RECHERCHES SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS.[1]

PAR

J. L. W. V. JENSEN

à COPENHAGUE.

Mes recherches sur la théorie des équations dont je vais exposer quelques points au deuxième Congrès des mathématiciens scandinaves, ont été commencées il y a plus de 25 ans. Jusqu'à présent, je n'en ai rien publié, non seulement parce que les matériaux que j'ai recueillis, étaient en évolution, lente il est vrai, mais aussi parce que mes occupations professionnelles ne me laissent que peu de loisir pour les publications scientifiques. Maintenant, que ces recherches sont essentiellement terminées, j'ai l'intention de les publier au fur et à mesure que me le permettront santé et loisir, en une série de cinq mémoires qui paraîtront en danois, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Danemark, et en français, de concert avec M. MITTAG-LEFFLER, dans les Acta Mathematica.

J'ai déjà présenté le sommaire du premier mémoire à la séance du 5 mai 1911 de l'Académie des Sciences, tandis qu'un point du deuxième mémoire a servi à une conférence faite à la société mathématique danoise le 16 mars 1911. Ce sont des propositions ayant rapport à ces deux communications que je me permettrai d'exposer ici, en les démontrant pour la plus grande partie.

La branche la plus importante de la théorie des équations, au point de vue des applications aux sciences naturelles ou à d'autres parties des mathématiques, est celle qui s'occupe de la séparation et du calcul approximatif des racines d'une

[1] Traduction de la conférence, faite le 29 et 31 août 1911 au deuxième Congrès des mathématiciens scandinaves à Copenhague et publiée dans le Compte-Rendu du congrès.

équation donnée, ou comme on pourrait également s'exprimer, des racines ou des zéros d'une fonction algébrique ou transcendante.

En ce qui concerne les équations algébriques, on serait disposé à présumer que le sujet a été essentiellement épuisé par les travaux de maîtres tels que Rolle, Descartes, Newton, Lagrange, Fourier, Cauchy, Gauss, Sturm, Jacobi, Borchardt, Sylvester, Hermite et Brioschi. A ces travaux, on pourrait en ajouter d'autres, moins connus, mais également importants comme les recherches de de Gua (Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 1741, pp. 92—95 et p. 95 et Mémoires... pp. 72—96 et pp. 435—494), où entre autres la règle de Descartes est prouvée pour la première fois et d'une manière simple, retrouvée plus tard par Laguerre et étendue par lui à des séries entières; celles de Waring (Miscellanea analytica, 1762, et Meditationes algebraicæ, 1770); les recherches de Campbell, commentateur de l'Arithmetica Universalis de Newton (Philosophical Transactions, n:o 404, traduites en latin et ajoutées à la troisième édition de l'Arithmetica de 1732); celles d'Olivier, qui prouve avec simplicité et élégance pour la première fois une proposition de Campbell (Journal de Crelle, t. 1); et enfin les recherches si variées de Laguerre que je m'excuse de nommer en dernier lieu tout en y attachant la plus grande importance.

Quant aux fonctions transcendantes, il en est tout autrement. On manque ici de méthodes pour traiter des fonctions d'une forme un peu générale. Ce fait est d'autant plus remarquable que d'importants problèmes attendent encore leur solution, faute de telles méthodes. Je n'ai qu'à rappeler la solution définitive du problème des nombres premiers où il s'agit de montrer qu'une fonction $\zeta(s)$ introduite dans la théorie des nombres par Riemann a toutes les racines imaginaires de la forme $\frac{1}{2} + \alpha i$, α étant réel. Mes recherches ont particulièrement eu pour but la solution du problème de Riemann. Pendant un certain nombre d'années, ces recherches n'ont abouti à aucun résultat, jusqu'à ce que j'aie compris qu'il importait de se procurer un nombre aussi grand que possible de méthodes pour traiter des classes de fonctions transcendantes, soit par l'extension de théorèmes connus sur la séparation et le nombre des racines des fonctions entières rationnelles aux fonctions transcendantes, soit par l'établissement de propositions nouvelles sur celles-ci. Nous verrons dans la suite des spécimens des deux sortes de théorèmes.

