SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

PAR

IVAR FREDHOLM

à STOCKHOLM.

Dans quelques travaux[1] ABEL s'est occupé avec le problème de déterminer une fonction $\varphi(x)$ de manière qu'elle satisfasse à l'équation fonctionnelle

$$\int f(x, y)\varphi(y)dy = \psi(x) \tag{a}$$

$f(x, y)$ et $\psi(x)$ étant des fonctions données. ABEL a résolu quelques cas particuliers de cette équation fonctionnelle dont il paraît avoir reconnu le premier l'importance. C'est pour cela que je propose d'appeler l'équation fonctionnelle (a) une *équation fonctionnelle abélienne.*

Dans cette note je ne m'occupe pas en premier lieu de l'équation abélienne mais de l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y)dy = \psi(x), \tag{b}$$

qui est étroitement liée à l'équation abélienne.

En effet, si on introduit au lieu de $f(x, y)$ et $\psi(x)$, $\frac{1}{\lambda} f(x, y)$ et $\frac{1}{\lambda}\psi(x)$, l'équation (b) s'écrit

$$\lambda\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y)dy = \psi(x), \tag{c}$$

équation qui se transforme en l'équation (a) en posant $\lambda = 0$. Ainsi la solution de l'équation (a) peut être considérée comme implicitement contenue dans la solution de l'équation (b).

[1] Magazin for Naturvidenskaberne, Kristiania 1823 et Oeuvres complêtes.

Quant à l'équation (b) elle me paraît mériter l'attention particulière des géomètres, car la plupart des problèmes de la Physique mathématique qui conduisent à des équations différentielles linéaires se traduisent par des équations fonctionnelles de la forme (b) ou de la forme

$$\varphi(x_1 \ldots x_n) + \int \ldots \int f(x_1 \ldots x_n, \xi_1 \ldots \xi_n) \varphi(\xi_1 \ldots \xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n = \psi(x_1 \ldots x_n).$$

Pour le voir on n'a qu'à rappeler le problème de DIRICHLET dans le cas où l'on cherche à représenter le potentiel inconnu par le potentiel de double couche, des problèmes analogues de la théorie du magnétisme et de la théorie de l'élasticité.

Le premier essai de résoudre une équation (b) a été fait par NEUMANN. En effet, la méthode célèbre de NEUMANN pour la résolution du problème de DIRICHLET consiste en le développement de $\varphi(x)$ suivant les puissances croissantes du paramètre $\frac{1}{\lambda}$. Mais le développement de NEUMANN, tout en convergeant dans le cas du problème de DIRICHLET, ne peut pas converger dans le cas général.

Dans un travail important [1] la méthode de NEUMANN a été appliquée avec succès par M. VOLTERRA à l'équation fonctionnelle

$$\text{(c)} \qquad \varphi(x) + \int_0^x f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x).$$

Dans le même travail M. VOLTERRA a aussi mis en évidence le rapport intime entre l'équation (c) et l'équation abélienne

$$\int_0^x f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x).$$

L'équation que je me propose à étudier dans le présent travail comprend comme cas particulier l'équation de M. VOLTERRA, car en supposant, dans l'équation (b), que $f(x, y)$ soit nul pour $y > x$, on obtient immédiatement l'équation (c).

Dans ce qui suit la fonction $f(x, y)$ sera soumise à quelques restrictions. Je suppose que $f(x, y)$ soit telle que, α étant inférieur à l'unité, $(x - y)^\alpha f(x, y)$ soit une fonction finie et intégrable. Ainsi je ne vais

[1] Annali di Matematica, 1896.

pas traiter l'équation (b) dans toute sa généralité. Mais les restrictions que j'ai imposées à la fonction sont justifiées par les applications de l'équation (b) à la Physique mathématique auxquelles je me réserve de revenir dans un autre travail.

---

§ 1. *Sur la formation et les propriétés du déterminant de l'équaton fonctionnelle fondamentale.*

1. Supposons que $f(x, y)$ soit une fonction finie et intégrable soit par rapport à une seule ou par rapport aux deux variables réelles x et y qui, pour fixer les idées, seront supposées positives et moindres que l'unité.

Dans ce cas il existe une quantité D_f qui joue par rapport à l'équation fonctionnelle (b) le même rôle que joue le déterminant par rapport à un système d'équation linéaires.

Pour définir D_f j'introduis la notation abrégée

$$(1)\qquad f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) & \dots & f(x_1, y_n) \\ f(x_2, y_1) & f(x_2, y_2) & \dots & f(x_2, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_n, y_1) & f(x_n, y_2) & \dots & f(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

et je pose

$$(2)\qquad D_f = 1 + \int_0^1 f(x, x)dx + \frac{1}{\underline{|2}} \int_0^1 \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_1, x_2 \end{pmatrix} dx_1 dx_2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|n}} \int_0^1 \dots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

2. Pour démontrer la légitimité de cette expression nous n'avons que rappeler un théorème de M. HADAMARD.[1]

Le dit théorème nous apprend que la valeur absolue d'un déterminant donné est au plus égale à la racine carrée du terme principal dans le dé-

---

[1] Bulletin des sciences mathématiques, 1893, p. 242.

terminant obtenu en multipliant le déterminant donné avec son déterminant imaginaire conjugué.

Par conséquent, si F est la limite supérieure de $f(x, y)$ on a

$$\left| f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{pmatrix} \right| \leqq \sqrt{n^n} F^n.$$

Ainsi la série D_f converge comme la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{\underline{|n}} F^n.$$

3. Il n'est pas sans intérêt de noter que la convergence s'améliore si on suppose chez $f(x, y)$ une certaine espèce de continuité.

