RECHERCHES SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DES FONCTIONS ARBITRAIRES D'UNE VARIABLE ET PRINCIPALEMENT DE CELLES QUI, DANS UN INTERVALLE FINI, ADMETTENT UNE INFINITÉ DE MAXIMA ET DE MINIMA.

PAR

R. LIPSCHITZ.[1]

Traduit du latin par M. PAUL MONTEL, à Paris.

Les séries qui procèdent suivant les sinus et les cosinus des multiples d'un angle, à l'aide desquelles on développe une fonction arbitraire d'une variable sont depuis longtemps très employées dans les diverses branches des mathématiques par tous ceux qui s'occupent de ces questions. C'est pourquoi il appartenait aux géomètres d'étudier à fond le champ étendu de ces fonctions et de tracer la limite entre celles qui peuvent être développées en séries trigonométriques et celles qui ne possèdent pas cette propriété. L'éminent LEJEUNE-DIRICHLET s'est acquitté de cette charge, sans parler des efforts tentés auparavant par d'autres, dans son célèbre mémoire intitulé: »Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données».[2] Qu'il me soit permis d'esquisser les progrès considérables que ce mémoire a fait faire à l'analyse afin de rendre plus claires la nature et la portée des questions abordées et résolues dans ce travail.

Le mémoire du célèbre géomètre repose sur le principe suivant: étant donnée une fonction arbitraire $\varphi(x)$, dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ de la variable x, formons la série

[1] Journal de Crelle V. 63 (1864). p. 296.

[2] Journal de Crelle V. 4 p. 157.

$$(1)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\cos x\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha+\cos 2x\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cos 2\alpha\,d\alpha+\cdots\\ \sin x\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha+\sin 2x\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\sin 2\alpha\,d\alpha+\cdots;\end{array}\right.$$

la somme des $2n+1$ premiers termes de cette série s'exprime par l'intégrale définie

$$(2)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,d\alpha;$$

si cette intégrale admet une limite lorsque n croît indéfiniment, cette valeur limite n'est autre que la somme de la série (1). Tout le raisonnement va reposer sur la condition que $\varphi(x)$ soit finie dans tout l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ et ne présente qu'un *nombre fini* de discontinuités et un nombre fini de maxima ou minima. On démontre d'ailleurs, la proposition suivante:

Théorème I. Les quantités g et h vérifiant les inégalités $0\leq g<h\leq\frac{\pi}{2}$, soit $f(\beta)$ une fonction définie depuis la valeur $\beta=g$ jusqu'à la valeur $\beta=h$, finie, continue, constante ou croissante dans tout l'intervalle considéré ou bien constante ou décroissante, alors, l'intégrale

$$\int_g^h f(\beta)\,\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$$

a une limite lorsque k croît indéfiniment. Cette limite est nulle lorsque la quantité g est positive et égale à $\frac{\pi}{2}f(0)$ lorsque la quantité g est nulle.

On déduit de ce théorème, sous les conditions énoncées ci dessus, que l'intégrale (2) converge, lorsque n croît indéfiniment, vers la valeur

$$\frac{1}{2}[\varphi(x-\varepsilon)+\varphi(x+\varepsilon)],$$

en désignant par ε une *quantité* infiniment petite; il en résulte que la série (1) est convergente pour toute valeur de x. On lit d'autre part à la fin du mémoire cité, les mot suivants: »Il nous resterait à considérer les cas où les suppositions que nous avons faites sur le nombre des solutions de continuité et sur celui des valeurs maxima et minima cessent d'avoir lieu. Ces cas singuliers peuvent être ramenés à ceux que nous venons de considérer.» Et, quelques mots plus loin: »mais la chose, pour être faite avec toute la clarté qu'on peut désirer, exige quelques détails liés aux principes fondamentaux de l'analyse infinitésimale et qui seront exposés dans une autre note, dans laquelle je m'occuperai aussi de quelques autres propriétés assez remarquables de la série (7)», qui est notre série (1). Comme il est tout à fait regrettable pour les géomètres que ce travail n'ait jamais vu le jour, nous nous sommes proposés de retrouver les traces de ces recherches et d'en tirer parti dans la mesure de nos forces. Rappelons d'abord ce qu'on a pu réunir des écrits de l'éminent LEJEUNE-DIRICHLET: nous possédons en effet, en outre du travail cité plus haut, une autre exposition de la même démonstration dans le répertoire de physique publié par les distingués DOVE et MOSER et le célèbre mémoire intitulé: »Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données».[1]

Les fonctions $\varphi(x)$ qui ne satisfont pas aux conditions précédemment énoncées peuvent être distribuées en trois types suivant que, dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, elles prennent des valeurs infinies ou possèdent un nombre infini de discontinuités ou un nombre infini de maxima et de minima. Il suffit d'examiner chacun de ces trois cas, pour ainsi dire, en lui-même, la réunion de deux ou de trois de ces cas modifiant plutôt la forme que la nature et les propriétés de la série (1).

