ARITHMETISCHE EIGENSCHAFTEN ANALYTISCHER FUNCTIONEN

VON

PAUL STÄCKEL

in KIEL.

I.

Betrachten wir die Gesamtheit derjenigen algebraischen Functionen y von x, die durch eine Gleichung

$$g(x, y) = 0$$

definirt werden; $g(x, y)$ bedeute eine ganze rationale Function von x und y mit ganzzahligen Coefficienten. Darunter sind die rationalen Functionen von x mit rationalen Coefficienten enthalten. Sie sind dadurch ausgezeichnet, dass zu jedem rationalen Werte des Argumentes ein rationaler Wert der Function gehört. Das gilt auch noch dann, wenn der Begriff »rational» dahin erweitert wird, dass darunter jede Zahl der Form $a + ib$ verstanden werden soll, bei der a und b reelle rationale Zahlen sind.

Die soeben angegebene Eigenschaft kann dazu dienen, die rationalen Functionen mit rationalen Coefficienten aus der Gesamtheit der betrachteten algebraischen Functionen auszusondern. Nach Herrn HILBERT ist nämlich eine algebraische Function, die für alle rationalen Werte eines beliebig kleinen Intervalles selbst stets rationale Werte annimmt, notwendig eine rationale Function[1]; Herr HILBERT hat diesen Satz allerdings nur für *reelle* rationale Werte ausgesprochen, er gilt aber, wie man sich leicht überzeugt, auch im complexen Gebiete.

---

[1] *Über die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten.* Journal für Math., Bd. 110 (1892), S. 129.

Ein weit ausgedehnterer Bereich von Functionen ergiebt sich, wenn man eine Gleichung der Form

$$\mathfrak{P}(x, y) = 0$$

zu Grunde legt, in der $\mathfrak{P}(x, y)$ eine Potenzreihe von x und y mit rationalen Coefficienten bedeutet, die in einem die Stelle $x = 0$, $y = 0$ umgebenden Gebiete unbedingt convergirt. Unter den Functionen des Bereiches sind auch die vorher betrachteten algebraischen und rationalen Functionen enthalten, und es entsteht daher die Frage, ob diese gegenüber der Gesamtheit der Functionen der Bereiches ebenso durch einfache arithmetische Eigenschaften characterisirt werden können, wie das bei den rationalen Functionen gegenüber der Gesamtheit der algebraischen Functionen der Fall war.

Dass eine analytische Function, die für alle reellen rationalen Werte des Argumentes selbst stets reelle rationale Werte annimmt, notwendig eine rationale Function sein müsse, hatte ein früh verstorbener, talentvoller Mathematiker Emil Strauss[1] in Jahre 1886 zu beweisen versucht, war aber von Weierstrass, dem er den Beweisversuch mitgeteilt hatte, auf die Vergeblichkeit seiner Bemühungen aufmerksam gemacht worden; Weierstrass bildete nämlich eine *transcendente* Function, der dieselben Eigenschaften zukamen. Gleichzeitig bemerkte er, dass es auch auf mannigfache Weise möglich sei, *transcendente* Functionen in Form von Potenzreihen mit rationalen Coefficienten herzustellen, die für jeden algebraischen Wert des Argumentes selbst stets ebenfalls algebraische Werte annehmen. Hierdurch angeregt versuchte Strauss eine solche Function herzustellen. Die von ihm construirte Potenzreihe besitzt allerdings für die dem Convergenzbereiche angehörenden Werte des Argumentes die verlangte Eigenschaft, allein Strauss bewies nur, dass dadurch keine *rationale* Function dargestellt werde, und übersah die Möglichkeit, dass durch seine Potenzreihe eine *algebraische* Function definirt werden könne. Wenn sich nun auch, wie ich gezeigt

---

[1] Strauss hat in dieser Zeitschrift (t. 11 (1888), S. 13—18) eine beachtenswerte Abhandlung veröffentlicht: *Eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise nebst functionentheoretischer Anwendung*, auf die Herr Hurwitz in der Abhandlung: *Über beständig convergirende Potenzreihen mit rationalen Zahlencoefficienten und vorgeschriebenen Nullstellen* (diese Zeitschrift, t. 14 (1890), S. 211—215) zurückgekommen ist.

