & t_n^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} \end{vmatrix} = 0$$

über, und es wird auch für diese Gleichung der Voraussetzung gemäss und in Folge der algebraischen Substitutionen (78) ein Integral von der Form

(80)
$$t = f_1(t_1, t_2, \ldots t_n, c)$$

existiren müssen, worin f_1 eine algebraische Function und $t_1, t_2, \ldots t_n$ von einander unabhängige Variable sein werden. Setzt man in (79) und (80) die unabhängige Variable $t_n = 0$ [1], so folgt, dass die totale Differentialgleichung

[1] Das Bedenken, dass, wenn $t_n = 0$ gesetzt wird, die Glieder der letzten Verticalreihe mit etwaigem negativen Exponenten unendlich würden, kann dadurch gehoben werden, dass man die Theile der rechten Seite der Differentialgleichung (76) so ordnet, dass, wenn sämmtliche μ unter der Einheit liegen, man für μ_1 die kleinste dieser Zahlen wählt — dann sind die Zähler und Nenner der t-Exponenten sämmtlich positiv —, wenn die μ alle grösser als die Einheit sind, dann für μ_1 die grösste dieser Zahlen nimmt — dann sind Zähler und Nenner sämmtlich negativ — und wenn endlich einige der μ-Grössen kleiner, einige grösser als die Einheit sind, so wähle man für μ_1 unter allen denjenigen

$$(81)\qquad \begin{vmatrix} dt & dt_1 & dt_2 & \dots & dt_{n-1} \\ t^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} & t_1^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} & t_2^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} & \dots & t_{n-1}^{\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} & t_1^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} & t_2^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} & \dots & t_{n-1}^{\frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1}} \end{vmatrix} = 0$$

das Integral

$$(82)\qquad t = f_1(t_1, t_2, \dots t_{n-1}, 0, c)$$

besitzt, worin t_1, $t_2, \dots t_{n-1}$ von einander unabhängige Variable sind; setzt man hierin wieder, indem man zur Abkürzung

$$\frac{\mu_2-\mu_1}{-\mu_1+1} = \nu_1, \qquad \frac{\mu_3-\mu_1}{-\mu_1+1} = \nu_2, \dots \frac{\mu_n-\mu_1}{-\mu_1+1} = \nu_{n-1}$$

macht,

$$(83)\qquad t^{-\nu_1+1} = u, \qquad t_1^{-\nu_1+1} = u_1, \dots t_{n-1}^{-\nu_1+1} = u_{n-1},$$

so geht die Differentialgleichung wieder in

$$(84)\qquad \begin{vmatrix} du & du_1 & du_2 & \dots & du_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ u^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_1^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_2^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} & \dots & u_{n-1}^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_1^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_2^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} & \dots & u_{n-1}^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} \end{vmatrix} = 0$$

über, und diese letztere hat ein algebraisches Integral

$$(85)\qquad u = f_2(u_1, u_2, \dots u_{n-1}, c),$$

worin u_1, $u_2, \dots u_{n-1}$ unabhängige Variable bedeuten. Setzen wir auch

---

μ, welche unter der Einheit liegen, die kleinste, es werden dann Zähler und Nenner wieder positiv werden; der Fall, dass eine der μ-Grössen der Einheit gleich ist, ist offenbar nicht ausgeschlossen.

hier wieder genau wie oben $u_{n-1} = 0$, so erhalten wir die totale Differentialgleichung mit $n - 2$ unabhängigen Variabeln

$$(86) \qquad \begin{vmatrix} du & du_1 & du_2 & \dots & du_{n-1} \\ u^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_1^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_2^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} & \dots & u_{n-1}^{\frac{\nu_2-\nu_1}{-\nu_1+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_1^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} & u_2^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} & \dots & u_{n-1}^{\frac{\nu_{n-1}-\nu_1}{-\nu_1+1}} \end{vmatrix} = 0,$$

welche ein Integral

$$(87) \qquad u = f_2(u_1, u_2, \dots u_{n-2}, 0, c)$$

mit $n - 2$ unabhängigen Variabeln besitzt. Schliesst man so weiter, so folgt, dass unter der Voraussetzung, dass die Differentialgleichung (77) der oben aufgestellten Bedingung der Integrabilität genügt, nothwendig auch die Differentialgleichung