On trouvera les restrictions auxquelles la fonction $\varphi(x)$ doit être assujettie dans les deux premiers cas, en cherchant des conditions telles que les intégrales définies qui jouent le rôle de coefficients dans la série (1), aient certainement un sens. Dans le premier cas, si on appelle (a, b) un intervalle compris entre $-\pi$ et $+\pi$, il est nécessaire que l'intégrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ demeure une fonction finie et continue des variables a et b.[2] Soient $c_1, c_2, \dots c_\mu$, toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction de x est infinie et $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_\mu$, des quantités aussi petites que l'on veut; on peut détacher de l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ μ intervalles partiels $(c_1-\delta_1, c_1+\delta_1)$, $(c_2-\delta_2, c_2+\delta_2)$, $\dots$ $(c_\mu-\delta_\mu, c_\mu+\delta_\mu)$ que nous appelerons intervalles de première espèce. Quant à l'espace restant, il est composé d'un nombre fini

[1] Journal de Crelle. Vol. XVII p. 35.
[2] Journal de Crelle. Vol. XVII p. 54.

d'intervalles d'une seconde espèce, dans chacun desquels la fonction $\varphi(x)$ satisfait aux conditions imposées à la fonction $f(\beta)$ dans le théorème I. Pour le second cas, dans lequel la fonction $\varphi(x)$ possède dans l'intervalle fini $(-\pi, +\pi)$ une infinité de discontinuités, il est nécessaire que, si l'on désigne par a et b deux nombres placés entre $-\pi$ et $+\pi$, on puisse toujours trouver entre a et b des nombres r et s tels que la fonction $\varphi(x)$ demeure finie et continue dans l'intervalle (r, s).[1] On déduit de là, par un raisonnement convenable, que l'on peut partager l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ en un nombre fini d'intervalles partiels dont les deux espèces sont analogues aux deux espèces du premier cas.[2] Chaque intervalle de première espèce a une longueur arbitrairement petite et contient une infinité de discontinuités; nous désignerons ces intervalles par les mêmes notations que précédemment: $(c_1 - \delta_1, c_1 + \delta_1), (c_2 - \delta_2, c_2 + \delta_2), \ldots . (c_\mu - \delta_\mu, c_\mu + \delta_\mu)$. Chaque intervalle de seconde espèce possède la propriété que la fonction $\varphi(x)$ satisfasse, dans tout cet intervalle, aux conditions auxquelles est astreinte la fonction $f(\beta)$ dans le théorème I. S'il s'agit maintenant de décider de la convergence de la série (1), le point capital réside dans la question de savoir si l'intégrale (2) s'approche ou non d'une valeur limite lorsque n croît indéfiniment. Pour cela, attribuons à x une valeur arbitraire de l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ mais différente des nombres $c_1, c_2, \ldots c_\mu$; on peut toujours, dans l'un comme dans l'autre cas, choisir les quantités $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\mu$ assez petites pour que la valeur x tombe dans un intervalle de seconde espèce. Comme l'intégrale (2) est étendue de $-\pi$ à $+\pi$, si on divise cet intervalle comme ci-dessus, cette intégrale sera égale à une somme d'intégrales de même forme dont les limites seront celles des intervalles de première ou de seconde espèce. Nous appellerons intégrales de première espèce, celles qui sont étendues aux intervalles de première espèce et intégrales de seconde espèce celles qui sont étendues aux intervalles de seconde espèce. Que les intégrales de première espèce puissent être rendues aussi petites qu'on le veut, par un choix convenable des quantités $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\mu$, quelle que soit la valeur de n, cela a été démontré au moins dans le premier cas par l'éminent Lejeune-Dirichlet[3] mais, dans le second cas, repose sur ce fait que chacune des intégrales est la somme d'une infinité d'intégrales constituées de manière que cette somme même puisse être rendue aussi petite qu'on le veut. Pour les intégrales de seconde espèce, elles sont constituées de telle sorte que, à l'aide du théorème I, il apparaît immédiatement que chacune d'elles a une limite

[1] Journal de Crelle Vol. IV p. 169.

[2] L'auteur suppose que l'ensemble des points de discontinuité est non dense et croit pouvoir en conclure que le dérivé de cet ensemble ne comprend qu'un nombre fini de points. Cette hypothèse doit être introduite dans ce qui suit. (Note du Traducteur.)