habe[1], diese Lücke ausfüllen und die Transcendenz jener Function in aller Strenge darthun lässt, so hatte das Beispiel von STRAUSS doch den Mangel, dass der absolute Wert des Argumentes kleiner als Eins sein muss, damit die Reihe convergirt, und es blieb die Frage offen, ob es transcendente Functionen gebe, die durch beständig convergente Potenzreihen mit rationalen Coefficienten dargestellt werden können und für jeden endlichen algebraischen Wert des Argumentes einen algebraischen Wert der Function liefern. Dass diese Frage zu bejahen ist, habe ich durch ein Verfahren nachgewiesen, das noch weiter zu gehen erlaubt; z. B. lässt sich dadurch zeigen, dass es sogar Functionen der verlangten Art gibt, die für jeden algebraischen Wert des Argumentes nur (complexe) rationale Werte annehmen[2].

II.

Die algebraischen Functionen y von x, die durch eine Gleichung $g(x, y) = 0$ definirt werden, besitzen nicht nur die Eigenschaft, dass zu jedem algebraischen Werte von x ein algebraischer Wert von y gehört, sondern es ist auch umgekehrt jedem algebraischen Werte von y ein algebraischer Wert von x zugeordnet, und es entsteht daher die Frage, ob diese algebraischen Functionen durch die beiden Eigenschaften zusammengenommen gegenüber den analytischen Functionen, die durch Gleichungen der Form $\mathfrak{P}(x, y) = 0$ definirt werden, characterisirt sind. Dass das nicht der Fall ist, dass es vielmehr transcendente Functionen gibt, denen beide Eigenschaften zukommen, soll im Folgenden ausführlich dargelegt werden; eine Skizze des Beweises habe ich bereits in zwei Noten gegeben, die Herr PICARD am 20. und 27. März 1899 der Pariser Akademie vorgelegt hat und die in deren Comptes Rendus abgedruckt worden sind.

Nach dem Vorgange von Herrn G. CANTOR[3] soll einer jeden irre-

---

[1] *Über arithmetische Eigenschaften analytischer Functionen.* Math. Ann. t. 46 (1895), S. 513—520. Nouvelles Annales (3) t. 18 (1899), Februarheft.

[2] A. a. o. S. 519—520.

[3] *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs reeller algebraischer Zahlen.* Journal für Math., t. 77 (1873), S. 258—263.

duciblen ganzen Function mit ganzzahligen Coefficienten (ohne gemeinsamen Teiler):

$$g_0 x^n + g_1 x^{n-1} + \ldots + g_{n-1} x + g_n$$

als *Höhe* die ganze positive Zahl

$$h = n - 1 + |g_0| + |g_1| + \ldots + |g_{n-1}| + |g_n|$$

zugeordnet werden. Die durch eine irreducible Gleichung der Höhe h definirten algebraischen Zahlen mögen algebraische Zahlen der Höhe h heissen.

Das Product aller Functionen derselben Höhe h (wobei der Coefficient g_0 immer positiv genommen werde) ist eine ganze rationale Function mit ganzzahligen Coefficienten, die mit $\varphi_h(x)$ bezeichnet werde; man erhält:

$$\varphi_1(x) = x, \qquad \varphi_2(x) = x^2 - 1, \qquad \varphi_3(x) = 4x^4 - 17x^2 + 4, \text{ usw.}$$