$$(88) \qquad \begin{vmatrix} dv & dv_1 & dv_2 & dv_3 & dv_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ v^{\rho_1} & v_1^{\rho_1} & v_2^{\rho_1} & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\ v^{\rho_2} & v_1^{\rho_2} & v_2^{\rho_2} & v_3^{\rho_2} & v_4^{\rho_2} \\ v^{\rho_3} & v_1^{\rho_3} & v_2^{\rho_3} & v_3^{\rho_3} & v_4^{\rho_3} \end{vmatrix} = 0$$

ein Integral von der Form

$$(89) \qquad v = \omega(v_1, v_2, v_3, v_4, c)$$

wird haben müssen, worin v_1, v_2, v_3, v_4 von einander unabhängige Variable bedeuten. Wir werden nun nachweisen, dass dies nie der Fall sein kann, und dass daher auch die ursprüngliche Annahme für die Differentialgleichung unstatthaft war, wenigstens so lange $n > 3$ ist([1]). Denn ange-

([1]) Ich untersuche die Integrabilitätsbedingung der Determinante (88) nicht unmittelbar, weil ich die bei der oben gewählten Methode für die Reduction des Problems sich ergebenden Resultate für die Integrabilitätsbedingungen von Determinanten von niederer Ordnung als der 5ten im Folgenden brauche.

nommen (89) wäre unter der gemachten Voraussetzung ein Integral der Differentialgleichung (88), so würde, wenn v_4 wiederum Null gesetzt würde, auch die Differentialgleichung

$$(90) \qquad \begin{vmatrix} dv & dv_1 & dv_2 & dv_3 \\ v^{\rho_1} & v_1^{\rho_1} & v_2^{\rho_1} & v_3^{\rho_1} \\ v^{\rho_2} & v_1^{\rho_2} & v_2^{\rho_2} & v_3^{\rho_2} \\ v^{\rho_3} & v_1^{\rho_3} & v_2^{\rho_3} & v_3^{\rho_3} \end{vmatrix} = 0$$

das Integral

$$(91) \qquad v = \omega(v_1, v_2, v_3, 0, c)$$

mit 3 unabhängigen Variabeln besitzen und müsste somit der oben aufgestellten Bedingung der Integrabilität genügen. Dies letztere ist aber nur möglich, wenn ρ_1, ρ_2, ρ_3 bestimmten Bedingungen unterliegen; denn sei ρ_1 eine von der Einheit verschiedene Grösse, so würde die Substitution

$$(92) \qquad v^{-\rho_1+1} = \xi, \quad v_1^{-\rho_1+1} = \xi_1, \quad v_2^{-\rho_1+1} = \xi_2, \quad v_3^{-\rho_1+1} = \xi_3$$

die Differentialgleichung (90), genau wie oben, in die Gleichung

$$(93) \qquad \begin{vmatrix} d\xi & d\xi_1 & d\xi_2 & d\xi_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi^{\sigma_1} & \xi_1^{\sigma_1} & \xi_2^{\sigma_1} & \xi_3^{\sigma_1} \\ \xi^{\sigma_2} & \xi_1^{\sigma_2} & \xi_2^{\sigma_2} & \xi_3^{\sigma_2} \end{vmatrix} = 0$$

überführen, für welche

$$(94) \qquad \xi = \Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3, c),$$

und ξ_1, ξ_2, ξ_3 von einander unabhängig wären, und wir untersuchen nunmehr direct die Bedingungen für die Integrabilität dieser Gleichung. Bildet man für dieselbe die Gleichung (56), so ergiebt sich

$$(95)\quad \{\xi_2^{\sigma_1}\xi_3^{\sigma_2}-\xi_3^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2}-\xi_1^{\sigma_1}\xi_3^{\sigma_2}+\xi_3^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_2}+\xi_1^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2}-\xi_2^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_2}\}\{\sigma_1\xi_1^{\sigma_1-1}\xi_3^{\sigma_2}-\sigma_2\xi_3^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_2-1}$$

$$+\sigma_2\xi^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_2-1}-\sigma_1\xi^{\sigma_2}\xi_1^{\sigma_1-1}+\sigma_1\xi_2^{\sigma_1-1}\xi_3^{\sigma_2}-\sigma_2\xi_3^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2-1}+\sigma_2\xi^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2-1}-\sigma_1\xi_2^{\sigma_1-1}\xi^{\sigma_2}\}$$