[3] Journal de Crelle Vol. XVII p. 55.

lorsque n croît indéfiniment. On conclut de là que, lorsque n croît indéfiniment, l'intégrale (2) a pour limite

$$\frac{1}{2}[\varphi(x-\varepsilon)+\varphi(x+\varepsilon)]$$

(où ε est un infiniment petit), et cette valeur est la somme de la série (1). Il est donc manifeste que, sous les conditions énoncées, notre série est convergente pour chaque valeur de x entre $-\pi$ et $+\pi$, les valeurs $c_1, c_2, \ldots c_\mu$ exceptées. D'ailleurs on ne peut affirmer qu'il n'existe aucun cas où la série (1) aurait un sens, même pour ces valeurs particulières. Mais nous laisserons ici de côté la recherche de ces cas.

Il nous reste à nous occuper du troisième cas, dans lequel la fonction $\varphi(x)$ est continue dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ sauf pour un nombre fini de valeurs de discontinuités, mais possède une infinité de maxima et de minima. Assurément, dans les écrits de l'éminent LEJEUNE-DIRICHLET, ne se trouve aucune indication permettant de frayer une route pour résoudre ces questions, si ce n'est les mots suivants se rapportant aux trois cas, qu'on peut lire dans le premier des mémoires cités[1]: »La restriction que je viens de préciser, et celle de ne pas devenir infinie, sont les seules auxquelles la fonction $\varphi(x)$ soit sujette et tous les cas qu'elles n'excluent pas peuvent être ramenés à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède.» Remarquons que la restriction dont il s'agit ici est celle qui concerne notre second cas et le premier cas (où la fonction $\varphi(x)$ a des valeurs infinies) n'a pas été traité avant le mémoire intitulé: »Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles etc.» Aussi étudierons nous le troisième cas avec le plus grand soin.

Il y a assurément une grande différence entre les deux premiers cas et le troisième, car, dans ces premiers cas, la fonction $\varphi(x)$ est astreinte à des conditions telles que les intégrales définies, coefficients de la série (1) aient un sens alors que dans le dernier cas il résulte de l'hypothèse même que ces conditions sont remplies. En effet, désignons par $a_1, a_1, \ldots a_\nu$, les valeurs de discontinuité de la fonction $\varphi(x)$; chacune des intégrales

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha$$

est égale à une somme d'intégrales de même forme, prises entre les limites $-\pi$ et a_1, a_1 et $a_2, \ldots, a_\nu$ et π et il n'est pas douteux que chacune des intégrales de chacune de ces sommes et par suite les sommes elles-mêmes aient un sens. Car, la

[1] Journal de Crelle. Vol. IV p. 169.

notion d'intégrale définie repose sur le maintien de la continuité de la fonction dans l'intervalle d'intégration et demeure la même si on trouve une infinité de maxima et de minima dans l'intervalle d'intégration. Mais on peut obtenir, de deux manières entièrement différentes, un nombre infini de maxima et de minima dans un intervalle fini de la variable.

Considérons en effet un intervalle (a, b); ou bien on peut intercaler entre a et b les nombres $r-\delta$ et $r+\delta$ tels qu'il y ait un nombre fini de maxima et minima dans $(a, r-\delta)$ et $(r+\delta, b)$, mais un nombre infini entre $r-\delta$ et $r+\delta$, quelque petite que soit la distance 2δ de ces deux nombres; ou bien, quelles que soient les quantités r et s, situées dans l'intervalle (a, b) et à une distance finie l'une de l'autre, on ne peut jamais trouver un nombre fini de maxima et de minima dans l'intervalle (r, s); ou bien, l'intervalle considéré contient un nombre fini d'intervalles non nuls dans lesquels l'une ou l'autre hypothèse est réalisée. Pour abréger, nous énoncerons ces faits en disant que, dans le premier cas, la fonction a une oscillation pour $x=r$; dans le second, que la fonction a une oscillation dans tout l'intervalle (a, b); enfin, dans le troisième, que la fonction a des oscillations à la fois pour certaines valeurs et dans certains intervalles finis de la variable x. Nous voyons que les deux genres d'oscillations sont entièrement différents.[1]

L'examen de tous les faits servant à établir la convergence de la série (1) montre qu'il est nécessaire de s'appuyer sur une proposition qui jouera dans nos recherches le rôle du théorème I, mais aura une généralité plus grande. C'est pourquoi nous nous proposons d'établir le

