# SUR QUELQUES FORMES POSITIVES AVEC UNE APPLICATION À LA THÉORIE ERGODIQUE.

Par

ARNE BEURLING

à Upsal.

Les problèmes que nous allons considérer originent de l'observation que voici. Soit $X_1, X_2, \ldots X_n$ une suite finie de points dans un espace euclidien $R_m$ à un nombre fini $m$ de dimensions. Ces points déterminent $n^2$ triangles $\Delta_{\mu,\nu}$, $\mu, \nu = 1, 2, \ldots n$, où $\Delta_{\mu,\nu} = \Delta_{\nu,\mu}$ désigne le triangle ayant pour sommets l'origine et les points $X_\mu$ et $X_\nu$, et dont les côtés ont pour longueurs $|X_\mu|$, $|X_\nu|$ et $|X_\mu - X_\nu|$. A chacun de ces triangles on peut faire associer une quantité non négative, l'excès triangulaire de $\Delta_{\mu,\nu}$, définie ainsi:

$$|\Delta_{\mu,\nu}| = |X_\mu| + |X_\nu| - |X_\mu -$$

La matrice formée des éléments $|\Delta_{\mu,\nu}|$, $\mu, \nu = 1, 2,$ est évidemment symétrique et possède la propriété remarquable que la forme quadratique

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\mu \xi_\nu |\Delta_{\mu,\nu}|$$

est positive, et cela pour tout $n$ et pour tout choix des points $X_\mu$.

Dans cette Note nous démontrerons d'abord quelques théorèmes de ce genre et nous ferons ensuite une application à la théorie ergodique des espaces fonctionnels $L^p$, $1 \leqq p \leqq 2$.

## Sur quelques formes quadratiques.

Par le symbole $\{z\}$, $z$ étant un nombre complexe, nous entendrons

$$\{z\} = \begin{cases} z \text{ pour } |z| \leq 1 \\ \dfrac{1}{\bar{z}} \text{ pour } |z| \geq 1, \end{cases}$$

où $\bar{z}$ désigne le nombre conjugué de $z$. La fonction ainsi définie satisfait évidemment aux relations

$$|\{z\}| \leq 1$$

$$\left\{\frac{1}{\bar{z}}\right\} = \overline{\{z\}}.$$

**Théorème I.** *La forme hermitienne*

$$H_n = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\mu \bar{\xi}_\nu \left\{\frac{z_\mu}{z_\nu}\right\},$$

*où* $z_1, z_2, \ldots z_n$ *est une suite de nombres complexes* $\neq 0$, *est toujours positive, et de plus, définie positive si les nombres* $|z_\mu|$ *sont distincts.*

*Démonstration.* En posant

$$z_\mu = e^{u_\mu + i v_\mu}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots n,$$

$u_\mu$ et $v_\mu$ étant réels, on obtient

$$\left\{\frac{z_\mu}{z_\nu}\right\} = e^{-|u_\mu - u_\nu| + i v_\mu - i v_\nu},$$

d'où résulte, par une application de la formule

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha u} \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = e^{-|u|}$$

valable pour tout nombre réel $u$, que

$$\left\{\frac{z_\mu}{z_\nu}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha u_\mu + i v_\mu - i\alpha u_\nu - i v_\nu} \frac{d\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Introduisant cette expression dans la forme hermitienne considérée, on obtient

$$H_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\sum_{\mu=1}^{n} \xi_\mu e^{i\alpha u_\mu + i v_\mu}\right|^2 \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} \geq 0.$$

Pour que l'on ait $H_n = 0$, il faut évidemment que le polynome trigonométrique

$$f(\alpha) = \sum_{\mu=1}^{n} \xi_\mu e^{i\alpha u_\mu + i v_\mu}$$

s'annule identiquement, ce qui à son tour entraîne $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$ si les $u_\mu$ sont distincts entre eux. C. Q. F. D.

**Théorème II.** *Soit $f(t)$ une fonction mesurable sur l'axe réel et telle que les ensembles où $|f| = 0$ et $|f| = \infty$ soient de mesure nulle. Supposons de plus qu'il existe une suite de nombres $L_N \to \infty$, telle que l'intégrale*

$$\frac{1}{2 L_N} \int_{-L_N}^{L_N} \left\{ \frac{f(t+s)}{f(s)} \right\} ds, \qquad N \to \infty$$

*converge vers une fonction continue $\varphi(t)$. Dans ces conditions, $\varphi(t)$ est une fonction définie positive et possède en conséquence une représentation de la forme*

$$(1) \qquad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t}\, d\mu(\alpha),$$