Je n'ai pas pris pour base de mes recherches la proposition la plus générale qu'on connaisse sur la séparation des racines d'une fonction entière rationnelle à coefficient réels, à savoir le théorème de Sturm lequel se prête — du moins théoriquement — à une discussion complète. Il est vrai que Borchardt a montré, grâce aux expressions que Sylvester a données pour les fonctions de Sturm, que l'on peut établir une série de déterminants symétriques, dépendant des sommes des puissances des racines, et dont les signes indiquent le nombre des racines imaginaires. Si l'on essaie de faire tendre à l'infini le degré de la fonction rationnelle donnée, tous ces déterminants deviendront infinis ou indéterminés et seront ainsi dépourvus de sens. Toutefois, ceci n'est point une difficulté réelle, car on peut, sans beaucoup de peine, transformer les déterminants de sorte qu'ils contiennent, au lieu des sommes des puissances positives des racines, des puissances négatives, et deviennent convergents pour des fonctions entières d'un genre donné fini. Les difficultés sont d'un tout autre caractère. La forme compliquée des expressions qu'on aurait à considérer, serait telle qu'il est même inutile de vouloir chercher à déterminer en pratique, par ce moyen, le caractère des racines d'une fonction rationnelle. Ce fait se présente à plus forte raison, dans le cas d'une fonction transcendante. Au début, j'ai donc eu recours à d'autres méthodes plus spéciales.

Soit

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

une fonction entière, ayant tous ses coefficients réels, ce que j'appelle, pour me servir d'un terme abrégé, une fonction »réelle». La fonction a, comme on sait, des racines imaginaires conjuguées deux à deux.[1] Si une telle fonction a précisément τ paires de racines imaginaires, où τ peut être zéro, entier positif ou infini, je dis pour abréger que le »type» de la fonction est τ. Ainsi par exemple $(1 + x)^n$, e^x, e^{x^2} sont du type $\tau = 0$, tandis que $(1 + x^2)^n$ est du type $\tau = n$.

Il y a une proposition connue de Cauchy qui joue un rôle important dans mes recherches. Sous une forme spécialisée, elle peut s'exprimer de la manière suivante: Si la fonction entière réelle $F(x,t)$ qui dépend d'un paramètre réel t, lié à une suite de valeurs continues ou discrètes, converge pour $\lim t = t_0$ et pour des valeurs bornées de $|x|$ *uniformément* vers la fonction entière $F(x, t_0)$, les racines de $F(x,t)$ convergeront vers les racines de $F(x, t_0)$. Dans l'hypothèse que le type de $F(x,t)$ ait une limite supérieure finie γ, quand t s'approche de t_0, on voit sans difficulté que le type de $F(x, t_0)$ doit être $\leqq \gamma$, car les racines imaginaires peuvent converger vers des limites réelles, mais non inversement.

Nous verrons maintenant quelques conséquences du théorème de Rolle et quelques extensions de celles-ci qui sont d'importance.

Soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

---

[1] Je me sers toujours du terme »racines imaginaires» pour désigner des racines complexes et non réelles.

une fonction entière rationnelle du m^e degré, réelle et du type τ. Elle a dès lors $m - 2\tau$ racines réelles, et suivant le théorème de ROLLE, $f'(x)$ aura un nombre impair de racines réelles entre deux racines consécutives de $f(x)$ où il importe de tenir compte d'une manière bien connue des racines multiples. La fonction $f'(x)$ a donc $m - 2\tau - 1 + 2k_1$ racines réelles, où k_1 est zéro ou entier positif. Si nous désignons le type de $f'(x)$ par τ' on a ainsi $m - 2\tau - 1 + 2k_1 = m - 1 - 2\tau'$ ou $\tau - \tau' = k_1$. En répétant le même raisonnement pour les dérivées suivantes de $f(x)$, on trouve $\tau - \tau^{(m-1)} = k_1 + k_2 + \cdots + k_{m-1}$ avec des désignations faciles à comprendre. Si l'on s'exprimait comme il suit: La proposition de ROLLE montre que $f'(x)$ a normalement une racine réelle dans chaque intervalle des racines de $f(x)$ et d'ailleurs en tout $2k_1$ racines réelles *accessoires*, on pourrait exprimer ce qui vient d'être trouvé, ainsi: Le type de $f(x)$ est égal à la moitié du nombre des racines réelles *accessoires* de $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots f^{(m-1)}(x)$.[1]

Il est évident que le type d'une fonction entière rationnelle ne peut augmenter par différentiation ce qui est d'ailleurs bien connu.