Théorème II. Désignons par g et h des quantités vérifiant les inégalités

$$0 \leq g < h \leq \frac{\pi}{2},$$

et soit $f(\beta)$, une fonction qui, dans l'intervalle (g, h) reste comprise entre les valeurs positive et négative d'une constante; telle que la différence $f(g+\delta)-f(g)$ tende vers zéro avec δ; telle que la différence $f(\beta+\delta)-f(\beta)$, pour $g<\beta<h$, ait une valeur absolue inférieure au produit d'une constante par une puissance positive quelconque de δ; alors l'intégrale $\int_g^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$ a une limite lorsque

[1] L'auteur suppose que trois cas seulement peuvent se présenter: ou bien l'ensemble dérivé de l'ensemble des valeurs correspondant aux maxima et minima ne comprend qu'un nombre fini de points; ou bien cet ensemble est partout dense; ou bien l'intervalle donné est la réunion d'un nombre fini d'intervalles partiels de chacune de ces espèces. La démonstration qui suit s'applique d'ailleurs à tous les cas possibles. (Note du Traducteur).

k augmente indéfiniment. Cette limite est nulle si g est positive et a pour valeur $\frac{\pi}{2}f(0)$ si g est nulle. On peut établir cette proposition comme il suit.

Démonstration. On voit très facilement, à l'aide des mémoires cités plus haut de l'éminent LEJEUNE-DIRICHLET, qu'il suffit de démontrer notre proposition dans l'hypothèse où $g = 0$ et où la fonction $f(\beta)$ est toujours positive dans l'intervalle $(0, h)$. En conséquence, nous l'établirons seulement pour le cas où, dans l'intervalle $(0, h)$, la fonction $f(\beta)$ satisfait aux inégalités $0 < f(\beta) < A$; où la différence $f(\delta) - f(0)$ a pour limite 0 avec δ; où la différence $f(\beta + \delta) - f(\beta)$, pour $0 < \beta < h$ demeure en valeur absolue, lorsque δ décroît, inférieure à l'expression $B\delta^a$, les signes A, B, a désignant des quantités positives; l'intégrale

$$S = \int_0^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta \tag{3}$$

possède alors la propriété de converger vers $\frac{\pi}{2}f(0)$ lorsque la quantité positive k croît indéfiniment. Nous nous servirons des notations utilisées par l'éminent LEJEUNE-DIRICHLET dans le mémoire qui se trouve dans le répertoire publié par les distingués MOSER et DOVE et nous en extraierons quelques formules. En cet endroit, en supposant k égal au nombre impair $2n + 1$ (et l'introduction de cette restriction est sans importance pour le théorème II et suffit dans la suite), on trouve, de la manière la plus simple la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Si on désigne alors par $\frac{r\pi}{k}$, le plus grand multiple de $\frac{\pi}{k}$ contenu dans h, l'intégrale S se partage en $r + 1$ intégrales aux limites 0 et $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{k}$ et $\frac{2\pi}{k}, \ldots, \frac{r\pi}{k}$ et h et l'intégrale (4) en un certain nombre d'intégrales comprises entre des limites analogues; il vient ainsi

$$S = R_1 - R_2 + \cdots + (-1)^r R_{r+1} \tag{5}$$

$$R_\nu = (-1)^{\nu-1}\int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta \tag{6}$$

$$\frac{\pi}{2} = \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 \ldots, \tag{7}$$

$$\varrho_\nu = (-1)^{\nu-1} \int\limits_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\, d\beta. \tag{8}$$

Ensuite, la quantité positive ϱ_ν vérifie les inégalités

$$\frac{2}{k} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\nu\pi}{k}} < \varrho_\nu < \frac{2}{k} \cdot \frac{1}{\sin\frac{(\nu-1)\pi}{k}}, \tag{9}$$

et, si $2m$ désigne un nombre pair quelconque inférieur à r, on a

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} > \varrho_1 - \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} - \varrho_{2m} \\ \frac{\pi}{2} < \varrho_1 - \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} - \varrho_{2m} + \varrho_{2m+1}, \end{cases} \tag{10}$$

et, il en résulte pour la quantité ϱ_1

$$\varrho_1 < \frac{\pi}{2} + \frac{2}{k} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}}. \tag{10^a}$$