En effet, supposons qu'il existe une limite supérieure A des valeurs du quotient

$$\frac{f(x, y) - f(x, z)}{(y - z)^a}.$$

Alors on peut évidemment écrire

$$\left| f\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} \right| \leqq \sqrt{n^n} A^n (x_1 - x_2)^a (x_2 - x_3)^a \ldots (x_{n-1} - x_n)^a.$$

Or, le premier membre étant une fonction symétrique des variables $x_1 \ldots x_n$ il suffit évidemment pour en trouver le maximum de considérer celles qui remplissent les conditions

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n.$$

Dans ce cas la valeur maxima du produit

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \ldots (x_{n-1} - x_n)$$

est égale à

$$\frac{1}{n^n}.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{\underline{|n}} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_n < \frac{(n^n)^{\frac{1}{2} - a}}{\underline{|n}} A^n.$$

4. De la même manière que nous avons démontré la légitimité de l'expression de D_f on démontre celle des expressions suivantes que j'appelle les mineurs de D_f.

Je pose

(3)
$$D_f\begin{pmatrix}\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\end{pmatrix}$$
$$= f\begin{pmatrix}\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\end{pmatrix} + \int_0^1 f\begin{pmatrix}\xi_1 \ldots \xi_n, x\\ \eta_1 \ldots \eta_n, x\end{pmatrix} dx$$
$$+ \frac{1}{\underline{|2}} \int_0^1 \int_0^1 f\begin{pmatrix}\xi_1 \ldots \xi_n, x_1, x_2\\ \eta_1 \ldots \eta_n, x_1, x_2\end{pmatrix} dx_1 dx_2 + \ldots$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\begin{pmatrix}\xi_1 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_1 \ldots \eta_n, x_1 \ldots x_\nu\end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_\nu.$$

5. Les mineurs satisfont à des relations importantes que nous allons déduire maintenant.

Développant le déterminant

$$f\begin{pmatrix}\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, x_1 \ldots x_\nu\end{pmatrix}$$

suivant les éléments de la première ligne on trouve

$$f\begin{pmatrix}\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, x_1 \ldots x_\nu\end{pmatrix}$$
$$= f(\xi_1, \eta_1) f\begin{pmatrix}\xi_2 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_2 \ldots \eta_n, x_1 \ldots x_\nu\end{pmatrix} - f(\xi_1, \eta_2) f\begin{pmatrix}\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_n, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_1, \eta_3 \ldots \eta_n, x_1 \ldots x_\nu\end{pmatrix} + \ldots$$
$$- (-1)^n f(\xi_1, \eta_n) f\begin{pmatrix}\xi_2 \ldots \xi_n \quad, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_1 \ldots \eta_{n-1}, x_1 \ldots x_\nu\end{pmatrix}$$
$$+ (-1)^n f(\xi_1, x_1) f\begin{pmatrix}\xi_2 \ldots \xi_n \quad, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_1 \ldots \eta_{n-1}, \eta_n \ldots x_\nu\end{pmatrix} - \ldots$$
$$- (-1)^{n+\nu} f(\xi_1, x_\nu) f\begin{pmatrix}\xi_2 \ldots \xi_n \quad, x_1 \ldots x_\nu\\ \eta_1 \ldots \eta_{n-1}, \eta_n \ldots x_{\nu-1}\end{pmatrix}.$$

Multiplions les deux membres de cette identité par $dx_1 \ldots dx_\nu$ et intégrons entre les limites o et 1, nous aurons la formule

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n\,, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_1 \ldots \eta_n\,, x_1 \ldots x_\nu \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_\nu$$

$$= f(\xi\,, \eta_1) \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_n\,, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_2 \ldots \eta_n\,, x_1 \ldots x_\nu \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_\nu$$

$$- f(\xi_1\,, \eta_2) \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\begin{pmatrix} \xi_2\,, \xi_3 \ldots \xi_n\,, x_1 \ldots x_\nu \\ \eta_1\,, \eta_3 \ldots \eta_n\,, x_1 \ldots x_\nu \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_\nu + \ldots$$

$$- \nu \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\xi_1\,, \tau) f\begin{pmatrix} \tau\,, \xi_2 \ldots \xi_n\,, x_1 \ldots x_{\nu-1} \\ \eta_1\,, \eta_2 \ldots \eta_n\,, x_1 \ldots x_{\nu-1} \end{pmatrix} d\tau dx_1 \ldots dx_{\nu-1}.$$

Multipliant ensuite par $\frac{1}{\underline{|\nu}}$ et faisant la somme depuis $\nu = 0$ jusqu'à $\nu = \infty$ on arrive à la formule très-importante

$$(4) \qquad D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix} + \int_0^1 f(\xi_1\,, \tau) D_f\begin{pmatrix} \tau\,, \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1\,, \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix} d\tau$$

$$= f(\xi_1\,, \eta_1) D_f\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix} - f(\xi_1\,, \eta_2) D_f\begin{pmatrix} \xi_2\,, \xi_3 \ldots \xi_n \\ \eta_1\,, \eta_3 \ldots \eta_n \end{pmatrix} + \ldots .$$