$$+\{\xi_2^{\sigma_1}\xi_3^{\sigma_2}-\xi_3^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2}-\xi^{\sigma_1}\xi_8^{\sigma_2}+\xi_3^{\sigma_1}\xi^{\sigma_2}+\xi^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2}-\xi_2^{\sigma_1}\xi^{\sigma_2}\}\{-\sigma_1\xi_2^{\sigma_1-1}\xi_3^{\sigma_2}+\sigma_2\xi_3^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2-1}$$

$$-\sigma_2\xi_1^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2-1}+\sigma_1\xi_2^{\sigma_1-1}\xi_1^{\sigma_2}-\sigma_1\xi^{\sigma_1-1}\xi_3^{\sigma_2}+\sigma_2\xi_3^{\sigma_1}\xi^{\sigma_2-1}+\sigma_1\xi^{\sigma_1-1}\xi_1^{\sigma_2}-\sigma_2\xi^{\sigma_2-1}\xi_1^{\sigma_1}\}$$

$$+\{\xi_1^{\sigma_1}\xi_3^{\sigma_2}-\xi_3^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_2}-\xi^{\sigma_1}\xi_3^{\sigma_2}+\xi_3^{\sigma_1}\xi^{\sigma_2}+\xi^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_2}-\xi_1^{\sigma_1}\xi^{\sigma_2}\}\{\sigma_1\xi^{\sigma_1-1}\xi_3^{\sigma_2}-\sigma_2\xi_3^{\sigma_1}\xi^{\sigma_2-1}$$

$$-\sigma_1\xi^{\sigma_1-1}\xi_2^{\sigma_2}+\sigma_2\xi_2^{\sigma_1}\xi^{\sigma_2-1}+\sigma_1\xi_1^{\sigma_1-1}\xi_3^{\sigma_2}-\sigma_2\xi_1^{\sigma_2-1}\xi_3^{\sigma_1}-\sigma_1\xi_1^{\sigma_1-1}\xi_2^{\sigma_2}+\sigma_2\xi_2^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_2-1}\}=0,$$

welche Gleichung für alle Werthe der Grössen ξ, ξ_1, ξ_2, ξ_3 erfüllt sein müsste; nehmen wir $\sigma_2 > \sigma_1$ an, und suchen in dieser Gleichung das Glied mit der höchsten Potenz von ξ_3, so ist diese $\xi_3^{2\sigma_2}$ und ihr Coefficient, welcher wiederum identisch für alle Werthe von ξ, ξ_1, ξ_2 verschwinden müsste:

$$\sigma_1\{\xi_2^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_1-1}-\xi_1^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_1-1}-\xi_2^{\sigma_1}\xi^{\sigma_1-1}+\xi^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_1-1}+\xi^{\sigma_1-1}\xi_1^{\sigma_1}-\xi^{\sigma_1}\xi_1^{\sigma_1-1}\},$$

und man sieht sogleich, dass dies nur dann möglich ist, *wenn* $\sigma_1 = 1$ *ist;* suchen wir weiter in der obigen Gleichung (95), jetzt unter der Voraussetzung $\sigma_1 = 1$, den Coefficienten von $\xi_3^{\sigma_2+\sigma_1} = \xi_3^{\sigma_2+1}$, so wird dieser

$$\sigma_2\{\xi_1\xi_2^{\sigma_2-1}-\xi_2\xi_1^{\sigma_2-1}+\xi_2\xi^{\sigma_2-1}-\xi\xi_2^{\sigma_2-1}+\xi\xi_1^{\sigma_2-1}-\xi_1\xi^{\sigma_2-1}\},$$

und es ist hier wieder unmittelbar zu sehen, dass dieser nur dann identisch verschwindet, *wenn* $\sigma_2 = 2$ *ist;* wir erhalten somit den Satz, *dass unter allen in der Determinantengleichung*

$$\begin{vmatrix} d\xi & d\xi_1 & d\xi_2 & d\xi_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi^{\sigma_1} & \xi_1^{\sigma_1} & \xi_2^{\sigma_1} & \xi_3^{\sigma_1} \\ \xi^{\sigma_2} & \xi_1^{\sigma_2} & \xi_2^{\sigma_2} & \xi_3^{\sigma_2} \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher σ_1 *und* σ_2 *rationale Zahlen bedeuten, enthaltenen Differentialgleichungen nur*

$$(96)\qquad \begin{vmatrix} d\xi & d\xi_1 & d\xi_2 & d\xi_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi^2 & \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

der Bedingung der Integrabilität für drei unabhängige Variable ξ_1, ξ_2, ξ_3 *genügt* (1).