Nous avons encore besoin pour notre recherche de porter notre attention sur la somme composée de parties positives

$$\varrho_{\nu+1} + \varrho_{\nu+2} + \cdots + \varrho_{\nu'},$$

dans laquelle $\nu \geq 1$ $\nu' \leq r$, et de trouver une limite supérieure de la valeur de cette somme. Comme, dans l'expression (8) de la quantité ϱ_ν, le facteur $\sin k\beta$ ne change pas de signe dans l'intervalle d'intégration et ne dépasse jamais l'unité, on a

$$\varrho_\nu < \int\limits_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{d\beta}{\sin\beta},$$

d'où l'on déduit la limite cherchée

$$(11)\qquad \varrho_{\nu+1}+\varrho_{\nu+2}+\cdots+\varrho_{\nu'}<\int\limits_{\frac{\nu\pi}{k}}^{\frac{\nu'\pi}{k}}\frac{d\beta}{\sin\beta}=\log\operatorname{tg}\frac{\nu'\pi}{2k}-\log\operatorname{tg}\frac{\nu\pi}{2k}.$$

Posons alors

$$(12)\qquad \begin{cases} S'=R_1-R_2+\cdots+R_{2m-1}-R_{2m}\\ S''=R_{2m+1}-R_{2m+2}+\cdots+(-1)^r R_{r+1}\end{cases}$$

de sorte que l'on a

$$(13)\qquad S=S'+S''$$

et voyons comment se comportent les sommes S' et S'' lorsque le nombre k croît indéfiniment. Dans ce but, nous ramènerons à une forme un peu différente l'expression $R_{2t+1}-R_{2t+2}$ qui, si $t<m$ est une partie de la somme S' et si $t\geq m$ est une partie de la somme S''. Par l'introduction dans l'expression de R_ν de la nouvelle variable $\gamma=k\beta$, il vient

$$(14)\qquad R_\nu=(-1)^{\nu-1}\int\limits_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi}f\left(\frac{\gamma}{k}\right)\frac{\sin\gamma\,d\gamma}{\sin\frac{\gamma}{k}\;k}=\int\limits_0^{\pi}f\left[\frac{(\nu-1)\pi+\gamma}{k}\right]\frac{\sin\gamma}{\sin\left[\frac{(\nu-1)\pi+\gamma}{k}\right]}\frac{d\gamma}{k},$$

d'où

$$(15)\qquad R_{2t+1}-R_{2t+2}=\int\limits_0^{\pi}\left[\frac{f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)}{\sin\frac{2t\pi+\gamma}{k}}-\frac{f\left[\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right]}{\sin\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}}\right]\frac{\sin\gamma\,d\gamma}{k}$$

ou mieux

$$(16)\qquad \begin{cases} R_{2t+1}-R_{2t+2}=\\ =\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\left[f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)+f\left(\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right)\right]\left[\frac{1}{\sin\frac{2t\pi+\gamma}{k}}-\right.\\ \qquad\qquad\left.-\frac{1}{\sin\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}}\right]\frac{\sin\gamma\,d\gamma}{k}\end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\left[f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)-f\left(\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right)\right]\left[\frac{1}{\sin\frac{2t\pi+\gamma}{k}}+\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. +\frac{1}{\sin\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}}\right]\frac{\sin\gamma\, d\gamma}{k}. \end{array} \right.$$

Comme les facteurs qui entrent dans ces deux intégrales

$$\frac{1}{\sin\frac{2t\pi+\gamma}{k}}-\frac{1}{\sin\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}},\ \sin\gamma \text{ et } \frac{1}{\sin\frac{2t\pi+\gamma}{k}}+\frac{1}{\sin\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}}$$

demeurent positifs dans le champ d'intégration, on pourra estimer la valeur de la première intégrale, en remplaçant le facteur $f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)+f\left[\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right]$ par une quantité plus grande ou plus petite et la valeur de la seconde intégrale en remplaçant le facteur $f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)-f\left[\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right]$ par une quantité plus grande ou plus petite. Il y a lieu d'opérer différemment suivant que $t<m$ ou $t\geq m$.

Dans le premier cas, ne se trouvent sous les signes d'intégration de la formule (16) que les valeurs de la fonction $f(\beta)$ qui correspondent à l'intervalle $\left(0, \frac{2m\pi}{k}\right)$. Si nous désignons par $f(0)+\lambda$ le maximum absolu et par $f(0)-\mu$ le minimum absolu de ces valeurs qui, par hypothèse, sont positives et inférieures à A il est clair que la somme $\frac{1}{2}f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)+\frac{1}{2}f\left[\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right]$ est comprise entre $f(0)-\mu$ et $f(0)+\lambda$, que la différence $\frac{1}{2}f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)-\frac{1}{2}f\left[\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right]$ est comprise entre $\pm\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)$ et on obtient les relations

$$(17)\quad \left\{ \begin{array}{l} R_{2t+1}-R_{2t+2}<[f(0)+\lambda](\varrho_{2t+1}-\varrho_{2t+2})+\frac{\lambda+\mu}{2}(\varrho_{2t+1}+\varrho_{2t+2}) \\ t<m; \\ R_{2t+1}-R_{2t+2}>[f(0)-\mu](\varrho_{2t+1}-\varrho_{2t+2})-\frac{\lambda+\mu}{2}(\varrho_{2t+1}+\varrho_{2t+2}). \end{array} \right.$$