*où $\mu(\alpha)$ est une fonction réelle non décroissante.*

*Démonstration.* Une fonction $\varphi(t)$, supposée continue et hermitienne, c'est-à-dire satisfaisant à la relation $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$, s'appelle définie positive si la forme hermitienne

$$(2) \qquad H_n = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\mu \bar{\xi}_\nu \varphi(t_\mu - t_\nu)$$

est $\geq 0$, et cela pour $n = 1, 2, \ldots$ et pour tout choix des nombres réels $t_\mu$. D'après un théorème important dû à M. Bochner, la classe de fonctions ainsi définie est identique à la classe de fonctions admettant une représentation de la forme (1). Pour démontrer le théorème énoncé, il suffit donc de prouver que la forme (2) est réelle et $\geq 0$. Posons à cet effet

$$h_N(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 L_N}, & |s| \leq L_N, \\ 0, & |s| > L_N, \end{cases}$$

$$\varphi_N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{f(s+t)}{f(s)} \right\} h_N(s)\, ds,$$

$$H_{n,N} = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\mu \bar{\xi}_\nu \varphi_N(t_\mu - t_\nu).$$

Nous avons par hypothèse

$$\varphi(t) = \lim_{N=\infty} \varphi_N(t),$$

d'où résulte, si $n$ ainsi que les $t_\mu$ et les $\xi_\mu$ sont fixes,

$$H_n = \lim_{N=\infty} H_{n,N}.$$

Il s'agit donc de prouver que $H_{n,N}$ pour $N \to \infty$ converge vers une valeur réelle et non négative. Dans ce but, considérons les nombres

$$\varphi_N(t_\mu - t_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{f(s + t_\mu - t_\nu)}{f(s)}\right\} h_N(s)\, ds.$$

En remplaçant la variable d'intégration $s$ par $s + t_\nu$, on obtient

$$\varphi_N(t_\mu - t_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{f(s + t_\mu)}{f(s + t_\nu)}\right\} h_N(s + t_\nu)\, ds.$$

Si l'on remplaçe dans cette formule $h_N(s + t_\nu)$ par $h_N(s)$, l'erreur commise est en valeur absolue inférieure ou égale à

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_N(s + t_\nu) - h_N(s)|\, ds \leq \frac{|t_\nu|}{L_N}.$$

Il s'ensuit qu'on peut écrire

$$\varphi_N(t_\mu - t_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{f(s + t_\mu)}{f(s + t_\nu)}\right\} h_N(s)\, ds + \varepsilon_{\mu,\nu}^{(N)},$$

où $|\varepsilon_{n,\nu}^{(N)}| \leq \frac{l}{L_N}$, $l$ désignant le plus grand des nombres $|t_\mu|$. On aura par suite

$$H_{n,N} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\mu \bar{\xi}_\nu \left\{\frac{f(s + t_\mu)}{f(s + t_\nu)}\right\} h_N(s)\, ds + \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\mu \bar{\xi}_\nu \varepsilon_{\mu,\nu}^{(N)}.$$

Conformément à la condition imposée à $f$, les fonctions $f(s + t_\mu)$, $\mu = 1, 2, \ldots n$, sont finies et $\neq 0$, sauf sur un certain ensemble de mesure nulle, d'où suit, d'après le Théorème I, que la fonction à intégrer est presque partout $\geq 0$. Puisque les $\varepsilon_{\mu,\nu}^{(N)}$ convergent uniformément vers $0$ pour $N \to \infty$, la limite $H_n$ de $H_{n,N}$ sera manifestement un nombre réel non négatif. C. Q. F. D.

**Théorème III.** *Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des points dans un espace euclidien $R_m$, $m \geq 1$, et $p$ un nombre satisfaisant aux inégalités $0 < p \leq 2$. Dans ces conditions, la forme quadratique*

$$H_n = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\mu \xi_\nu (|X_\mu|^p + |X_\nu|^p - |X_\mu - X_\nu|^p)$$

*est* $\geq 0$.