Soit $F(x)$ une fonction réelle, entière rationnelle ou transcendante dont nous déduisons une fonction rationnelle de la manière suivante. Supposons que le symbole $F(D)$, où D désigne le symbole de différentiation par rapport à x, se porte sur x^p, p étant un entier positif, nous obtenons par là une fonction rationnelle du degré p au plus, que voici

$$F(D) \,.\, x^p = F(0)x^p + \binom{p}{1} F'(0)\, x^{p-1} + \binom{p}{2} F''(0)\, x^{p-2} + \cdots + F^{(p)}(0) = F_p(x),$$

les $\binom{p}{n}$ désignant comme d'ordinaire des coefficients binomiaux. Comme on a

$$F'_p(x) = pF_{p-1}(x),$$

on voit que le type de $F_p(x)$ ne pourra jamais décroître pour p croissant. La fonction

$$(1) \quad \left(\frac{x}{p}\right)^p F_p\left(\frac{p}{x}\right) = F(0) + \frac{F'(0)}{\lfloor 1} x + \frac{F''(0)}{\lfloor 2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) x^2 + \cdots + \\ + \frac{F^{(p)}(0)}{\lfloor p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{2}{p}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{p}\right) x^p$$

est évidemment du même type que $F_p(x)$. On voit aisément que la fonction (1) converge *uniformément* vers $F(x)$ quand p tend vers l'infini, $|x|$ étant supposé borné.

[1] Pour être applicables dans tous les cas, les observations ci-dessus doivent être entendues de la manière suivante: si $f(x)$ a 0 ou 1 racines réelles, nous convenons de dire que $f'(x)$ en a normalement -1 ou 0.

La preuve en est si simple, grâce aux inégalités connues de CAUCHY-WEIERSTRASS pour les coefficients d'une série entière, que je peux m'en dispenser ici.

Si nous pouvons démontrer que le type de $F_p(x)$ a pour tous les p une limite supérieure γ, le type de $F(x)$ sera $\leqq \gamma$. Ce *principe* est fréquemment appliqué dans mes recherches et nous en verrons dans ce qui suit quelques exemples importants.

Dans les *Meditationes algebraicæ* de WARING, on trouve une proposition qui peut être exprimée de la manière suivante:

Soit $f(x)$ une fonction entière rationnelle et du type τ, et soit a une constante réelle, la fonction

$$af(x) + f'(x) = (a + D) . f(x) \tag{2}$$

sera tout au plus du type τ. On le prouve tout simplement en appliquant le théorème de ROLLE à $e^{ax}f(x)$, car on a

$$D(e^{ax}f(x)) = e^{ax}(af(x) + f'(x)).$$

Si nous répetons l'opération $(a + D)$ n fois avec des a différents ou égaux, nous avons démontré par là une proposition de POULAIN laquelle peut être exprimée ainsi:

Soit $g(x)$ une fonction entière rationnelle et du type o, et soit $f(x)$ comme ci-dessus une fonction du type τ,

$$g(D) . f(x) = g(0)f(x) + \frac{g'(0)}{\underline{|1}} f'(x) + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{\underline{|n}} f^{(n)}(x) \tag{3}$$

sera tout au plus du type τ, ce qui est d'ailleurs bien connu. Or, remplaçons dans (2) $f(x)$ par $e^{bx}f(x)$ où b est une constante réelle, nous trouvons que

$$(a + D) . e^{bx}f(x) = e^{bx}((a + b)f(x) + f'(x))$$

est tout au plus du type τ. Par conséquent le théorème de POULAIN a été étendu au cas où $f(x)$ est remplacée par $e^{bx}f(x)$.

Soit maintenant $F(x)$ une fonction réelle, entière, du genre o ou 1 et du type fini τ. Soit

$$F_n(x) = c e^{c_n x} x^\mu \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{\alpha_\nu}\right) e^{\frac{x}{\alpha_\nu}},$$ [1]

[1] On se gardera de confondre cette notation avec celle de la page précédente.

où $e^{c_n x}$ est le facteur exponentiel extérieur,[1] α_ν désigne les racines de $F(x)$ et n est d'une grandeur telle que toutes les racines imaginaires sont comprises dans le produit canonique. Comme nous venons de le prouver, le théorème de POULAIN s'applique à la fonction F_n et comme d'après WEIERSTRASS, le produit ci-dessus converge uniformément vers $F(x)$ pour $n = \infty$, $|x|$ étant borné, nous avons démontré de cette manière, que *le théorème de* POULAIN *reste applicable, si $f(x)$ est remplacée par une fonction entière du genre* o *ou* I *et du type* τ.

Voici un théorème encore plus général:

Soit $g(x)$ entière, rationnelle, du n^e degré et du type o, *et soit $F(x)$ entière, du genre $2q$ ou $2q+1$ et du type τ, $g(D).F(x)$ sera tout au plus du type $\tau + qn$.*

Je suis obligé d'omettre ici d'autres extensions du théorème de POULAIN concernant des fonctions $g(x)$ plus générales. Toutefois, il existe un cas spécial qui mérite une mention particulière.