En commençant par développer le déterminant suivant les éléments de la première colonne on trouve de la même manière la formule

$$(5) \qquad D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix} + \int_0^1 f(\tau\,, \eta_1) D_f\begin{pmatrix} \xi_1\,, \xi_2 \ldots \xi_n \\ \tau\,, \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix} d\tau$$

$$= f(\xi_1\,, \eta_1) D_f\begin{pmatrix} \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix} - f(\xi_2\,, \eta_1) D_f\begin{pmatrix} \xi_1\,, \xi_3 \ldots \xi_n \\ \eta_2\,, \eta_3 \ldots \eta_n \end{pmatrix} + \ldots \text{ etc.}$$

Dans le cas $n = 1$ ces deux formules deviennent

$$(4_1) \qquad D_f\binom{\xi}{\eta} + \int_0^1 f(\xi, \tau) D_f\binom{\tau}{\eta} d\tau = f(\xi, \eta) D_f,$$

$$(5_1) \qquad D_f\binom{\xi}{\eta} + \int_0^1 f(\tau, \eta) D_f\binom{\xi}{\tau} d\tau = f(\xi, \eta) D_f.$$

6. Introduisant dans D_f au lieu de $f(x, y)$, $\lambda f(x, y)$ nous trouvons que $D_{\lambda f}$ peut se développer suivant les puissances croissantes de λ dans une série qui, à cause du lemme de M. HADAMARD, converge pour toute valeur de λ. Ainsi $D_{\lambda f}$ est une fonction entière de λ.

En se rappelant les définitions de D_f et de ses mineurs on trouve immédiatement les relations

$$(6) \qquad \lambda^n \cdot \frac{d^n D_{\lambda f}}{d\lambda^n} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

qui subsistent pour $n = 1, 2, 3$, etc.

Ces relations nous permettent de parvenir à un résultat important. En effet, $D_{\lambda f}$ étant une fonction entière de λ chaque racine de l'équation

$$D_{\lambda f} = 0$$

a nécessairement une multiplicité finie.

Par conséquent, on ne peut pas trouver de valeur de λ pour laquelle $D_{\lambda f}$ et toutes ses dérivées soient nulles.

En particulier si, pour $\lambda = 1$, $D_{\lambda f} = D_f = 0$, on peut toujours trouver un premier mineur de D_f qui n'est pas identiquement nul.

§ 2. *Sur une classe de transformations fonctionnelles et leur inversion.*

7. Considérons maintenant une équation fonctionnelle

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, s)\varphi(s)ds = \psi(x), \tag{7}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $\psi(x)$ une fonction finie et intégrable.

En considérant l'équation (7) comme transformant la fonction $\varphi(x)$ en une nouvelle fonction $\psi(x)$ j'écris cette même équation

$$S_f\varphi(x) = \psi(x), \tag{7}$$

et je dis que la transformation S_f appartient à la fonction $f(x, y)$.

Les transformations (7) *forment une groupe.* En effet, considérons une autre transformation S_g appartenant à la fonction $g(x, y)$ qui remplit les mêmes conditions d'intégrabilité etc. que $f(x, y)$.

Alors on trouve facilement qu'on peut poser

$$S_g\psi(x) = S_g S_f\varphi(x) = S_F\varphi(x)$$

où

$$F(x, y) = g(x, y) + f(x, y) + \int_0^1 g(x, t)f(t, y)dt.$$

Quant à l'inversion de l'équation (7) deux cas sont possibles: D_f est différent de zéro ou $D_f = 0$.

8. Supposons d'abord que le déterminant D_f soit différent de zéro et posons

$$g(x, y) = -\frac{D_f\binom{x}{y}}{D_f}.$$

Alors on trouve à cause de l'équation (5_1) que F est identiquement nulle. Par conséquent, l'équation identique

$$S_g S_f\psi(x) = \psi(x)$$

ayant lieu, S_g est la transformation inverse de S_f. Ainsi, s'il existe une solution de l'équation (7) elle est unique et donnée par l'équation

$$\varphi(x) = S_g \psi(x).$$

D'autre côté, introduisons dans l'équation (7) au lieu de $\varphi(x)$ $S_g\psi(x)$ nous obtenons

$$S_f \varphi(x) = S_f S_g \psi(x) = S_F \psi(x)$$

où F, à cause de l'équation (4_1) est encore égale à zéro.

Par conséquent, nous pouvons énoncer le théorème:

Si le déterminant D_f d'une équation fonctionnelle de la forme

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, s)\varphi(s)ds = \psi(x),$$

où $f(x, s)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions finies et intégrables, est différent de zéro, il existe une et une seule fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à cette équation.

Cette fonction est donnée par l'équation:

$$\varphi(x) = \psi(x) - \int_0^1 \frac{D_f\binom{x}{y}}{D_f} \psi(y)dy.$$

9. Considérons maintenant le cas où D_f est nul.

Nous avons vu, dans ce cas, qu'il existe un premier mineur de D_f qui n'est pas identiquement nul.

Soit

$$D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_n \\ \eta_1 \dots \eta_n \end{pmatrix}$$

ce mineur. Parce que les mineurs d'ordre inférieur sont nuls, la formule (4) s'écrit

$$D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_n \\ \eta_1 \dots \eta_n \end{pmatrix} + \int_0^1 f(\xi_1, \tau) D_f\begin{pmatrix} \tau, \xi_1 \dots \xi_n \\ \eta_1, \eta_2 \dots \eta_n \end{pmatrix} d\tau = 0.$$

C'est à dire

$$\varphi(x) = D_f\begin{pmatrix} x, & \xi_2 \dots \xi_n \\ \eta_1, & \eta_2 \dots \eta_n \end{pmatrix}$$

est une solution de l'équation homogène

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y)dy = 0. \tag{7'}$$

Pour en trouver toutes les solutions, désignons par S_f la transformation appartenant à f et soit φ une solution de l'équation

$$S_f\varphi(x) = 0.$$

Apellons S_g la transformation *pseudo-inverse* de S_f, si

$$g(x, y) = -\frac{D_f\begin{pmatrix} x, & \xi_1 \dots \xi_n \\ y, & \eta_1 \dots \eta_n \end{pmatrix}}{D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_n \\ \eta_1 \dots \eta_n \end{pmatrix}},$$

les paramètres ξ, η étant choisis de manière que le dénominateur soit différent de zéro, ce qui, par hypothèse, est toujours possible.