*Démonstration.* Pour $p = 2$ le théorème est évident, car on a en ce cas

$$|X_\mu|^2 + |X_\nu|^2 - |X_\mu - X_\nu|^2 = 2(X_\mu, X_\nu),$$

où $(X, Y)$ désigne le produit scalaire des vecteurs $X$ et $Y$. Désignant par $x_{\mu, i}$, $i = 1, 2, \ldots m$, les coordonnées rectangulaires de $X_\mu$, on aura en effet

$$H_n = 2 \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\mu \xi_\nu (X_\mu, X_\nu) = 2 \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{\mu=1}^{n} \xi_\mu x_{\mu, i} \right)^2 \geq 0.$$

Pour $0 < p < 2$, d'autre part, le théorème est une conséquence d'une représentation spectrale de la fonction $|X|^p = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2)^{\frac{p}{2}}$, à savoir,

$$(3) \qquad |X|^p = C_{p,m} \int\limits_{R_m} \frac{1 - \cos(X, Y)}{|Y|^{m+p}} dY,$$

que nous démontrerons donc d'abord, $C_{p,m}$ étant une certaine constante positive et finie. Posons

$$(4) \qquad \int_0^\infty \frac{1 - \cos r}{r^{1+p}} dr = A_p, \qquad 0 < p < 2.$$

Si $\varrho$ est un nombre réel, on a évidemment

$$(5) \qquad \int_0^\infty \frac{1 - \cos \varrho r}{r^{1+p}} dr = A_p |\varrho|^p,$$

ce qui établit la formule (3) dans le cas $m = 1$. Dans le cas général posons $|X| = \varrho$, $|Y| = r$, $X = \varrho \cdot X'$, $Y = r \cdot Y'$. Les vecteurs $X'$ et $Y'$ se trouvent donc sur la sphère unité $S_m$ de l'espace $R_m$. Si l'on désigne par $d\omega$ l'élément d'intégration sur $S_m$, on aura $dY = r^{m-1} dr\, d\omega$ et l'intégrale considérée prendra la forme

$$C_{p,m} \int\limits_{S_m} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \varrho r (X', Y')}{r^{1+p}} dr\, d\omega.$$

Après avoir intégré par rapport à $r$ selon la formule (5), on obtient

$$C_{p,m} A_p |\varrho|^p \int_{S_m} |(X', Y')|^p \, d\omega.$$

Mais, par raison de symétrie, la dernière intégrale est indépendante de la position du point $X'$ sur $S_m$ et représente par suite une certaine constante positive $B_{p,m}$. La formule (3) se trouve donc établie si l'on détermine $C_{p,m}$ par la relation $C_{p,m} \cdot A_p \cdot B_{p,m} = 1$.

Pour achever la démonstration, il suffit maintenant de remarquer la propriété suivante de la fonction $f(a) = 1 - \cos a$:

$$f(a) + f(b) - f(a-b) = (1 - \cos a)(1 - \cos b) + \sin a \sin b.$$

En notant que $(X_\mu - X_\nu, Y) = (X_\mu, Y) - (X_\nu, Y)$, on aura

$$1 - \cos(X_\mu, Y) + 1 - \cos(X_\nu, Y) - 1 + \cos(X_\mu - X_\nu, X) =$$
$$= (1 - \cos(X_\mu, Y))(1 - \cos(X_\nu, Y)) + \sin(X_\mu, Y)\sin(X_\nu, Y),$$

d'où résulte pour $0 < p < 2$,

$$(6) \quad |X_\mu|^p + |X_\nu|^p - |X_\mu - X_\nu|^p =$$
$$= C_{p,m} \int_{R_m} \frac{(1 - \cos(X_\mu, Y))(1 - \cos(X_\nu, Y)) + \sin(X_\mu, Y)\sin(X_\nu, Y)}{|Y|^{m+p}} \, dY.$$

Donc

$$H_n = C_{p,m} \int_{R_m} \left\{ \left[ \sum_{\mu=1}^{n} \xi_\mu (1 - \cos(X_\mu, Y)) \right]^2 + \left[ \sum_{\mu=1}^{n} \xi_\mu \sin(X_\mu, Y) \right]^2 \right\} \frac{dY}{|Y|^{m+p}} \geq 0$$

C. Q. F. D.

Dans le cas $m = 2$, on peut interpréter les $X_\mu$ comme des nombres complexes et les normes $|X_\mu|$ comme leurs modules, d'où découle ce corollaire du Théorème III: *La forme quadratique*

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\mu \xi_\nu (|z_\mu|^p + |z_\nu|^p - |z_\mu - z_\nu|^p)$$

*est positive si* $0 < p \leq 2$, $z_\mu$ *étant des nombres complexes quelconques et* $|z_\mu|$ *leurs modules.*

**Une application à la théorie ergodique des espaces $L^p$, $1 \leq p \leq 2$.**

Considérons pour $1 \leq p \leq 2$ l'espace fonctionnel $L^p$, formé des fonctions mesurables et à $p^{\text{ième}}$ puissance sommables sur un certain ensemble $E$; la norme étant définie par la relation

$$\|f\| = \Big[\int_E |f(Q)|^p \, d\,Q\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

Supposons que $U_t$, $-\infty < t < \infty$, soit un groupe continu et abélien de transformations linéaires et isométriques de l'espace $L^p$ sur lui-même, satisfaisant donc aux conditions:

1° $U_{t_2} U_{t_1} f = U_{t_1} U_{t_2} f = U_{t_1+t_2} f$; $U_0 f = f$,

2° $U_t(af + bg) = a\,U_t f + b\,U_t g$; $a$ et $b$ étant des constantes,

3° $\| U_t f\| = \|f\|$.