Supposons en effet que dans la formule (3), nous posions $f(x) = x^p$, il s'ensuit que $g(D).x^p$ est du type o. Nous pouvons y remplacer $g(x)$ par $e^{cx}g(x)$ où c est une constante réelle, car si l'opérateur e^{cD} se porte sur la fonction entière rationnelle $g(D).x^p$, le résultat devient, d'après la formule de TAYLOR, égal à $g(D).(x+c)^p$.[2] En raisonnant comme ci-dessus, nous obtenons la proposition suivante:

Si $G(x)$ est une fonction réelle, entière du genre o ou I et du type o, $G(D).x^p$ sera du type o.

Dans un cas spécial, cette proposition était connue à LAGUERRE.

Je ferai voir maintenant comment le théorème que nous venons de démontrer, peut être étendu à des fonctions de type quelconque fini.

Soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

réelle et du type τ, et soit q un entier positif $\geqq m$, la fonction

$$x^q f\left(\frac{\mathrm{I}}{x}\right) = a_0 x^q + a_1 x^{q-1} + \cdots + a_m x^{q-m}$$

est également du type τ. En dérivant celle-ci $q-p$ fois par rapport à x, p étant entier, positif et $< q$, nous aurons, suivant le théorème de ROLLE, que

[1] Si F est du genre 1, c_n est fixe, mais si F est du genre 0, $c_n = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu}$.

[2] Je suppose qu'on connaît les règles les plus élémentaires pour le calcul des opérations distributives.

$$D^{q-p}\left(x^q f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{\lfloor q}{\lfloor p}\left(a_0x^p+a_1\frac{p}{q}x^{p-1}+a_2\frac{p(p-1)}{q(q-1)}x^{p-2}+\cdots\right)=\frac{\lfloor q}{\lfloor p}\varphi_q(x)$$

est tout au plus du type τ. Par conséquent

$$\lim_{q=\infty} q^p\varphi_q\left(\frac{x}{q}\right)=a_0x^p+pa_1x^{p-1}+p(p-1)a_2x^{p-2}+\cdots=f(D)\cdot x^p$$

sera tout au plus du type τ.

En raisonnant comme ci-dessus, on voit aisément que la proposition que nous venons de démontrer, peut immédiatement être étendue au cas où $f(x)$ est remplacée par une fonction entière du genre 0 ou 1 et du type τ, et en combinant ce résultat avec le principe précedemment démontré nous avons trouvé le théorème fondamental suivant:

Si $F(x)$ est une fonction réelle, entière, du genre 0 ou 1 et du type fini τ, la fonction entière rationnelle $F(D).x^p$ sera tout au plus du type τ, et si, inversement celle-ci est, pour un p quelconque, tout au plus du type τ, $F(x)$ sera tout au plus du type τ. A partir d'une certaine valeur de p, le type de $F(D).x^p$ sera précisément égal au type de $F(x)$.

Remarquons incidemment que cette proposition ne s'applique point aux fonctions de genre supérieur au premier.

Un exemple, tiré de mes recherches plus récentes, prouvera l'utilité du théorème que nous venons de démontrer. En faisant application combinée des propositions de DESCARTES et de STURM, M. E. MALO[1] a démontré la belle proposition qui suit: Si les fonctions réelles entières

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$$

et

$$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$$

ont toutes les deux leurs racines réelles, et si les coefficients de la dernière fonction sont tous positifs, toutes les racines de

$$a_0b_0+a_1b_1x+a_2b_2x^2+\cdots$$

seront également réelles.

Soient $F(x)$ et $G(x)$ des fonctions réelles, entières du genre 0 ou 1 et du type 0, et soient les coefficients de $G(x)$ exclusivement positifs, $F(D).x^p$ et $G(D).x^p$

[1] Journal de Mathématiques spéciales, 4:e série, t. IV, 1895.

seront des fonctions rationnelles auxquelles je peux appliquer le théorème de MALO. J'obtiens donc que

$$\sum_{\nu=0}^{p} F^{(\nu)}(0)\, G^{(\nu)}(0) \binom{p}{\nu}^2 x^{p-\nu}$$

est du type 0. Si nous y remplaçons x par $\frac{p^2}{x}$, et que nous multiplions par $\left(\frac{x}{p^2}\right)^p$, nous obtenons l'expression

$$\sum_{\nu=0}^{p} \frac{F^{(\nu)}(0)}{\lfloor\nu} \frac{G^{(\nu)}(0)}{\lfloor\nu} \left(1-\frac{1}{p}\right)^2 \left(1-\frac{2}{p}\right)^2 \cdots \left(1-\frac{\nu-1}{p}\right)^2 x^\nu.$$

Si nous faisons croître p à l'infini, l'expression ci-dessus converge *uniformément*, pour $|x|$ borné, vers

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(0)}{\lfloor\nu} \frac{G^{(\nu)}(0)}{\lfloor\nu} x^\nu,$$

et de cette manière *la proposition de* MALO *est étendue aux fonctions entières transcendantes du genre* 0 *ou* 1. Dans ce cas, une application directe de la méthode de M. MALO aurait été impossible.