Alors

$$S_g S_f \varphi(x) = S_F \varphi(x) = 0,$$

où

$$F(x, y) = f(x, y) + g(x, y) + \int_0^1 g(x, \tau) f(\tau, y) d\tau.$$

Or à cause de l'équation (5) on a

$$F(x, y) \tag{9}$$

$$= \frac{1}{D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_n \\ \eta_1 \dots \eta_n \end{pmatrix}} \Bigg[f(\xi_1, y) D_f\begin{pmatrix} x, & \xi_2 \dots \xi_n \\ \eta_1, & \eta_2 \dots \eta_n \end{pmatrix} - f(\xi_2, y) D_f\begin{pmatrix} \xi_1, & x, & \xi_3 \dots \xi_n \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \dots \eta_n \end{pmatrix} - \dots - (-1)^n f(\xi_n, y) D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \dots x \\ \eta_1 \dots \eta_n \end{pmatrix} \Bigg]$$

ou bien, en employant une notation abrégée

$$F(x, y) = -\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu, y) \Phi_\nu(x). \tag{10}$$

Or, $\varphi(x)$ satisfait à l'équation

$$S_F\varphi(x) = 0,$$

par conséquent on a

$$(11) \qquad \varphi(x) = -\int_0^1 F(x, y)\varphi(y)dy = \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu(x)\int_0^1 f(\xi_\nu, y)\varphi(y)dy$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \Phi_\nu(x).$$

On vérifie immédiatement que cette expression satisfait à l'équation

$$S_f\varphi(x) = 0$$

quelles que soient les coefficients A_ν.

Les n fonctions $\Phi_1 \dots \Phi_n$ sont linéairement indépendantes, car la formule (4) nous apprend que

$$\int_0^1 f(\xi_\lambda, x)\Phi_\mu(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad \lambda = \mu. \end{cases}$$

Cela posé, l'hypothèse qu'il existe une relation linéaire entre les fonctions Φ_ν soit

$$a_1\Phi_1 + \dots + a_n\Phi_n = 0,$$

conduit à la contradiction

$$\int_0^1 \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f(\xi_\nu, x) \,.\, \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \Phi_\nu(x)dx = \Sigma a_\nu^2 = 0.$$

Ainsi, non seulement les fonctions Φ_ν mais encore les fonctions $f(\xi_\nu, x)$ sont linéairement indépendantes.

Nous pouvons résumer les résultats obtenus en énonçant le théorème:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution différente de zéro de l'équation

$$S_f\varphi(x) = 0$$

c'est que $D_f = 0$. Si n est l'ordre du premier mineur de D_f qui soit différent de zéro, l'équation donnée possède n solutions linéairement indépendantes.

Cherchons maintenant les conditions de l'existence d'une solution de l'équation

$$S_f \varphi(x) = \psi(x)$$

dans l'hypothèse que $D_f = 0$ et les mineurs d'ordre inférieur à n soient nuls.

D'abord il faut démontrer une formule. Parce que la fonction

$$\alpha(x) = D_f\begin{pmatrix} x\,, & a_2 \ldots a_n \\ b_1\,, & b_2 \ldots b_n \end{pmatrix}$$

satisfait à l'équation

$$S_f \alpha(x) = 0,$$

$\alpha(x)$ est une fonction linéaire des fonctions $\Phi_\nu(x)$. En se rappelant que $\alpha(x)$ satisfait aussi à l'équation

$$S_F \alpha(x) = 0$$

où bien à l'équation

$$\alpha(x) = -\int_0^1 F(x, y)\alpha(y)dy$$

on obtient immédiatement pour $\alpha(x)$ l'expression

$$\alpha(x) = -\sum_{\nu=1}^{n} \alpha(\xi_\nu)\, \Phi_\nu(x). \tag{12}$$

Procédant d'une manière analogue avec la fonction

$$\beta(x) = D_f\begin{pmatrix} a_1\,, & a_2 \ldots a_n \\ x\,, & b_2 \ldots b_n \end{pmatrix}$$

on parvient à l'expression

$$\beta(x) = -\sum_{\nu=1}^{n} \beta(\eta_\nu)\, \Psi_\nu(x), \tag{13}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\Psi_1(x) = -\frac{D_f\begin{pmatrix} \xi_1\,, & \xi_2 \ldots \xi_n \\ x\,, & \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix}}{D_f\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix}}$$

et ainsi de suite. On voit que ces n fonctions Ψ sont linéairement indépendantes.