Supposons de plus que la transformation $U_t$ soit continue en ce sens que

4° $\lim\limits_{t=0} \| U_t f - f\| = 0$.

Dans ce qui suit nous poserons pour abréger $U_t f = f_t$.

Cela étant, considérons la distance $\varrho(t) = \|f_t - f\|$ de l'élément mobile $f_t$ à l'élément fixe $f$. Cette fonction $\varrho$ est paire, car on a, en vertu de l'isométrie,

$$\varrho(t) = \|f_t - f\| = \| U_{-t}(f_t - f)\| = \|f - f_{-t}\| = \varrho(-t).$$

Par une application de l'inégalité triangulaire on trouve de même

$$|\varrho(t + \varDelta t) - \varrho(t)| \leq \|f_{t+\varDelta t} - f_t\| = \|f_{\varDelta t} - f\| \to 0, \qquad \varDelta t \to 0,$$

ce qui met en évidence que $\varrho(t)$ est également une fonction continue, qui s'annule pour $t = 0$.

**Théorème IV.** *Dans les hypothèses faites sur $U_t$ et $p$, la distance $\varrho(t)$ admet une représentation spectrale de la forme*

$$\varrho(t) = \int_0^\infty (1 - \cos \alpha t)\, d\,\mu(\alpha), \tag{7}$$

*où $\mu(\alpha)$ est une fonction réelle non décroissante et*

$$\int_0^\infty d\,\mu(\alpha) = 2^{\frac{1}{p}} \|f\|. \tag{8}$$

*Démonstration.* Nous allons d'abord prouver que

$$\varrho^p(t) = \int_0^\infty (1 - \cos \alpha t)\, d\nu(\alpha), \tag{9}$$

où $\nu(\alpha)$ est non décroissant et

$$\int_0^\infty d\nu(\alpha) = 2 \cdot \|f\|^p. \tag{10}$$

La représentation (7) étant en effet une conséquence de (9). Au lieu de $\varrho^p(t)$ nous allons considérer la fonction

$$\varphi(t) = 2\,\|f\|^p - \varrho^p(t)$$

et montrer qu'elle est définie positive. Nous savons déjà que $\varphi(t)$ est réel, pair et continu, et il suffit donc, en vertu du théorème de M. Bochner, de montrer que la forme quadratique

$$H_n = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\mu \xi_\nu\, \varphi(t_\mu - t_\nu) \tag{11}$$

est $\geq 0$. Nous avons

$$\varphi(t_\mu - t_\nu) = 2\,\|f\|^p - \|f_{t_\mu - t_\nu} - f\|^p.$$

Or, la transformation $U_t$ étant isométrique et linéaire, on aura

$$\|f_{t_\mu - t_\nu} - f\|^p = \|\,U_{t_\nu}(f_{t_\mu - t_\nu} - f)\,\|^p = \|f_{t_\mu} - f_{t_\nu}\|^p$$

et de même

$$2\,\|f\|^p = \|f_{t_\mu}\|^p + \|f_{t_\nu}\|^p,$$

d'où résulte

$$\varphi(t_\mu - t_\nu) = \|f_{t_\mu}\|^p + \|f_{t_\nu}\|^p - \|f_{t_\mu} - f_{t_\nu}\|^p =$$
$$= \int_E \left(|f_{t_\mu}(Q)|^p + |f_{t_\nu}(Q)|^p - |f_{t_\mu}(Q) - f_{t_\nu}(Q)|^p\right) dQ.$$

Il s'ensuit que la forme quadratique (11) peut s'écrire

$$H_n = \int_E \left( \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\mu \xi_\nu \left(|f_{t_\mu}(Q)|^p + |f_{t_\nu}(Q)|^p - |f_{t_\mu}(Q) - f_{t_\nu}(Q)|^p\right) \right) dQ.$$