Une des applications les plus importantes qu'on puisse faire de notre théorème fondamental appartiendra à la dernière partie de mes recherches. Bien que je ne puisse communiquer sans compte-rendu détaillé des recherches intermédiaires les résultats définitifs sous une forme compréhensible, je puis en faire une indication. Le dernier mémoire s'occupera d'une classe de fonctions entières du genre un

$$F(x) = \int_0^\infty \Psi(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha, \tag{4}$$

où la fonction réelle $\Psi(\alpha)$ qui peut être différentiée un nombre quelconque de fois tend vers zéro pour α croissant à l'infini, de sorte qu'on a uniformément pour des $|x|$ bornés

$$\lim_{\alpha=\infty} \Psi^{(\nu)}(\alpha) \cos \alpha x = 0, \quad \text{pour } \nu = 0, 1, 2, \cdots.$$

Cette classe de fonctions présente une importance particulière parce que la fonction ξ de RIEMANN

$$\xi(t) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\mathrm{I} + \frac{s}{2}\right)(s-\mathrm{I})\zeta(s),\ s = \frac{\mathrm{I}}{2} + it,$$

y rentre comme cas spécial. En effet on a

$$\xi(x) = \int_0^\infty \Phi(\alpha) \cos \alpha x d\alpha,$$

où

$$\Phi(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (8\pi^2 e^{\frac{9}{2}\alpha} \nu^4 - 12\pi e^{\frac{5}{2}\alpha} \nu^2) e^{-\nu^2 \pi e^{2\alpha}}.$$

Je me propose d'examiner, en général, les conditions auxquelles doit satisfaire $\Psi(\alpha)$ pour que la fonction (4) soit du type o. En appliquant notre proposition fondamentale, nous voyons aussitôt *que $F(x)$ est du type* o *dans le cas, et seulement dans le cas où la fonction entière rationnelle du $p^{\text{ième}}$ degré*

$$F(D).x^p = \int_0^\infty \Psi(\alpha) \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{p}{2}\right]} \binom{p}{2\nu} (-\mathrm{I})^\nu x^{p-2\nu} \alpha^{2\nu} d\alpha$$

$$= \frac{\mathrm{I}}{2} \int_0^\infty \Psi(\alpha)((x+i\alpha)^p + (x-i\alpha)^p) d\alpha$$

est également du type o *pour p quelconque.* Je parviens à établir des conditions nécessaires à cet égard; par l'application des résultats d'autres recherches que j'ai faites, celles-ci aboutissent à des conditions suffisantes, bien que non nécessaires, et ces dernières sont heureusement applicables à la fonction ξ. Cependant, la vérification même des conditions exige, par suite de la forme compliquée de $\Phi(\alpha)$, un calcul très pénible. Par la méthode ci-dessus, j'ai réduit le problème de Riemann de transcendant qu'il était à un problème algébrique.

Avant d'aborder la démonstration des propositions qui seront publiées dans mon mémoire n:r 2, je dois communiquer d'autres résultats de mon premier mémoire. Je ne me restreins pas à déterminer le type des classes de fonctions que je traite, mais je trouve de plus des limites pour les racines imaginaires. Gauss a démontré la proposition suivante: Si $f(x)$ est une fonction entière rationnelle avec de coefficients complexes et que, dans le plan complexe de la variable x, nous marquions les racines de $f(x)$, les racines de $f'(x)$ ne tomberont pas en dehors du polygone convexe le plus petit qui comprend les racines de

$f(x)$.[1] La démonstration se fait très facilement à l'aide de la dérivée logarithmique et en faisant observer qu'aucune racine de $f'(x)$ ne peut se trouver d'un côté d'une droite si les racines de $f(x)$ se trouvent toutes de l'autre côté de la droite ou sur celle-ci.