Revenons maintenant à l'équation proposée et intégrons-la après l'avoir multipliée par

$$D_f\begin{pmatrix} a_1, & a_2 \ldots a_n \\ x, & b_2 \ldots b_n \end{pmatrix} dx$$

nous trouvons

$$\int_0^1 \varphi(x) D_f\begin{pmatrix} a_1, & a_2 \ldots a_n \\ x, & b_2 \ldots b_n \end{pmatrix} dx + \int_0^1 \int_0^1 \varphi(y) f(x, y) D_f\begin{pmatrix} a_1, & a_2 \ldots a_n \\ x, & b_2 \ldots b_n \end{pmatrix} dx\, dy$$
$$= \int_0^1 \psi(x) D_f\begin{pmatrix} a_1, & a_2 \ldots a_n \\ x, & b_2 \ldots b_n \end{pmatrix} dx.$$

Or, à cause de l'équation (4) on trouve que le premier membre est nul quelle que soit la fonction $\varphi(x)$.

Par conséquent $\psi(x)$ doit satisfaire à l'équation

$$(15) \qquad \int_0^1 \psi(x) D_f\begin{pmatrix} a_1, & a_2 \ldots a_n \\ x, & b_1 \ldots b_n \end{pmatrix} dx = 0$$

quels que soient les paramètres a et b. Le nombre de conditions paraît être infini, mais à cause de l'équation (13) le nombre se réduit à n à savoir les n équations

$$(15') \qquad \int_0^1 \psi(x) \Psi_\nu(x) dx = 0. \qquad (\nu = 1 \ldots n)$$

Supposons ces conditions vérifiées et cherchons s'il existe, dans ce cas, une solution de l'équation (7).

Appliquons pour ce but la transformation S_g aux deux membres de l'équation (7) nous aurons

$$S_g S_f \varphi(x) = S_F \varphi(x) = S_g \psi(x).$$

Or,

$$S_F \varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \Phi_\nu(x).$$

Ainsi

$$\varphi(x) = S_g\psi(x) + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \Phi_\nu(x).$$

Cherchons maintenant si la valeur trouvée satisfait à l'équation (7). Pour cela il suffit de voir si $\varphi(x) = S_g\psi(x)$ satisfait à l'équation (7) car l'autre terme est une solution de l'équation homogène et peut être rejété. On a

$$S_f\varphi(x) = S_f S_g \psi(x) = S_G \psi(x)$$

où à cause de l'équation (4) et de la définition des fonctions Ψ_ν on a

$$G(x, y) = -\sum_{\nu=1}^{n} f(x, \eta_\nu)\Psi_\nu(y).$$

Par conséquent on trouve à cause de l'équation (15)

$$\int_0^1 G(x, y)\psi(y)dy = 0$$

et par suite

$$S_G\psi(x) = \psi(x)$$

et

$$S_f\varphi(x) = \psi(x).$$

Ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$S_f\varphi(x) = \psi(x)$$

ait une solution s'expriment par les n équations (15).

10. Le système d'équations

$$\varphi_\lambda(x) + \int_0^1 \sum_{\nu=1}^{n} f_{\lambda\nu}(x, y)\varphi_\nu(y)dy = \psi_\lambda(x) \qquad (\lambda=1\ldots n) \tag{16}$$

peut être ramené à une seule équation du type précédent.

Pour le montrer, définissons une fonction $F(x, y)$ pour des valeurs entre o et n par les n^2 conditions

$$F(x, y) = f_{\lambda\nu}(x - \lambda + 1, y - \nu + 1), \quad \text{pour} \quad 0 < \begin{matrix} x - \lambda + 1 \\ y - \nu + 1 \end{matrix} < 1$$

et une fonction Ψ par les n conditions

$$\Psi(x) = \psi_\lambda(x - \lambda + 1), \text{ pour } 0 < x - \lambda + 1 < 1.$$

Si alors le déterminant de l'équation

$$(17) \qquad \Phi(x) + \int_0^n F(x, y)\Phi(y)dy = \Psi(x)$$

est différent de zéro on en obtient une solution $\Phi(x)$ et une seule. Définissant ensuite les fonctions $\varphi_\lambda(x)$ par les conditions

$$\Phi(x) = \varphi_\lambda(x - \lambda + 1), \text{ pour } 0 < x - \lambda + 1 < 1$$

on voit que ces fonctions satisfont au système proposé.

On voit aussi que c'est la seule solution qui puisse satisfaire au système donné car autrement il en résulterait une autre fonction $\Phi(x)$ satisfaisant à l'équation (17), ce qui n'est pas possible.

§ 3. *Sur la première variation du déterminant D_f.*

11. Calculons d'abord la première variation de

$$f\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_1 \dots x_n \end{pmatrix}.$$

Si nous désignons par la notation

$$x_1, x_2 \dots (x_\lambda) \dots x_n$$

la suite des valeurs $x_1, x_2 \dots x_n$ à l'exception de x_λ, nous pouvons écrire

$$\delta f\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_1 \dots x_n \end{pmatrix} = \sum_{\lambda\mu} (-1)^{\lambda+\mu} f\begin{pmatrix} x_1 \dots (x_\lambda) \dots x_n \\ x_1 \dots (x_\mu) \dots x_n \end{pmatrix} \delta f(x_\lambda, x_\mu).$$

Multiplions les deux membres par $dx_1 \ldots dx_n$ et intégrons entre les limites o et I. En observant que la notation des variables est indifférente nous aurons évidemment

$$\delta \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_n$$

$$= n \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1\,,\, x_2 \ldots x_{n-1} \\ x_1\,,\, x_2 \ldots x_{n-1} \end{pmatrix} \delta f(x\,,x)\, dx\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

$$- n(n-1) \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} y\,,\, x_1 \ldots x_{n-2} \\ x\,,\, x_1 \ldots x_{n-2} \end{pmatrix} \delta f(x\,,y)\, dx\, dy\, dx_1 \ldots dx_{n-2}.$$