Sauf sur un certain ensemble de mesure nulle, où l'une ou l'autre des fonctions $f_{t_\mu}(Q)$ devient infinie, la forme sous le signe d'intégration prend une valeur bien déterminée. D'après le corollaire du Théorème III, la fonction sous le signe $\int$ est presque partout $\geq 0$, la forme $H_n$ est par suite $\geq 0$, et $\varphi(t)$, étant réel et pair, peut donc s'écrire

$$(12) \qquad \varphi(t) = \int_0^\infty \cos t\alpha \, d\nu(\alpha),$$

où $\nu(\alpha)$ est non décroissant. Pour $t = 0$ on obtient en particulier

$$(13) \qquad \varphi(0) = 2\|f\|^p = \int_0^\infty d\nu(\alpha),$$

d'où résulte

$$(14) \qquad \varphi(0) - \varphi(t) = \varrho^p(t) = \int_0^\infty (1 - \cos t\alpha)\, d\nu(\alpha).$$

Le passage de (14) à la représentation (7) de $\varrho(t)$ se fait par calculs élémentaires. Supposons pour simplifier l'écriture $2\|f\|^p = 1$, ce qui est évidemment permis. Nous aurons donc $\varphi(0) = 1$, $-1 \leq \varphi(t) \leq 1$, et $\varrho^p(t) = 1 - \varphi(t)$. Pour $p = 1$ le théorème est déjà établi, et il suffit en conséquence de considérer les cas $1 < p \leq 2$. Posons à cet effet $\theta = 1/p$ et remarquons que les coefficients binomiaux $\binom{\theta}{n}$ sont $> 0$ pour $n = 1, 3, 5, \ldots$, et $< 0$ pour $n = 2, 4, 6, \ldots$, si $0 < \theta < 1$. Il s'ensuit que

$$(1 - x)^\theta = 1 + \sum_{n=1}^\infty \binom{\theta}{n} (-x)^n = 1 - \sum_{n=1}^\infty \left|\binom{\theta}{n}\right| x^n,$$

formule qui nous montre en outre que la série converge absolument, et par conséquent aussi uniformément pour $-1 \leq x \leq 1$. Nous avons donc

$$\varrho(t) = 1 - \sum_{n=1}^\infty \left|\binom{\theta}{n}\right| \varphi^n(t).$$

Rappelons-nous maintenant ces deux propriétés des fonctions définies positives: le produit de deux fonctions, ainsi qu'une série, supposée uniformément convergente, de fonctions définies positives est encore définie positive. Chaque terme de la série

$$\psi(t) = \sum_{n=1}^\infty \left|\binom{\theta}{n}\right| \varphi^n(t)$$

est donc définie positive, et, par suite, aussi la somme. Étant réelle et paire la fonction $\psi(t)$ peut s'écrire

$$\psi(t) = \int_0^\infty \cos t\alpha \, d\mu(\alpha).$$

En notant que $\psi(0) = 1$, on obtient finalement

$$\varrho(t) = \psi(0) - \psi(t) = \int_0^\infty (1 - \cos t\alpha)\, d\mu(\alpha).$$

C. Q. F. D.

On doit observer concernant les formules (8) et (10) que les fonctions $\mu$ et $\nu$ peuvent avoir des sauts à l'origine, ce qui ne change pas la valeur des intégrales (7) et (9) respectivement. Si l'on exige que $\mu$ et $\nu$ soient continus pour $\alpha = 0$, on doit également remplacer dans (8) et (10) le signe d'égalité par les signes $\leqq$.

L'analyse spectrale de la fonction $\|f_t - g\|^p$, $f \neq g$, est au point de vue formel beaucoup plus compliquée que le cas que nous venons de traiter. Dans ce qui suit, nous nous bornerons de considérer le groupe de translations de l'axe réel. $U_t$ désignera en conséquence l'opération qui transforme la fonction $f(s)$ en $f(s+t)$.

**Théorème V.** *La fonction*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(s+t) - g(s)|^p \, ds, \tag{15}$$

*où $f(s)$ et $g(s)$ sont deux fonctions quelconques de l'espace $L^p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p \leq 2$, admet une représentation spectrale de la forme*

$$\|f\|^p + \|g\|^p - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} h(\alpha; f, g)\, d\alpha, \tag{16}$$

*où $h(\alpha; f, g) = h(\alpha)$ est sommable et*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\alpha)|\, d\alpha \leq 2\sqrt{\|f\|^p \|g\|^p}. \tag{17}$$

*Démonstration.* Pour $p = 2$ la proposition énoncée est bien connue et résulte de ce lemme:

*Si $f$ et $g$ sont à carré sommable sur l'axe réel, la fonction*

$$(18) \qquad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s+t)\, g(s)\, ds$$

*possède la représentation*

$$(19) \qquad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha t} h(\alpha)\, d\alpha,$$