Pour une fonction $F(x)$ *réelle*, entière et du genre 0 ou 1 je démontre une proposition plus précise dans des cas étendus. Formons une figure composée de l'axe réel et des cercles qui ont pour diamètres les segments de droites joignant deux à deux les racines imaginaires conjuguées. Je démontre alors qu'aucune racine de $F'(x)$ ne peut se trouver en dehors de la figure, et il en est de même de la fonction $aF(x) + F'(x)$ où a est réelle. *La même proposition garde encore sa validité pour $g(D) . F(x)$, où $g(x)$ est une fonction réelle, entière rationnelle, du $n^{\text{ième}}$ degré et du type 0; toutefois les cercles sont à remplacer par des ellipses dont les petits axes se terminent chacun dans une paire de racines conjuguées de $F(x)$, tandis que les grands axes sont $\sqrt{n}$ fois plus grands.*

Si les racines de $F(x)$ sont toutes limitées à la bande $-\eta < \Re\left(\frac{x}{i}\right) < \eta$, les racines de $g(D) . F(x)$ seront aussi limitées de la même manière, etc.

Je citerai encore une proposition qui comprend comme simples corollaires un grand nombre d'équations transcendantes, traitées jusqu'ici dans la littérature.

Soient

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

réelle, du genre 0 *ou* 1 *et du type* τ, $H(x)$ *réelle, du genre* 0 *ou* 1, *du type* 0 *et ayant h racines positives, et $K(x)$ réelle, du genre* 0, *du type* 0 *et ayant toutes les racines négatives, la fonction entière*

$$a_0 H(0) + a_1 \frac{H(1)}{K(0)} x + a_2 \frac{H(2)}{K(0)K(1)} x^2 + a_3 \frac{H(3)}{K(0)K(1)K(2)} x^3 + \cdots$$

sera tout au plus du type $\tau + h$.

Laguerre prétend avoir démontré une proposition[2] qui est un simple corrollaire de la proposition ci-dessus, à savoir le cas où $F(x)$ est rationnelle, $\tau = 0$, $h = 0$, en admettant même que $K(x)$ soit du premier genre. Toutefois cette dernière condition est inexacte. Comme Laguerre n'a pas achevé sa démonstration, on ne peut pas voir où se trouvait l'erreur.

---

[1] Cette proposition semble peu connue. Elle a été découverte de nouveau un nombre de fois par différents mathématiciens.

[2] Acta Mathematica, t. IV, 1884 et Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3:e série, t. IX, 1883; Oeuvres, I pp. 202 et 35.

Les théorèmes que je vais démontrer maintenant sont d'un caractère tout autre que celles dont il a été fait mention jusqu'ici.

Soit $F(z)$ une fonction entière de la variable complexe $z = x + iy$. Elle est supposée réelle, du genre o ou I et du type o. On a donc le produit fini ou absolument convergent

$$F(z) = e^{c_0 + c_1 z} z^{\mu} \prod_{(\alpha)} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) e^{\frac{z}{\alpha}},$$

où les constantes c ainsi que les racines α sont toutes réelles. Formons le carré de la valeur absolue de $F(z)$, j'obtiens évidemment

$$|Fz|^2 = e^{2c_0 + 2c_1 x} (x^2 + y^2)^{\mu} \prod \frac{(x-\alpha)^2 + y^2}{\alpha^2} e^{\frac{2x}{\alpha}} = (Fx)^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{\mu} \prod \left(1 + \frac{y^2}{(x-\alpha)^2}\right).$$

En développant le troisième membre de cette égalité en série entière de y^2 nous avons ainsi

$$|Fz|^2 = A_0 + A_2 y^2 + A_4 y^4 + \cdots,$$

où les coefficients sont des fonctions positives de la variable réelle x, si celle-ci est différente d'une racine α. On voit, par la série de TAYLOR et d'après la formule de LEIBNIZ pour la différentiation d'un produit, que l'on a

$$\underline{|2\nu} A_{2\nu} = (-1)^{\nu} D_{\varrho=0}^{2\nu} (F(x+\varrho) F(x-\varrho)) =$$

$$= \binom{2\nu}{\nu} (F^{(\nu)} x)^2 - 2 \binom{2\nu}{\nu - 1} F^{(\nu-1)}(x) F^{(\nu+1)}(x) + \cdots + (-1)^{\nu} 2 F(x) F^{(2\nu)}(x).$$

Pour que $F(z)$ soit du type o c'est donc une condition *nécessaire* que toutes les fonctions ci-dessus pour $\nu = 1, 2, 3, \cdots$ soient positives ou zéro[1] pour toutes les valeurs réelles de x. Inversement, il est évident que ces conditions sont aussi *suffisantes*, car si elles sont toutes satisfaites $|Fz|^2$ n'est jamais décroissante pour x constant et y^2 croissant, et pour $y = 0$ on a $|Fz|^2 = (Fx)^2$. Si $F(x) \neq 0$, on aura $|Fz|^2 > 0$, et pour $F(x) = 0$, $|Fz|^2$ ne pourra être égale à zéro pour aucune valeur de y différente de zéro. S'il en était ainsi, $|Fz|^2$ serait constamment zéro et cela est impossible à moins que $F(z)$ ne se réduise précisément à zéro.