Da nun also, wie aus der Substitution (92) mit Rücksicht auf die Form (79) hervorgeht, die Determinantengleichung (90) dann und nur dann der Bedingung der Integrabilität genügt, wenn

$$\sigma_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{-\rho_1 + 1} = 1, \qquad \sigma_2 = \frac{\rho_3 - \rho_1}{-\rho_1 + 1} = 2$$

also

$$(a)\qquad \rho_1 = \rho_1, \qquad \rho_2 = 1, \qquad \rho_3 = -\rho_1 + 2$$

ist, so folgt, dass die Determinante (88) nur dann der Bedingung der Integrabilität genügen könnte, wenn sie die Form hat

$$(97)\qquad \begin{vmatrix} dv & dv_1 & dv_2 & dv_3 & dv_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ v & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v^{\rho_1} & v_1^{\rho_1} & v_2^{\rho_1} & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\ v^{-\rho_1+2} & v_1^{-\rho_1+2} & v_2^{-\rho_1+2} & v_3^{-\rho_1+2} & v_4^{-\rho_1+2} \end{vmatrix} = 0,$$

(1) Dass die Determinantengleichung (96) auch wirklich der Integrabilitätsbedingung genügt, ist unmittelbar ersichtlich, da die Gleichung (56) in diesem Falle in

$$(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi)$$
$$+ (\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_3)(\xi + \xi_3 - \xi_1 - \xi_3)$$
$$+ (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_1 + \xi - \xi_2 - \xi_3) = 0$$

oder

$$(\xi_2 - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi) + (\xi - \xi_2)(\xi + \xi_2 - \xi_1 - \xi_3) + (\xi_1 - \xi)(\xi_1 + \xi - \xi_2 - \xi_3) = 0$$

übergeht, welche für alle Werthe von ξ, ξ_1, ξ_2, ξ_3 erfüllt ist.

und es soll endlich gezeigt werden, dass diese für kein rationales ρ_1 der Integrabilitätsbedingung für 4 unabhängige Variable v_1, v_2, v_3, v_4 genügen kann. Um dies nachzuweisen, könnte man mit Benutzung der Gleichung (58) zeigen, dass die Beziehung

$$
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 \\
v & 2 & v_3 & v_4 \\
v^{\rho_1} & \rho_1(v_1^{\rho_1-1}+v_2^{\rho_1-1}) & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\
v^{-\rho_1+2} & (-\rho_1+2)(v_1^{-\rho_1+1}+v_2^{-\rho_1+1}) & v_3^{-\rho_1+2} & v_4^{-\rho_1+2}
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\
v_1^{\rho_1} & v_2^{\rho_1} & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\
v_1^{-\rho_1+2} & v_2^{-\rho_1+2} & v_3^{-\rho_1+2} & v_4^{-\rho_1+2}
\end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 \\
v_1 & 2 & v_3 & v_4 \\
v_1^{\rho_1} & \rho_1(v_2^{\rho_1-1}+v^{\rho_1-1}) & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\
v_1^{-\rho_1+2} & (-\rho_1+2)(v_2^{-\rho_1+1}+v^{-\rho_1+1}) & v_3^{-\rho_1+2} & v_4^{-\rho_1+2}
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
v_2 & v & v_3 & v_4 \\
v_2^{\rho_1} & v^{\rho_1} & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\
v_2^{-\rho_1+2} & v^{-\rho_1+2} & v_3^{-\rho_1+2} & v_4^{-\rho_1+2}
\end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 \\
v_2 & 2 & v_3 & v_4 \\
v_2^{\rho_1} & \rho_1(v^{\rho_1-1}+v_1^{\rho_1-1}) & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\
v_2^{-\rho_1+2} & (-\rho_1+2)(v^{-\rho_1+1}+v_1^{-\rho_1+1}) & v_3^{-\rho_1+2} & v_4^{-\rho_1+2}
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
v & v_1 & v_3 & v_4 \\
v^{\rho_1} & v_1^{\rho_1} & v_3^{\rho_1} & v_4^{\rho_1} \\
v^{-\rho_1+2} & v_1^{-\rho_1+2} & v_3^{-\rho_1+2} & v_4^{-\rho_1+2}
\end{vmatrix}
= 0
$$