*où $h$ est sommable et*

$$(20) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |h(\alpha)|\, d\alpha \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|^2\, ds \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|^2\, ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le cas $1 \leq p < 2$, le Théorème V est une conséquence de la formule (6) et du lemme cité. Posons $f(s) = f_1(s) + i f_2(s)$ et $g(s) = g_1(s) + i g_2(s)$, $f_1, f_2, g_1$ et $g_2$ étant réels, et désignons par $F_s$ et $G_s$ les vecteurs de l'espace euclidien $R_2$ dont les composantes sont $f_1(s)$ et $f_2(s)$, et $g_1(s)$ et $g_2(s)$ respectivement. Cela étant, la fonction que nous allons étudier est $\varphi(t) = \|f\|^p + \|g\|^p - \|f_t - g\|^p$. En notant que $\|f\|^p = \|f_t\|^p$, on aura en employant les notations introduites

$$(21) \qquad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (|F_{s+t}|^p + |G_s|^p - |F_{s+t} - G_s|^p)\, ds,$$

d'où vient par une application de (6) avec $m = 2$,

$$(22) \quad \varphi(t) =$$

$$= C_{p,2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{R_2} \frac{(1 - \cos(F_{s+t}, Y))(1 - \cos(G_s, Y)) + \sin(F_{s+t}, Y)\sin(G_s, Y)}{|Y|^{2+p}}\, dY\, ds.$$

Pour tout $Y$ fini les fonctions

$$1 - \cos(F_{s+t}, Y), \quad 1 - \cos(G_s, Y), \quad \sin(F_{s+t}, Y), \quad \sin(G_s, Y)$$

sont à carré sommable par rapport à $s$ sur l'axe réel. En effet, selon les iné galités élémentaires $(1 - \cos x)^2 \leq 4|x|^p$ et $\sin^2 x \leq 4|x|^p$, $0 < p \leq 2$, on aura

$$\left.\begin{matrix} (1 - \cos(F_{s+t}, Y))^2 \\ \sin^2(F_{s+t}, Y) \end{matrix}\right\} \leq 4|(F_{s+t}, Y)|^p \leq 4|F_{s+t}|^p |Y|^p,$$

$$\left.\begin{matrix} (1 - \cos(G_s, Y))^2 \\ \sin^2(G_s, Y) \end{matrix}\right\} \leq 4|(G_s, Y)|^p \leq 4|G_s|^p |Y|^p$$

Les fonctions

$$(23)\qquad \begin{cases} \varphi_1(t;\,Y) = C_{p,2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1-\cos(F_{s+t},\,Y))(1-\cos(G_s,\,Y))\,d s, \\ \varphi_2(t;\,Y) = C_{p,2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin(F_{s+t},\,Y)\sin(G_s,\,Y)\,d s \end{cases}$$

sont par suite de la forme (18) et peuvent donc s'écrire

$$(24)\qquad \begin{cases} \varphi_1(t;\,Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} h_1(\alpha;\,Y)\,d\alpha, \\ \varphi_2(t;\,Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} h_2(\alpha;\,Y)\,d\alpha, \end{cases}$$

où $h_1$ et $h_2$ sont sommables par rapport à $\alpha$ sur l'axe réel. Posons de plus

$$I_1(Y) = C_{p,2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1-\cos(F_s,\,Y))^2\,d s,$$

$$J_1(Y) = C_{p,2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1-\cos(G_s,\,Y))^2\,d s,$$

$$I_2(Y) = C_{p,2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin^2(F_s,\,Y)\,d s,$$

$$J_2(Y) = C_{p,2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin^2(G_s,\,Y)\,d s.$$

En vertu du lemme on a

$$(25)\qquad \begin{cases} |\varphi_1(t;\,Y)| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}|h_1(\alpha;\,Y)|\,d\alpha \le \sqrt{I_1(Y)\,J_1(Y)}, \\ |\varphi_2(t;\,Y)| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}|h_2(\alpha;\,Y)|\,d\alpha \le \sqrt{I_2(Y)\,J_2(Y)}. \end{cases}$$

Cela étant, supposons pour un moment que les intégrales ci-après soient finies et que l'on ait

$$(26)\qquad \int\limits_{R_2}\frac{\sqrt{I_1(Y)\,J_1(Y)}}{|Y|^{2+p}}\,d Y + \int\limits_{R_2}\frac{\sqrt{I_2(Y)\,J_2(Y)}}{|Y|^{2+p}}\,d Y \le 2\sqrt{\|f\|^p\,\|g\|^p}.$$