Multipliant par $\frac{1}{\underline{|n}}$ et faisant la somme depuis $n = 1$ jusqu'à ∞ nous obtenons

$$\delta D_f = \int_0^1 D_f \delta f(x\,,x) dx - \int_0^1 \int_0^1 D_f\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \delta f(x\,,y)\, dx\, dy$$

ou

$$\delta \log D_f = \int_0^1 \delta f(x\,,x) dx - \int_0^1 \int_0^1 \frac{D_f\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}}{D_f} \delta f(x\,,y)\, dx\, dy.$$

On a évidemment

$$\delta f(x\,,y) - \int_0^1 \frac{D_f\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}}{D_f} \delta f(t\,,y) dt = S_f^{-1} \delta f(x\,,y).$$

Par conséquent on peut aussi écrire

$$\delta \log D_f = \int_0^1 [S_f^{-1} \delta f(x\,,y)]_{x=y}\, dx. \tag{18}$$

En introduisant pour la transformation

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(y, x)\varphi(y)dy$$

la notation

$$T_f$$

on obtient une autre expression de la variation logarithmique de D_f à savoir

$$\delta \log D_f = \int_0^1 [T_f^{-1} \delta f(x, y)]_{x=y} dx. \tag{18 bis}$$

§ 4. *Le théorème de multiplication.*

12. Pour arriver au théorème de multiplication considérons deux transformations

$$S_f\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y)dy,$$

$$S_g\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 g(x, y)\varphi(y)dy.$$

Posons le produit de ces deux transformations

$$S_f S_g = S_F$$

nous aurons

$$F(x, y) = f(x, y) + g(x, y) + \int_0^1 f(x, t)g(t, y)dt.$$

Considérant de même les transformations

$$T_f\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 f(y, x)\varphi(y)dy,$$

$$T_g\varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 g(y, x)\varphi(y)dy$$

nous aurons

$$T_g T_f = S_G$$

où

$$G(x, y) = f(y, x) + g(y, x) + \int_0^1 f(y, t) g(t, x) dt = F(y, x).$$

Nous avons trouvé

$$\delta \log D_F = \int_0^1 \delta F(x, x) dx - \int_0^1 \int_0^1 \frac{D_F\binom{y}{x}}{D_F} \delta F(x, y) dx dy$$

formule qui peut s'écrire aussi (18)

$$\delta \log D_F = \int_0^1 [(S_f S_g)^{-1} \delta F(x, y)]_{x=y} dx \tag{19}$$

ou encore

$$\delta \log D_F = \int_0^1 [(T_g T_f)^{-1} \delta F(x, y)]_{x=y} dx. \tag{20}$$

Or

$$\delta F(x, y) = \delta f(x, y) + \delta g(x, y) + \int_0^1 [f(x, t) \delta g(t, y) + g(t, y) \delta f(x, t)] dt$$

$$= T_g \delta f(x, y) + S_f \delta g(x, y),$$

par conséquent en introduisant cette expression dans (19) et (20) on trouve

$$\delta \log D_F = \int_0^1 [(T_g T_f)^{-1} T_g \delta f(x, y) + (S_f S_g)^{-1} S_f \delta g(x, y)]_{x=y} dx$$

$$= \int_0^1 [T_f^{-1} \delta f(x, y) + S_g^{-1} \delta g(x, y)]_{x=y} dx$$

ou

$$\delta \log D_F = \delta \log D_f + \delta \log D_g.$$

Il s'ensuit que

$$\log D_F - \log D_f - \log D_g$$

ne dépend point des fonctions f et g. Alors, parce que pour $f = g = 0$ on a $D_F = D_f = D_g = 1$, on arrive au théorème

$$D_F = D_f D_g. \tag{21}$$

§ 5. *Développements divers.*

13. Nous avons vu que la fonction

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{D_f\binom{\xi}{\eta}}{D_f}$$

satisfait à l'équation

$$\varphi(\xi, \eta) + \int_0^1 f(\xi, \tau)\varphi(\tau, \eta)dt = f(\xi, \eta). \tag{4_1}$$

Cherchons un développement de la fonction $\varphi(\xi, \eta)$ de la forme

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi_1(\xi, \eta) - \varphi_2(\xi, \eta) + \varphi_3(\xi, \eta) + \dots \tag{22}$$

où $\varphi_n(\xi, \eta)$ soit de dimension n par rapport à f.

Introduisant cette série dans l'équation (4_1) on trouve, en égalant à zéro la somme des termes de la même dimension par rapport à f, les équations

$$\varphi_1(\xi, \eta) = f(\xi, \eta),$$

$$\varphi_n(\xi, \eta) = \int_0^1 f(\xi, \tau)\varphi_{n-1}(\tau, \eta)dt \qquad {\scriptstyle (n=2,3,\dots)}$$

d'où il vient

$$\varphi_n(\xi, \eta) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\xi, \tau_1)f(\tau_1, \tau_2) \dots f(\tau_{n-1}, \eta)d\tau_1 \dots d\tau_{n-1}.$$

Le développement ainsi trouvé converge pourvu que la limite supérieure de f soit assez petite.