nicht für alle Werthe von v, v_1, v_2, v_3, v_4 identisch erfüllt werden kann, doch würde dies eine etwas umständliche Rechnung erfordern, und wir wählen daher eine wesentlich davon verschiedene Betrachtung, die unmittelbar zu dem gesuchten Resultate führt. Durch Vergleichung von (97) mit (52) ergiebt sich, wenn die Variablen v durch z ersetzt werden,

$$\psi_1(z) = 1 \qquad \psi_2(z) = z \qquad \psi_3(z) = z^{\rho_1} \qquad \psi_4(z) = z^{-\rho_1+2}$$

also

$$\psi'_1(z) = 0 \qquad \psi'_2(z) = 1 \qquad \psi'_3(z) = \rho_1 z^{\rho_1-1} \qquad \psi'_4(z) = (-\rho_1+2)z^{-\rho_1+1},$$

und es wird nach (60), worin die U-Grössen von z unabhängig sind, in unserem Falle

$$\text{(98)} \qquad \psi_\lambda(z)\psi'_\mu(z) - \psi_\mu(z)\psi'_\lambda(z) = U_1^{(\lambda\mu)} + U_2^{(\lambda\mu)} z + U_3^{(\lambda\mu)} z^{\rho_1} + U_4^{(\lambda\mu)} z^{-\rho_1+2}$$

sein, welches auch die ungleiche Combination $\lambda\mu$ aus den Indices 1 2 3 4 sein mag; setzt man aber $\lambda = 1$ und $\mu = 3$, so ist

$$\psi_1(z)\psi'_3(z) - \psi_3(z)\psi'_1(z) = \rho_1 z^{\rho_1 - 1},$$

und es muss somit vermöge der Gleichung (98) $\rho_1 - 1 = 0$ oder 1 oder ρ_1 oder $-\rho_1 + 2$ sein; da aber für $\rho_1 = 1$ zwei Horizontalreihen von (97) zusammenfallen, für $\rho_1 = 2$ die letzte Horizontalreihe wieder nur wie die zweite aus Einheiten bestehen würde, so muss $\rho_1 - 1 = -\rho_1 + 2$ d. h. $\rho_1 = \frac{3}{2}$ sein, und nur in diesem Falle würde der nothwendigen Bedingung (98) genügt sein; setzen wir aber $\lambda = 1$ und $\mu = 4$, so folgt

$$\psi_1(z)\psi'_4(z) - \psi_4(z)\psi'_1(z) = (-\rho_1 + 2)z^{-\rho_1+1},$$

und es müsste somit $-\rho_1 + 1 = 0$ oder 1 oder ρ_1 oder $-\rho_1 + 2$ sein, was zur Folge hat, dass, weil $\rho_1 = 1$ und $\rho_1 = 0$ wieder zwei Horizontalreihen zusammenfallen liessen, $\rho_1 = \frac{1}{2}$ sein muss — da sich also die beiden Bedingungen $\rho_1 = \frac{3}{2}$ und $\rho_1 = \frac{1}{2}$ widersprechen, so folgt, dass die Gleichung (98) nicht allgemein besteht, die Differentialgleichung (97) somit für keinen Werth von ρ_1 der Integrabilitätsbedingung Genüge leistet. Da dies aber nothwendig war, wenn die vorgelegte Differentialgleichung (77) mit n unabhängigen Variabeln integrirbar sein sollte, so folgt, dass diese ebenfalls nie der Bedingung der Integrabilität Genüge leistet, so lange $n > 3$ ist; ist jedoch $n = 3$, so ergab zugleich die für die Determinante (90) durchgeführte Untersuchung, dass nach den Bestimmungen (a) nur die Determinante

$$\begin{vmatrix} dv & dv_1 & dv_2 & dv_3 \\ v & v_1 & v_2 & v_3 \\ v^{\rho_1} & v_1^{\rho_1} & v_2^{\rho_1} & v_3^{\rho_1} \\ v^{-\rho_1+2} & v_1^{-\rho_1+2} & v_2^{-\rho_1+2} & v_3^{-\rho_1+2} \end{vmatrix} = 0$$

die verlangte Eigenschaft hat und zwar für jedes rationale ρ_1 (da wir nur algebraische Functionen in Betracht ziehen) oder die durch die algebraischen Substitutionen (92) daraus hergeleitete (96).

Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Unter allen totalen Differentialgleichungen der Form

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 \dots dz_n \\ z^{\mu_1} & z_1^{\mu_1} & z_2^{\mu_1} \dots z_n^{\mu_1} \\ z^{\mu_2} & z_1^{\mu_2} & z_2^{\mu_2} \dots z_n^{\mu_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ z^{\mu_n} & z_1^{\mu_n} & z_2^{\mu_n} \dots z_n^{\mu_n} \end{vmatrix} = 0$$

hat nur die durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & dz_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ z^2 & z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

repraesentirte die Eigenschaft, dass eine Variable derselben sich als Function der anderen Variabeln und einer willkührlichen Constanten ausdrücken lässt und zwar so dass diese letzteren Variabeln von einander unabhängig sind.

Im Zusammenhange mit der oben geführten Untersuchung, welche die Frage nach der Abhängigkeit des allgemeinen von den particulären Integralen einer Differentialgleichung erster Ordnung auf die Untersuchung der Integrabilität einer Pfaff'schen Gleichung zurückführte, wird sich somit das folgende Theorem ergeben:

Sämmtliche Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische, von der unabhängigen Variabeln x freie Function von n particulären Integralen ist, die nicht schon selbst mit x und unter einander in algebraischer Beziehung stehen, haben die Form

$$(99)\qquad \frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z);$$

unter den hierin enthaltenen Differentialgleichungen haben unter der Voraussetzung, dass weder die Functionen $\varphi_1(x), \dots \varphi_n(x)$, noch $\psi_1(z), \dots \psi_n(z)$ unter *einander in homogener linearer Relation mit constanten Coefficienten stehen, nur die Differentialgleichungen*

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)z + \varphi_3(x)z^2 \tag{100}$$

und die aus dieser durch eine willkührliche, von der Variabeln x freie algebraische Function, welche z mit der neuen abhängigen Variabeln verbindet, abgeleiteten Gleichungen und zwar alle diese die verlangte Eigenschaft; für alle anderen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche in der Form (99) *enthalten sind, werden also die unendlich vielen particulären Integrale auch selbständige, wenigstens nicht durch von x freie algebraische Beziehungen unter einander im Zusammenhang stehende Transcendente sein, während die Differentialgleichungen* (100) *höchstens* 3 *selbständige Transcendenten definiren.*

Nachdem wir aber die Untersuchung für den Fall durchgeführt, dass in der Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(z)$$

weder die φ-Functionen noch die ψ-Functionen unter einander in homogener linearer Beziehung mit constanten Coefficienten stehen, gehen wir zu dem allgemeinen Falle über, in welchem für die vorausgesetzte Beziehung

$$z = f(z_1, z_2, \ldots z_n, c) \tag{101}$$

die Differentialgleichung die Form hat

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z) + \varphi_2(x)\psi_2(z) + \cdots + \varphi_{n-\rho}(x)\psi_{n-\rho}(z), \tag{102}$$

in welcher die Functionen φ und ψ nunmehr linear irreductible Functionen sind; für diesen Fall wurde oben nachgewiesen, dass die Beziehung (101) für das System der $\rho + 1$ totalen Differentialgleichungen von n Variabeln

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & \ldots & dz_{n-\rho} \\ \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \ldots & \psi_1(z_{n-\rho}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_{n-\rho}(z) & \psi_{n-\rho}(z_1) & \ldots & \psi_{n-\rho}(z_{n-\rho}) \end{vmatrix} = 0, \ldots \begin{vmatrix} dz & dz_1 & \ldots & dz_n \\ \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \ldots & \psi_1(z_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_{n-\rho}(z) & \psi_{n-\rho}(z_1) & \ldots & \psi_{n-\rho}(z_n) \end{vmatrix} = 0 \tag{103}$$

ein mit einer willkührlichen Constanten behaftetes Integral von $n-\rho$ unabhängigen Variabeln darstellt, für welche wir die Werthe

$$z_1, z_2, \dots z_{n-\rho-1}, z_{n-\rho}$$

wählen wollen, während $z_{n-\rho+1}, z_{n-\rho+2}, \dots z_n$ als Functionen dieser ersteren zu betrachten sind. Da nun das Integral (101) dann die Form annimmt

$$z = F(z_1, z_2, \dots z_{n-\rho}, c), \tag{104}$$

so wird die erste der Determinanten (103)