Dans cette hypothèse, l'intégrale (22) converge absolument, car on aura, en appliquant de nouveau le lemme et les inégalités ci-dessus,

$$C_{p,2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{R_2}\frac{(1-\cos(F_{s+t},\,Y))(1-\cos(G_s,\,Y))+|\sin(F_{s+t},\,Y)|\,|\sin(G_s,\,Y)|}{|\,Y\,|^{2+p}}\,d\,Y\,d s\leq$$

$$\leq 2\sqrt{\|f\|^p\,\|g\|^p}.$$

On peut donc changer l'ordre d'intégration dans (22), ce qui nous donne, en introduisant les expressions (24),

$$\varphi(t)=\int_{R_2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha t}(h_1(\alpha;\,Y)+h_2(\alpha;\,Y))\,d\,\alpha\,\frac{d\,Y}{|\,Y\,|^{2+p}}. \tag{27}$$

Or, cette intégrale étant absolument convergente d'après (25) et (26), on peut de nouveau intervertir l'ordre d'intégration, d'où suit

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha t}h(\alpha)\,d\,\alpha, \tag{28}$$

où nous avons posé

$$h(\alpha)=\int_{R_2}(h_1(\alpha;\,Y)+h_2(\alpha;\,Y))\frac{d\,Y}{|\,Y\,|^{2+p}}. \tag{29}$$

En vertu d'un théorème bien connu de Fubini, la fonction $h(\alpha)$ est définie presque partout, et l'on aura d'après (25) et (26)

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\,h(\alpha)\,|\,d\,\alpha\leq\int_{R_2}\int_{-\infty}^{\infty}(|\,h_1(\alpha;\,Y)\,|+|\,h_2(\alpha;\,Y)\,|)\,d\,\alpha\,\frac{d\,Y}{|\,Y\,|^{2+p}}\leq 2\sqrt{\|f\|^p\,\|g\|^p}.$$

Tout revient donc à démontrer l'inégalité (26). Introduisons dans ce but les constantes numériques

$$\int_0^{\infty}(1-\cos r)^2\frac{d\,r}{r^{1+p}}=D_p,\qquad 0<p<2,$$

$$\int_0^{\infty}\sin^2 r\,\frac{d\,r}{r^{1+p}}=E_p,\qquad 0<p<2,$$

et observons les relations suivantes

$$\int_{R_2}(1-\cos(X,\,Y))^2\frac{d\,Y}{|\,Y\,|^{2+p}}=D_p\,B_{p,2}\,|\,X\,|^p, \tag{30}$$

$$(31) \qquad \int_{R_2} \sin^2 (X, Y) \frac{d\,Y}{|\,Y\,|^{2+p}} = E_p\, B_{p,2}\, |\,X\,|^p,$$

où $X$ est un vecteur quelconque de $R_2$; $B_{p,2}$ étant la constante déjà introduite dans la démonstration de la formule (3).

Cela posé, nous obtenons par une application de l'inégalité de Schwarz, en employant ensuite la relation (30),

$$\int_{R_2} \sqrt{I_1(Y)\, J_1(Y)} \frac{d\,Y}{|\,Y\,|^{2+p}} \leq \left\{ \int_{R_2} I_1(Y) \frac{d\,Y}{|\,Y\,|^{2+p}} \int_{R_2} J_1(Y) \frac{d\,Y}{|\,Y\,|^{2+p}} \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ C_{p,2} \int_{R_2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos (F_s,\, Y))^2\, d\,s \frac{d\,Y}{|\,Y\,|^{2+p}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ C_{p,2} \int_{R_2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos (G_s,\, Y))^2\, d\,s \frac{d\,Y}{|\,Y\,|^{2+p}} \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C_{p,2}\, B_{p,2}\, D_p \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\,F_s\,|^p\, d\,s \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\,G_s\,|^p\, d\,s \right\}^{\frac{1}{2}} = C_{p,2}\, B_{p,2}\, D_p \sqrt{\|f\|^p\, \|g\|^p}.$$

En opérant exactement de la même manière, on trouve que

$$\int_{R_2} \sqrt{I_2(Y)\, J_2(Y)} \frac{d\,Y}{|\,Y\,|^{2+p}} \leq C_{p,2}\, B_{p,2}\, E_p \sqrt{\|f\|^p\, \|g\|^p}.$$