Die Functionen $\varphi_h(x)$ besitzen eine Eigenschaft, von der später Gebrauch gemacht werden wird und die daher schon an dieser Stelle abgeleitet werden soll. Ist a eine algebraische Zahl der Höhe h, so ist a^{-1} eine algebraische Zahl derselben Höhe, da die Functionen

$$g_0 x^n + g_1 x^{n-1} + \ldots + g_{n-1} x + g_n$$

und

$$g_n x^n + g_{n-1} x^{n-1} + \ldots + g_1 x + g_0$$

gleichzeitig irreducibel oder reducibel sind; ausgenommen ist augenscheinlich nur die Zahl Null als einzige Zahl der Höhe 1. Wird daher der Grad von $\varphi_h(x)$ mit $\varkappa_h$ bezeichnet, so ist für $h = 2, 3, 4, \ldots$:

$$\varphi_h(x) = \pm\, x^{\varkappa_h} \varphi_h\left(\frac{1}{x}\right);$$

dagegen ist für $h = 1$:

$$\varphi_1(x) = x^{\varkappa_1 + 1} \varphi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ferner sollen die Producte:

$$\prod_{k=1}^{h} \varphi_k(x) = x \psi_h(x) \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

gebildet werden; man erhält:

$$\phi_1(x) = 1, \qquad \phi_2(x) = x^2 - 1, \qquad \phi_3(x) = 4x^6 - 21x^4 + 21x^2 - 4, \text{ usw.}$$

Wird der Grad von $\phi_h(x)$ mit λ_h bezeichnet, sodass

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 6, \quad \text{usw.}$$

ist, so gelten für $h = 1, 2, 3, \ldots$ die Identitäten:

$$\phi_h(x) = \pm\, x^{\lambda_h} \phi_h\left(\frac{1}{x}\right).$$

Endlich sollen die ganzen positiven Zahlen μ_h durch die Relationen:

$$\mu_h = \mu_{h-1} + \lambda_{h-1} + 1 \qquad (h=2,3,4,\ldots)$$

mit der Anfangsbedingung $\mu_1 = 1$ definirt werden; man erhält:

$$\mu_2 = 2, \qquad \mu_3 = 5, \qquad \mu_4 = 12, \quad \text{usw.}$$

Nach diesen Vorbereitungen betrachte ich den Ausdruck:

$$\text{(A)} \qquad x + y + \sum_{h=1}^{\infty} u_h x^{\mu_h} \phi_h(x) y^{\mu_h} \phi_h(y),$$

in dem $u_1, u_2, \ldots, u_h, \ldots$ rationale Zahlen bedeuten sollen, über die noch verfügt werden darf.

Wird in dem Gliede mit dem Index h die Multiplication von $\phi_h(x)$ mit x^{μ_h} ausgeführt, so ergibt sich, weil $\phi_h(0) \neq 0$ ist, als niedrigste Potenz von x: x^{μ_h}, als höchste $x^{\mu_h+\lambda_h} = x^{\mu_{h+1}-1}$, sodass die so erhaltenen Potenzen weder in den vorhergehenden noch in den folgenden Gliedern von (A) auftreten. Da in Bezug auf y dasselbe gilt, so kommt nach Ausführung aller Multiplicationen sogleich eine geordnete Potenzreihe zum Vorschein, die sich in der Form schreiben lässt:

$$\text{(B)} \qquad x + y + u_1 xy + \sum b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta; \qquad (\alpha, \beta = 2, 3, 4, \ldots)$$

die Coefficienten $b_{\alpha\beta}$ sind dabei Producte von ganzen, positiven oder negativen, Zahlen mit je einer der Grössen $u_1, u_2, \ldots$. Wird daher irgend eine Potenzreihe:

$$x + y + u_1 xy + \sum B_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \qquad (\alpha, \beta = 2, 3, 4, \ldots)$$

mit lauter von Null verschiedenen, positiven Coefficienten gewählt, die für ein die Stelle $x = 0$, $y = 0$ umgebendes Gebiet unbedingt convergirt, so ist der Convergenzbereich der Reihe (B) mindestens ebenso ausgedehnt, sobald die Ungleichheiten

$$|b_{\alpha\beta}| \leqq B_{\alpha\beta} \qquad {\scriptstyle (\alpha,\beta=2,3,4,\ldots)}$$

bestehen. Diese Ungleichheiten sind aber erfüllt, wenn den Grössen u_2, $u_3, \ldots, u_h, \ldots$ positive rationale Werte erteilt werden, die zwischen Null und gewissen von Null verschiedenen oberen Grenzen $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_h, \ldots$ liegen. Im Besonderen lässt sich auf diese Weise erreichen, dass der Ausdruck (A) einer beständig convergirenden Potenzreihe von x und y aequivalent ist.