Rappelons maintenant la formule (6) que nous pouvons écrire pour $n = 1$

$$\lambda \frac{d \log D_{\lambda f}}{d\lambda} = \int_0^1 \varphi(\xi, \xi)d\xi$$

nous aurons, en introduisant pour $\varphi(\xi, \xi)$ l'expression (22), la formule

$$\log D_{\lambda f} = \lambda \int_0^1 f(x, x) dx - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) f(y, x) dx dy + \text{ etc.}$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) \ldots f(x_{n-1}, x_n) f(x_n, x_1) dx_1 \ldots dx_n$$

ou bien, si la série dans le second membre converge pour $\lambda = 1$

$$\log D_f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) \ldots f(x_{n-1}, x_n) f(x_n, x_1) dx_1 \ldots dx_n.$$

§ 6. *Le cas où $f(x, y)$ devient infini de telle manière que $(x-y)^\alpha f(x, y)$ reste fini.*

14. Soit $f(x, y)$ une fonction finie et intégrable, $i(x, y)$ une fonction telle que $(x - y)^\alpha i(x, y)$ soit fini et intégrable. Supposons que D_f soit nul ainsi que ses mineurs jusqu'à l'ordre n. Soit de plus

$$S_f S_i = S_i S_f,$$

on a évidemment

$$S_i \Phi_\lambda(x) = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\lambda\mu} \Phi_\mu(x), \qquad (\lambda = 1, \ldots, n) \tag{23}$$

$\Phi_1(x) \ldots \Phi_n(x)$ étant les n solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$S_f \varphi(x) = 0.$$

Soit

$$T_f \varphi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 f(y, x) \varphi(y) dy$$

nous aurons

$$T_i \Psi_\lambda(x) = \sum_{\mu=1}^{n} q_{\lambda\mu} \Psi_\mu(x) \qquad (\lambda = 1, \ldots, n) \tag{24}$$

$\Psi_1(x) \ldots \Psi_n(x)$ étant les n solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$T_f \Psi(x) = 0.$$

Je dis que le déterminant des coefficients $p_{\lambda\mu}$ est égal à celui des coefficients $q_{\lambda\mu}$.

Je le démontre en supposant que le déterminant des quantités

$$c_{\lambda\mu} = \int_0^1 \Phi_\lambda(x) \Psi_\mu(x) dx$$

soit différent de zéro, un simple raisonnement par continuité permettant évidemment d'étendre la proposition au cas où le déterminant est nul.

Observant qu'on a identiquement

$$\int_0^1 \Psi(x) S_i \Phi(x) dx = \int_0^1 \Phi(x) T_i \Psi(x) dx$$

on obtient en tenant compte des équations (23) et (24)

$$\sum_{\nu=1}^n c_{\nu\mu} p_{\lambda\nu} = \sum_{\nu=1}^n c_{\lambda\nu} q_{\mu\nu} \qquad (\lambda, \mu = 1, \ldots, n)$$

d'où résulte immédiatement le résultat cherché.

15. Désignons par $i(x, y)$ une fonction à laquelle appartient la transformation S_i. Nous allons chercher les conditions dans lesquelles il existe une transformation inverse de S_i en supposant que $i(x, y)$ devient infini de telle manière que $(x - y)^\alpha i(x, y)$ reste fini, α étant un nombre inférieur à l'unité.

Posons

$$i_\nu(x, y) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 i(x, t_1) i(t_1, t_2) \ldots i(t_{\nu-1}, y) dt_1 \ldots dt_{\nu-1}$$

et

$$k(x, y) = - i(x, y) + i_2(x, y) - \ldots + (-1)^{n-1} i_{n-1}(x, y)$$

nous aurons

$$S_k S_i = S_i S_k = S_f$$

où

$$f(x, y) = (-1)^{n-1} i_n(x, y).$$

Si on a choisi n tel que

$$n > \frac{1}{1 - \alpha}$$

$i_n(x, y)$ ne devient plus infini.

Pour le démontrer observons qu'on peut écrire

$$\int_0^1 \frac{dt}{|x-t|^\alpha |t-y|^\beta} < \frac{\Psi(\alpha, \beta)}{|x-y|^{\alpha+\beta-1}} \tag{25}$$

où $\Psi(\alpha, \beta)$ est une fonction finie tant que

$$0 < \alpha < 1 \, , \, 0 < \beta < 1 \, , \, \alpha + \beta < 1.$$

L'inégalité (25) se démontre facilement en faisant dans l'intégrale le changement de variable

$$t = x + (y - x)s.$$

L'application répétée de l'inégalité (25) par rapport à l'inégalité

$$|i(x, y)| < \frac{a}{|x-y|^\alpha}$$

conduit facilement au résultat que

$$|i_\nu(x, y)| < \frac{a_\nu}{|x-y|^{\nu\alpha-\nu+1}}$$

tant que

$$\nu\alpha - \nu + 1 < 0$$

c'est à dire tant que

$$\nu < \frac{1}{1-\alpha}.$$

Soit

$$\frac{1}{1-\alpha} - 1 < n - 1 < \frac{1}{1-\alpha}$$

nous aurons

$$|i_n(x, y)| < \int_0^1 \frac{a_{n-1}\alpha \, . \, dt}{|x-t|^{(n-1)\alpha-n+2} |t-y|^\alpha}.$$

De cette inégalité il vient qu'il existe une limite supérieure finie pour $i_n(x, y)$.