Ces conditions nécessaires et suffisantes, trouvées d'une manière si simple, sont souvent d'une application assez difficile dans la pratique.

[1] Le cas $\nu = 1$ nous donne la condition nécessaire $(F'x)^2 - F(x) F''(x) > 0$, trouvée par LAGUERRE, toutefois, il faut ajouter au signe d'inégalité un signe d'égalité. Si l'égalité ne peut se produire, $F(x)$ n'aura pas de racines multiples réelles. Je ne peux pas entrer ici en plus de détails.

Si nous differentions $|Fz|^2$ par rapport à y, nous trouvons

$$\frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2 = 2A_2 y + 4A_4 y^3 + \cdots$$

On en déduit ce qui suit.

Si $F(z)$ est du genre 0 ou 1, réelle et du type 0, on doit avoir

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2 = 2\Re\left(\frac{1}{i}F(z)F'(\bar{z})\right) = \frac{1}{2}(|Fz + iF'z|^2 - |Fz - iF'z|^2) > 0,$$

pour $y > 0$; (pour $y < 0$ il suffit d'intervertir le signe d'inégalité à cause de la symétrie par rapport à l'axe réel). Cependant, cette condition nécessaire est aussi suffisante, même si l'on remplace $>$ par $\geqq$. En effet il résulte de l'inégalité (5) que $|Fz|^2$ ne peut pas décroître pour y positif et croissant, x étant supposé constant, et comme $|Fz|^2 = (Fx)^2$ pour $y = 0$, elle ne peut pas devenir zéro pour $y > 0$ sans l'être constamment.

Par conséquent, nous avons démontré le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction réelle $F(z)$, du genre 0 ou 1, soit du type 0 est que l'inégalité (5) ait lieu partout dans le demi-plan au dessus de l'axe réel, et ceci est même une condition suffisante quand $>$ est remplacé par $\geqq$.[1]

En d'autres termes: *si l'on peut trouver, dans le demi-plan supérieur, une valeur de z pour laquelle $\frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2$ est négative, $F(z)$ aura de racines imaginaires; si une telle valeur n'existe pas, toutes les racines seront réelles.*

Jusqu'à présent nous avons exclusivement fait usage d'une propriété du développement de $\frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2$, à savoir celle d'être non négatif pour les y positifs. Si l'on désire rendre la condition nécessaire aussi étroite que possible, on peut y parvenir en regardant un ou plusieurs termes du développement. Ainsi on trouve comme condition nécessaire:

$$\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2 \geqq 2((F'x)^2 - F(x)F''(x)) \geqq 0.$$

dans tout le plan, etc.

En me basant sur des considérations un peu plus générales que celles dont nous venons de faire emploi, je peux d'ailleurs démontrer le théorème plus étendu que voici:

[1] Evidemment ce n'est qu'en apparence que la condition suffisante est moins serrée que la condition nécessaire, c'est là un avantage pour les applications. Dans ce qui suit je rends encore plus grande la différence entre la condition nécessaire et la condition suffisante.

Si

$$\frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2 \text{ ou } |Fz + iF'z|^2 - |Fz - iF'z|^2$$

est positive partout dans le demi-plan supérieur, à l'exception d'une certaine partie finie de celui-ci, la fonction réelle $F(z)$ du genre o *ou* 1 *aura son type fini.*

On peut donner à ces propositions bien d'autres formes, que je ne puis aborder ici et au sujet desquelles je suis obligé de renvoyer à mes recherches détaillées. Je me bornerai à mentionner les suivantes.

En considérant le développement

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|Fz|^2 = 2A_2 + 4\cdot 3A_4 y^2 + \cdots,$$

on voit aussitôt *que pour que toutes les racines soient réelles, on doit avoir dans tout le plan*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2}|Fz|^2 &= 2|F'z|^2 - 2\Re\left(F(z)F''(\bar{z})\right) = \\ (6) \qquad &= 2|F'z|^2 - \frac{1}{2}|Fz + F''z|^2 + \frac{1}{2}|Fz - F''z|^2 \geqq \\ &\geqq 2A_2 = 2\left((F'x)^2 - F(x)F''(x)\right) \geqq 0. \end{aligned}$$

Si inversement, on a partout

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|Fz|^2 \geqq 0, \tag{7}$$

$F(z)$ sera du type o.