Dans le second cas, où $t\geq m$, sous les signes d'intégration de la formule (16) ne se trouvent que des valeurs de $f(\beta)$ correspondant aux valeurs de β comprises entre $\frac{2m\pi}{k}$ et h. Rappelons alors que la somme $\frac{1}{2}f\left(\frac{2t\pi+\gamma}{k}\right)+\frac{1}{2}f\left[\frac{(2t+1)\pi+\gamma}{k}\right]$

est positive et inférieure à A. Pour estimer la différence $\frac{1}{2} f\left(\frac{2t\pi + \gamma}{k}\right) - \frac{1}{2} f\left[\frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}\right]$, dans laquelle γ prend toutes les valeurs entre 0 et π, il est permis de supposer le nombre k assez grand pour pouvoir utiliser l'hypothèse faite sur la différence $f(\beta + \delta) - f(\beta)$. En effet, puisque la valeur absolue de la différence $f(\beta+\delta) - f(\beta)$, si $0 < \beta < h$, devient, lorsque δ est une quantité positive décroissante, inférieure à $B\delta^a$ et que, dans notre cas, on a $\frac{2t\pi + \gamma}{k} \geq \frac{2m\pi}{k}$, $\delta = \frac{\pi}{k}$, on voit que la différence $\frac{1}{2} f\left(\frac{2t\pi + \gamma}{k}\right) - \frac{1}{2} f\left[\frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}\right]$ est comprise entre les limites $\pm \frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k}\right)^a$. On obtient alors les relations

$$(18)\quad \begin{cases} R_{2t+1} - R_{2t+2} < A\,(\varrho_{2t+1} - \varrho_{2t+2}) + \frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k}\right)^a (\varrho_{2t+1} + \varrho_{2t+2}) \\ t \geq m; \\ R_{2t+1} - R_{2t+2} > -\frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k}\right)^a (\varrho_{2t+1} + \varrho_{2t+2}). \end{cases}$$

Nos formules (17) et (18) sont applicables à toutes les parties des sommes S' et S'', excepté R_{r+1} si r est égal à un nombre pair $2q$ ou l'expression $R_r - R_{r+1}$ si r est égal à un nombre impair $2q+1$. Comme il résulte des hypothèses que $R_r > 0$, $R_{r+1} > 0$, $R_r < A\varrho_r$, $R_{r+1} < A\varrho_{r+1}$, $\varrho_{r+1} < \varrho_r$, il n'est pas douteux que la quantité R_{r+1}, si $r = 2q$, la quantité $R_r - R_{r+1}$, si $r = 2q+1$ soient comprises entre les mêmes limites $\pm A\varrho_{2q}$. On peut donc évaluer de la manière suivante les sommes S' et S''

$$(19)\quad \begin{cases} S' < [f(0) + \lambda](\varrho_1 - \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} - \varrho_{2m}) + \frac{\lambda + \mu}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} + \varrho_{2m}), \\ S' > [f(0) - \mu](\varrho_1 - \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} - \varrho_{2m}) - \frac{\lambda + \mu}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} + \varrho_{2m}), \\ S'' < A\,(\varrho_{2m+1} - \varrho_{2m+2} + \cdots + \varrho_{2q-1} - \varrho_{2q}) + \frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k}\right)^a (\varrho_{2m+1} + \cdots + \varrho_{2q}) + A\varrho_{2q}, \\ S'' > -\frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k}\right)^a (\varrho_{2m+1} + \cdots + \varrho_{2q}) - A\varrho_{2q}. \end{cases}$$

Maintenant, des formules (9), (10), (10ª), (11) découlent les suivantes

$$
(20)\quad \begin{cases}
\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin\dfrac{2m\pi}{k}} < \varrho_1 - \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} - \varrho_{2m} < \dfrac{\pi}{2}, \\[2ex]
\varrho_{2m+1} - \varrho_{2m+2} + \cdots + \varrho_{2q-1} - \varrho_{2q} < \dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin\dfrac{2m\pi}{k}}, \quad \varrho_{2q} < \dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin\dfrac{(2q-1)\pi}{k}}, \\[2ex]
\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_{2m-1} + \varrho_{2m} < \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{k}} + \log\operatorname{tg}\dfrac{m\pi}{k} - \log\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2k}, \\[2ex]
\varrho_{2m+1} + \cdots + \varrho_{2q} < \log\operatorname{tg}\dfrac{q\pi}{k} - \log\operatorname{tg}\dfrac{m\pi}{k},
\end{cases}
$$