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & \dots & dz_{n-\rho-1} & dz_{n-\rho} \\ \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \dots & \psi_1(z_{n-\rho-1}) & \psi_1(z_{n-\rho}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n-\rho}(z) & \psi_{n-\rho}(z_1) & \dots & \psi_{n-\rho}(z_{n-\rho-1}) & \psi_{n-\rho}(z_{n-\rho}) \end{vmatrix} = 0 \tag{105}$$

ein mit einer willkührlichen Constanten c versehenes Integral (104) mit einer Anzahl unabhängiger Variabeln besitzen, welche um die Einheit kleiner ist als die Anzahl der Variabeln der Differentialgleichung (105) überhaupt; dies war aber grade der oben durchgeführte Fall der Differentialgleichung (52), und es war dort gezeigt, dass dann und nur dann die Bedingung der Integrabilität erfüllt sein kann, wenn die ψ-Functionen die durch die Gleichungen (71) geforderte Form besitzen, dass daher die Differentialgleichung (102) ähnlich wie (76) die Form haben muss

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)z^{\mu_1} + \varphi_2(x)z^{\mu_2} + \dots + \varphi_{n-\rho}(x)z^{\mu_{n-\rho}}, \tag{106}$$

und dass somit nur die Determinante

$$\begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & \dots & dz_{n-\rho} \\ z^{\mu_1} & z_1^{\mu_1} & z_2^{\mu_1} & \dots & z_{n-\rho}^{\mu_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{\mu_{n-\rho}} & z_1^{\mu_{n-\rho}} & z_2^{\mu_{n-\rho}} & \dots & z_{n-\rho}^{\mu_{n-\rho}} \end{vmatrix} = 0 \tag{107}$$

ein Integral mit $n - \rho$ von einander unabhängigen Variabeln besitzen könnte; dies ist aber der vorher angestellten Untersuchung zufolge dann und nur dann der Fall, wenn die Determinante die Form hat

$$(108) \qquad \begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 & dz_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ z^2 & z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder eine solche, welche erhalten wird, wenn $z = Z^k$ gesetzt wird, worin k eine rationale Zahl bedeutet; es muss somit wieder $n - \rho = 3$ sein, und die Differentialgleichung jedenfalls wieder — von algebraischen Substitutionen für die abhängige Variable abgesehen — die Form haben

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)z + \varphi_3(x)z^2,$$

die bereits oben behandelt ist.

Wir erhalten somit jetzt den folgenden allgemeinen Satz:

Unter allen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(109) \qquad F\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

haben nur die in der Form

$$(110) \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)z + \varphi_3(x)z^2$$

enthaltenen und die durch algebraische Substitution aus diesen abgeleiteten die Eigenschaft, dass sich ihr allgemeines Integral als eine algebraische Function einer bestimmten Anzahl particulärer Integrale ausdrücken lässt, und zwar gilt für alle Differentialgleichungen (110) *die Beziehung*

$$z = \frac{c_3 z_1 (z_2 - z_3) + c z_2 (z_3 - z_1)}{c_3 (z_2 - z_3) + c (z_3 - z_1)},$$

oder, wie leicht aus den obigen Formeln zu entnehmen, in symmetrischer Form

$$\begin{vmatrix} z & cz & 1 & c \\ z_1 & c_1 z_1 & 1 & c_1 \\ z_2 & c_2 z_2 & 1 & c_2 \\ z_3 & c_3 z_3 & 1 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder anders ausgedrückt:

Für jede Differentialgleichung erster Ordnung bilden die particulären Integrale unendlich viele selbständige, nicht durch algebraische Beziehungen auf einander zurückführbare Functionen; die Differentialgleichungen (110) *und die durch algebraische Substitution aus diesen abgeleiteten allein haben die Eigenschaft nur drei, in dem angegebenen Sinne, wesentlich verschiedene Functionen zu definiren.*