Il ne reste maintenant qu'à prouver que les constantes numériques satisfont à la relation

$$C_{p,2}\, B_{p,2} (D_p + E_p) = 2.$$

D'après la définition de $C_{p,2}$, on a

$$C_{p,2}\, B_{p,2}\, A_p = 1,$$

où $A_p$ est déterminé par (4). Donc

$$C_{p,2}\, B_{p,2} (D_p + E_p) = \frac{D_p + E_p}{A_p} =$$

$$= \frac{1}{A_p} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos r)^2 + \sin^2 r}{r^{1+p}}\, d\,r = \frac{2}{A_p} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos r}{r^{1+p}}\, d\,r = 2.$$

C. Q. F. D.

En prenant $g = f$ dans le théorème précédent, on aura

$$(32) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |f(s+t) - f(s)|^p\, d\,s = 2\, \|f\|^p - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t}\, h(\alpha)\, d\,\alpha, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\,h(\alpha)\,|\, d\,\alpha \leq 2\, \|f\|^p.$$

En comparant cette inégalité et la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, d\alpha = 2\, \|f\|^p,$$

obtenue en faisant $t = 0$ dans (32), on reconnaît que $h(\alpha)$ doit être presque partout réel et $\geq 0$. On retrouve ainsi les propriétés considérées dans le Théorème IV, mais, pour le groupe des translations de l'axe réel, les fonctions spectrales $\mu(\alpha)$ et $\nu(\alpha)$ deviendront absolument continues.

En posant

$$\| h(f, g) \| = \int_{-\infty}^{\infty} | h(\alpha; f, g) |\, d\alpha,$$

nous pouvons réunir les propriétés connues de la fonction $h(\alpha; f, g)$ en les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
&h(\alpha; f, g) = \overline{h}(-\alpha; f, g)\\
&h(\alpha; f, g) = \overline{h}(\alpha; g, f)\\
&h(\alpha; f, f) \geq 0\\
&\| h(f, f) \| = 2\, \|f\|^p\\
&\| h(f, g) \| \leq \sqrt{\| h(f, f) \|\, \| h(g, g) \|}.
\end{aligned}$$

Faisons également une application à la théorie des séries de Fourier. Soit $L^p$, $1 \leq p \leq 2$, l'ensemble des fonctions périodiques de période $2\pi$ et à $p^{\text{ième}}$ puissance sommables sur l'intervalle $(0, 2\pi)$, et soit

$$\| f \| = \left\{ \int_0^{2\pi} | f(s) |^p\, ds \right\}^{\frac{1}{p}}$$

la norme de $f$. Le groupe de translations $U_t f(s) \equiv f(s + t)$ satisfait évidemment aux conditions posées, d'où résulte, conformément au Théorème IV:

$$\int_0^{2\pi} | f(s + t) - f(s) |^p\, ds = \sum_1^{\infty} A_n (1 - \cos n t), \qquad A_n \geq 0.$$

Par le procédé, employé déjà deux fois, on trouve de même

$$\int_0^{2\pi} | f(s + t) - g(s) |^p\, ds = \| f \|^p + \| g \|^p - \sum_{-\infty}^{\infty} A_n (f, g)\, e^{int},$$

où

$$\sum_{-\infty}^{\infty} | A_n (f, g) | \leq 2 \sqrt{\| f \|^p\, \| g \|^p}.$$

Supposons enfin que $f(s)$ soit une fonction presque-périodique définie sur l'axe réel. On sait alors que la moyenne

$$\varrho(t) = \lim_{T=\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(s+t) - f(s)|\, ds$$

existe, et qu'elle est également presque-périodique. D'après la démonstration du Théorème IV, la fonction $2\|f\| - \varrho(t)$, où nous avons posé

$$\|f\| = \lim_{T=\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(s)|\, ds,$$

est définie positive, d'où résulte, $\varrho(t)$ étant pair et égal à $0$ pour $t = 0$,

$$\varrho(t) = \int_0^\infty (1 - \cos \alpha t)\, d\mu(\alpha), \qquad \int_0^\infty d\mu(\alpha) = 2\|f\|,$$

où $\mu$ est non décroissant. Mais, pour que l'intégrale soit presque-périodique, il faut que $\mu$ soit une fonction de sauts, d'où suit la représentation

$$\varrho(t) = \sum_1^\infty A_\nu (1 - \cos \alpha_\nu t), \qquad A_\nu \geq 0$$

$$\sum_1^\infty A_\nu \leq 2\|f\|.$$

Si tous les $A_\nu$ s'annulent, $\varrho(t)$ est $\equiv 0$, et par suite $f(s)$ une constante. Sur ce fait on peut fonder une démonstration du théorème d'unicité de la théorie des fonctions presque-périodiques, mais la méthode directe, basée sur la fonction

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s+t) \overline{f(s)}\, ds,$$

est évidemment à préférer.