qui, substituées dans les formules (19) donnent les nouvelles formules

$$
(21)\quad \begin{cases}
S' < [f(0)+\lambda]\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\lambda+\mu}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{k}} + \log\operatorname{tg}\dfrac{m\pi}{k} - \log\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2k}\right), \\[2ex]
S' > [f(0)-\mu]\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin\dfrac{2m\pi}{k}}\right) - \dfrac{\lambda+\mu}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{k}} + \log\operatorname{tg}\dfrac{m\pi}{k} - \log\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2k}\right), \\[2ex]
S'' < \dfrac{1}{2}B\left(\dfrac{\pi}{k}\right)^{\alpha}\left(\log\operatorname{tg}\dfrac{q\pi}{k} - \log\operatorname{tg}\dfrac{m\pi}{k}\right) + A\dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin\dfrac{(2q-1)\pi}{k}} + A\dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin\dfrac{2m\pi}{k}}, \\[2ex]
S'' > -\dfrac{1}{2}B\left(\dfrac{\pi}{k}\right)^{\alpha}\left(\log\operatorname{tg}\dfrac{q\pi}{k} - \log\operatorname{tg}\dfrac{m\pi}{k}\right) - A\dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin\dfrac{(2q-1)\pi}{k}}.
\end{cases}
$$

Pour conclure de ces relations l'exactitude de notre proposition, nous donnerons à m une valeur fixe, tandis que le nombre k croîtra continuellement. Par hypothèse, la différence $f(\delta) - f(0)$ peut être rendue, lorsque δ décroît, aussi petite que l'on veut, $f(0)+\lambda$ est le maximum absolu, $f(0)-\mu$ le minimum absolu de la fonction $f(\beta)$ dans l'intervalle $\left(0, \dfrac{2m\pi}{k}\right)$ et la quantité $\dfrac{2m\pi}{k}$ décroît continuellement, donc les quantités λ et μ ne peuvent pas ne pas décroître elles-mêmes indéfiniment. D'autre part, en utilisant des principes d'analyse connus, on peut écrire

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{k}} + \log \operatorname{tg}\dfrac{m\pi}{k} - \log \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2k} = \dfrac{2}{\pi} + \log 2m + w, \\[2ex] \dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin\dfrac{2m\pi}{k}} = \dfrac{1}{m\pi} + w', \\[2ex] \log \operatorname{tg}\dfrac{q\pi}{k} - \log \operatorname{tg}\dfrac{m\pi}{k} = \log \operatorname{tg}\dfrac{h}{2} - \log\dfrac{m\pi}{k} + w'', \\[2ex] \dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin\dfrac{(2q-1)\pi}{k}} = \dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin h} + w''', \end{cases}$$

où les signes w, w', w'', w''' désignent des quantités qui tendent vers zéro lorsque k croît indéfiniment. En tenant compte de ces dernières formules, les relations (21) peuvent être ramenées à la forme suivante

$$(23)\quad \begin{cases} S' < [f(0)+\lambda]\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\lambda+\mu}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{\pi} + \log 2m + w\right), \\[2ex] S' > [f(0)-\mu]\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{m\pi} - w'\right) - \dfrac{\lambda+\mu}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{\pi} + \log 2m + w\right), \\[2ex] S'' < \dfrac{1}{2}B\left(\dfrac{\pi}{k}\right)^{a}\left(\log \operatorname{tg}\dfrac{h}{2} - \log\dfrac{m\pi}{k} + w''\right) + A\left(\dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin h} + w''' + \dfrac{1}{m\pi} + w'\right), \\[2ex] S'' > -\dfrac{1}{2}B\left(\dfrac{\pi}{k}\right)^{a}\left(\log \operatorname{tg}\dfrac{h}{2} - \log\dfrac{m\pi}{k} + w''\right) - A\left(\dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\sin h} + w'''\right). \end{cases}$$

Remarquons que, dans ces formules, l'expression

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{\pi}{k}\right)^{a}\left(\log \operatorname{tg}\frac{h}{2} - \log\frac{m\pi}{k}\right),$$

qu'on peut écrire

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{\pi}{k}\right)^{a}\left(\log \operatorname{tg}\frac{h}{2} - \log m\right) + \frac{1}{2}B\left(\frac{\pi}{k}\right)^{a}\log\frac{k}{\pi}$$

peut être rendue aussi petite qu'on le veut, lorsque k croît indéfiniment, parce que la somme $\log \operatorname{tg}\frac{h}{2} - \log m$ garde une valeur constante, tandis que la puissance $\left(\frac{\pi}{k}\right)^{a}$ décroît et, enfin, parce que la fonction $\left(\frac{\pi}{k}\right)^{a}\log\frac{k}{\pi}$, bien que le facteur