16. Les résultats ainsi obtenus s'étendent prèsque immédiatement à des transformations plus générales

$$S_i\varphi(x_1\dots x_n) = \varphi(x_1\dots x_n) + \int_0^1\dots\int_0^1 i(x_1\dots x_n; y_1\dots y_n)\varphi(y_1\dots y_n)dy_1\dots dy_n$$

en admettant que $i(x_1\dots x_n; y_1\dots y_n)$ devient infini de manière que

$$r^\alpha . i(x_1\dots y_1\dots)$$

reste fini, α étant un nombre convenablement choisi, inférieur à n, et r la distance des points dont les coordonnées cartésiennes sont $x_1\dots x_n$ et $y_1\dots y_n$ respectivement.

On a en effet

$$\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - y_\nu)^2 > n\sqrt[n]{\prod_{\nu=1}^{n}(x_\nu - y_\nu)^2}$$

ou

$$r \geqq \sqrt{n}\prod_{\nu=1}^{n}|x_\nu - y_\nu|^{\frac{1}{n}}.$$

Par conséquent il existe un nombre a tel que

$$|i| \leqq \frac{a}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}|x_\nu - y_\nu|^{\frac{\alpha}{n}}}.$$

Nous définissons de la même manière qu'auparavant les fonctions i_ν, c'est à dire nous posons

$$i_\nu(x_1\dots x_n) = \int_0^1\dots\int_0^1 i(x_1\dots x_n; t_1\dots t_n)i_{\nu-1}(t_1\dots t_n)dt_1\dots dt_n.$$

Par un raisonnement analogue à celui employé dans le cas précédent nous arrivons à l'inégalité

$$|i_\lambda(x_1\dots x_n, y_1\dots y_n)| < \frac{a_\nu}{\{\prod|x_\nu - y_\nu|\}^{\frac{\lambda\alpha}{n}-\lambda+1}};$$

et de cette inégalité nous tirons le résultat que i_λ ne devient infini si $\lambda > \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}}$.

17. Pour montrer comment ces résultats s'appliquent à la résolution d'une équation

$$S_i\varphi(x) = \psi(x)$$

je me restreins, pour abréger l'écriture, au cas où i ne dépend que de deux variables.

Appliquant aux deux membres de l'équation proposée la transformation S_k, nous aurons

$$S_k S_i\varphi(x) = S_f\varphi(x) = S_k\psi(x).$$

Ici f et $S_\lambda\psi(x)$ sont des fonctions finies et évidemment aussi intégrables. Par suite nous pouvons appliquer à l'équation

$$S_f\varphi(x) = S_k\psi(x) \tag{26}$$

les procédés exposés dans le paragraphe 2.

Supposons, pour nous placer dans l'hypothèse la plus générale, que D_f soit nul ainsi que ses mineurs jusqu'à l'ordre n et employons les notations du § 2.

Nous avons en appliquant aux deux membres de l'équation (7) la transformation *pseudo-inverse* de S_f

$$S_g S_f\varphi(x) = S_F\varphi(x) = S_g S_k\psi(x)$$

ou

$$\varphi(x) = S_g S_k\psi(x) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \Phi_\nu(x).$$

S'il existe une solution de l'équation proposée on peut déterminer les coefficients c_ν de manière que $S_i\varphi(x)$ soit égale à $\psi(x)$.

18. Parmi les cas où cette détermination est possible il y a un qui me paraît mériter l'attention. C'est le cas où l'équation

$$S_i\varphi(x) = 0$$

n'admet que la solution

$$\varphi(x) = 0.$$

Nous avons évidemment

$$S_i S_f = S_f S_i.$$

Par conséquent

$$S_i \Phi_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{n} p_{\lambda\mu} \Phi_\mu(x)$$

où le déterminant des coefficients $p_{\lambda\mu}$ est différent de zéro, les fonctions Φ_μ étant linéairement indépendantes et l'équation

$$S_i \varphi(x) = 0$$

n'admettant que la solution $\varphi(x) = 0$.

Le déterminant des $p_{\lambda\mu}$ n'étant pas nul le déterminant des $q_{\lambda\mu}$ est aussi différent de zéro. Il s'ensuit que l'équation

$$T_i \varphi(x) = 0$$

n'admet que la solution $\varphi(x) = 0$ et que l'on a

$$\left.\begin{aligned} S_k \Phi_\lambda(x) &= 0, \\ T_k \Psi_\lambda(x) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n) \tag{27}$$

Cela posé, mettant

$$\varphi_0(x) = S_g S_k \psi(x)$$

nous aurons

$$S_f \varphi_0(x) = S_f S_g S_k \psi(x) = S_G S_k \psi(x)$$

$$= S_k \psi(x) - \sum_{\nu=1}^{n} f(x, \eta_\nu) \int_0^1 \psi_\nu(x) S_k \psi(x) dx.$$

Or on a identiquement

$$\int_0^1 \psi_\nu(x) S_k \psi(x) dx = \int_0^1 \psi(x) T_k \psi_\nu(x) dx = 0.$$

Par suite

$$S_f \varphi_0(x) - S_k \psi(x) = 0$$

ou

$$S_k\big(S_i \varphi_0(x) - \psi(x)\big) = 0$$

d'où on conclut

$$S_i \varphi_0(x = \psi(x) + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \Phi_\nu(x)$$

les a_ν étant des nombres connus.

Posant maintenant

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \Phi_\nu(x)$$

on obtient

$$S_i\varphi(x) = \psi(x) + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \Phi_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} p_{\lambda\nu} c_\lambda \Phi_\nu(x).$$

Or, le déterminant des coefficients $p_{\lambda\nu}$ n'étant pas nul on peut évidemment déterminer les c_ν de manière que l'on ait

$$S_i\varphi(x) = \psi(x).$$

C. Q. F. D.