En effet, dans le dernier cas, $|Fz|^2$ sera une fonction convexe de la variable y et ne pourra avoir, par suite de la symétrie par rapport à l'axe réel, qu'un seul minimum et cela pour $y = 0$.

De même que plus haut, on a aussi la proposition plus étendue:

Si l'inégalité (7) a lieu en dehors d'une certaine partie finie du plan des z, $F(z)$ sera d'un type fini.

Il est assez intéressant d'appliquer ces propositions aux équations transcendantes traitées jusqu'à présent dans la littérature. On peut tirer des exemples de Fourier, Poisson, Cauchy, Hurwitz etc., ce qui donnera une idée de la facilité avec laquelle les critères que nous venons de développer sont applicables aux cas plus simples. Pour ne citer, en passant, qu'un exemple (emprunté à

Cauchy), nous considérons l'équation très connue, $\sin z - z\cos z = 0$. Si son premier membre est désigné par $F(z)$, on aura

$$|F'z|^2 - \frac{1}{4}|Fz + F''z|^2 + \frac{1}{4}|Fz - F''z|^2 = |z\sin z|^2 - |\sin z|^2 + |z\cos z|^2 =$$

$$= (x^2\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x) + (y^2\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y) + (x^2 + y^2)\operatorname{sh}^2 y,$$

où toutes les parenthèses sont $\geqq 0$. Donc toutes les racines sont réelles.

Pour des fonctions d'un genre plus élevé que le premier, je démontre des théorèmes du même caractère, mais un peu plus compliqués.

Soit $F(z)$ réelle et du genre $2p$ ou $2p+1$, on aura, en supposant pour plus de simplicité qu'il n'existe pas de racines zéro,

$$F(z) = e^{g(z)}\prod_{(\alpha)}\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)e^{\frac{z}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{2p+1}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{2p+1}},$$

où

$$g(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{2p+1}z^{2p+1}$$

a tous les coefficients réels et où le produit, qui est fini ou absolument convergent, est étendu à toutes les racines α.

Si $F(z)$ est du genre $2p$, on doit avoir $c_{2p+1} = -\frac{1}{2p+1}\sum\frac{1}{\alpha^{2p+1}}$. Comme on le sait, les c sont aisément déterminées par différentiation de $\log F(z)$.

La condition nécessaire pour que toutes les racines soient réelles est qu'on ait constamment dans le demi-plan $y > 0$

$$|z^{2p}Fz + iF'z|^2 - |z^{2p}Fz - iF'z|^2 > |Fz|^2(|z^{2p} + ig'z|^2 - |z^{2p} - ig'z|^2)$$

et la condition suffisante est de la même forme, toutefois, on peut y remplacer $>$ *par* $\geqq$.

Je ne peux donner ici la démonstration de cette proposition qui, pour $p = 0$, se réduit à une de celles que j'ai déjà indiquées.

Qu'il me soit permis, en terminant cette conférence, de faire usage d'une image intuitive, bien que peut-être un peu hasardée. Soit $F(z)$ une fonction analytique de $z = x + iy$, régulière à l'intérieur d'une certaine partie du plan des z. Je suppose celui-ci horizontal et j'élève en chacun de ses points une coordonnée verticale $\zeta = |Fz|^2$. Par là est définie une surface aux coordonnées orthogonales x, y, ζ, au sujet de laquelle j'ai démontré la proposition suivante.[1]

[1] Nyt Tidsskrift for Matematik, t. XXI, 1910. Om den absolute Værdi af en analytisk Funktion (résumé d'une conférence faite à la société mathématique danoise le 19 mars 1908).

Si l'angle dièdre entre le plan des (x, y) et le plan tangent à la surface au point (x, y, ζ) est désigné par φ, on aura

$$\mathrm{tg}^2 \varphi = 4 |F(z) F'(z)|^2.$$

Le plan tangent n'est horizontal qu'en les points dont les projections tombent en des zéros de $F(z)$ ou de $F'(z)$. Pour les premiers, le plan tangent coïncide avec le plan des z, pour ceux des derniers qui ne sont pas en même temps des zéros de $F(z)$, le plan est tangent en un point parabolique de la surface.

On pourrait appeler une telle surface un »paysage analytique». Si l'on s'imaginait qu'il pleuvait dans ce paysage, l'eau s'accumulerait en les points les plus bas et formerait de petits lacs autour des zéros de $F(z)$. Pour une fonction réelle du genre zéro ou un et du type zéro, le »paysage analytique» présenterait une vallée ayant de petits lacs le long de l'axe réel.