$\log \frac{k}{\pi}$ croisse indéfiniment, décroît elle-même pour toute valeur positive de α. Et c'est ici que se trouve le point essentiel de notre démonstration. Si en effet, nous désignons par $\eta, \eta', \eta'', \eta'''$ des quantités tendant vers zéro lorsque k augmente indéfiniment, nous obtenons les formules

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{ll} S' < \frac{\pi}{2} f(0) + \eta & S' > \frac{\pi}{2} f(0) - \frac{A}{m\pi} + \eta' \\ S'' < \frac{A}{m\pi} + \eta'' & S'' > -\eta'''. \end{array} \right.$$

D'où l'on voit que, pourvu que m prenne une valeur telle que la quantité $\frac{A}{m\pi}$ soit inférieure à un nombre arbitrairement petit, ce qui est manifestement toujours possible, la somme S' est comprise entre des limites qui diffèrent de $\frac{\pi}{2} f(0)$ d'aussi peu que l'on veut, et la somme S'' est comprise entre des limites aussi voisines de zéro que l'on veut. Donc, puisque lorsque k croît indéfiniment, la somme S' a pour limite $\frac{\pi}{2} f(0)$ et la somme S'' a pour limite 0, il est évident que la somme $S = S' + S''$ a pour limite $\frac{\pi}{2} f(0)$. C'est ce que nous voulions démontrer.

En possession d'une démonstration rigoureuse du théorème II, nous sommes en mesure de mieux connaître la manière dont la série (1) se comporte dans notre troisième cas. Elle est, en effet, convergente et a toujours pour somme $\frac{1}{2}[\varphi(x-\varepsilon) + \varphi(x+\varepsilon)]$, en désignant par ε une quantité infiniment petite, quelle que soit la valeur attribuée à x dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ et cela, lorsque la fonction $\varphi(x)$ présente des oscillations pour certaines valeurs particulières de la variable et même dans tous les cas, sauf une exception, où la fonction $\varphi(x)$ présente des oscillations dans certains segments finis de l'intervalle total. Cette exception se présente lorsque dans un segment *fini*, bien que la différence $\varphi(x+\delta) - \varphi(x)$ tende vers zéro avec δ, puisque la continuité est conservée dans ce segment (c'est d'ailleurs la définition même de la continuité),[1] cette différence diminue cependant de telle sorte qu'on ne puisse trouver aucune puissance positive de δ qui lui reste supérieure *pour toutes les valeurs de la variable contenues dans ce segment.* C'est ce qui arrivera évidemment si $\varphi(x+\delta) - \varphi(x)$

[1] Journal de Crelle. Vol. IV, p. 159.

décroît de la même manière ou plus lentement que la fonction $\dfrac{1}{\log \frac{1}{\delta}}$.[1] D'ailleurs la démonstration demeure valable si, dans les segments où la fonction $\varphi(x)$ a une oscillation, il arrive que, *pour des valeurs particulières de la variable x*, la différence $\varphi(x+\delta)-\varphi(x)$ se comporte comme il vient d'être dit.

Ce cas d'exception écarté, on pourra toujours partager l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ de la fonction $\varphi(x)$ en un nombre fini d'intervalles partiels dont on obtiendra les extrémités en rangeant par ordre de grandeur 1° les valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction $\varphi(x)$ est discontinue, 2° celles où la fonction a des maxima et minima isolés, 3° celles où la fonction possède des oscillations, 4° les limites de segments dans lesquels la fonction a des oscillations, 5° enfin, les valeurs isolées, lorsqu'elles se présentent dans des segments de cette espèce, pour lesquelles la différence $\varphi(x+\delta)-\varphi(x)$ décroît plus lentement que n'importe quelle puissance positive de δ. L'intervalle d'intégration de l'intégrale (2) étant alors divisé de la même façon, l'intégrale (2) devient égale à une somme d'intégrales de même forme dont chacune a une valeur limite lorsque k croît indéfiniment, limite que l'on obtient facilement par l'application soit du théorème I, soit du théorème II; les conclusions annoncées en résultent.

J'espère pouvoir étudier à un autre moment et dans un nouveau mémoire la manière dont se comporte la série (1), dans la dernière hypothèse.

Ecrit à Bonn, le 10 Avril 1864.

---

[1] Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die in verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Art. 16. GAUSS.