Es möge ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass man zwischen der Convergenz des Ausdruckes (A) und der Potenzreihe (B) scharf unterscheiden muss; wenn, nach geschehener Wahl der Grössen $u_1, u_2, \ldots$, für $x = a$, $y = b$ die Reihe (B) convergirt, so convergirt dafür auch immer der Ausdruck (A), es braucht aber im Allgemeinen nicht das Umgekehrte zu gelten; nur wenn (B) beständig convergent ist, fällt diese Unterscheidung fort.

Man überzeugt sich leicht, dass durch die Gleichung:

$$(\mathrm{B}^*) \qquad x + y + u_1 xy + \Sigma b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = 0$$

ein Zusammenhang zwischen den Veränderlichen x und y definirt wird, bei dem, wenn x und y auf den Convergenzbereich beschränkt werden, die beiden früher verlangten Eigenschaften stattfinden. Schreibt man nämlich, was wegen der unbedingten Convergenz gestattet ist, die Gleichung (B*) in der Form

$$(\mathrm{A}^*) \qquad x + y + \sum_{h=1}^{\infty} u_h x^{\mu_h} \phi_h(x) y^{\mu_h} \phi_h(y) = 0,$$

so verschwinden, wenn für die Veränderliche x eine algebraische Zahl a der Höhe $h > 1$ eingesetzt wird, alle Functionen $\phi_k(a)$ für $k \geqq h$, und man erhält daher zur Bestimmung der zugehörigen Werte von y die algebraische Gleichung:

$$a + y + \sum_{k=1}^{h-1} u_k a^{\mu_k} \phi_k(a) y^{\mu_k} \phi_k(y) = 0,$$

deren Grad $\leqq \mu_h - 1$ ist. Das Entsprechende gilt aber auch, wenn für die Veränderliche y eine algebraische Zahl b eingesetzt wird.

III.

Die Frage, ob der durch die Gleichung (B*) definirte Zusammenhang zwischen den Veränderlichen x und y *transcendent* ist, bedarf, um einen präcisen Sinn zu haben, einer Erläuterung, die in ausführlicher Form zu geben um so mehr angebracht erscheint, als es sich dabei um Dinge von allgemeinem Interesse handelt.

Eine jede Gleichung der Form:

$$(C) \qquad x + y + \sum c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = 0, \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, \dots, \alpha + \beta > 1)$$

auf deren linker Seite eine Potenzreihe von x und y steht, die für ein gewisses die Stelle $x = 0$, $y = 0$ umgebendes Gebiet unbedingt convergirt, definirt zwischen den Veränderlichen x und y einen Zusammenhang in dem Sinne, dass, wenn für x ein dem Convergenzbereiche, angehörender Wert a eingesetzt wird, die zugehörigen Werte von y aus der Gleichung

$$a + y + \sum c_{\alpha\beta} a^\alpha y^\beta = 0$$

zu bestimmen sind. Wenn x hinreichend klein ist, gibt es Werte von y, die dieser Gleichung genügen, denn nach einem bekannten Satze existirt unter den Voraussetzungen, die gemacht worden sind, eine convergente Potenzreihe:

$$y = -x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + \dots,$$

die in (C) eingesetzt die linke Seite zum identischen Verschwinden bringt. Aus dieser Potenzreihe für y entspringt durch analytische Fortsetzung eine monogene analytische Function $y = f(x)$, von der man sagen darf, dass sie der Gleichung (C) genügt. Darunter ist zu verstehen, dass jedes durch Fortsetzung erhaltene Element von $f(x)$:

$$y - y_0 = \sum_{\alpha=1}^{\infty} s_\alpha (x - x_0)^\alpha,$$

wenn x_0 und y_0 dem Convergenzbereiche der Reihe auf der linken Seite von (C) angehören, ebenfalls zur identischen Erfüllung der Gleichung (C) führt.

Jetzt sind zwei Möglichkeiten vorhanden. Entweder sind sämtliche Potenzreihen

$$y - y_1 = \sum_{\alpha=1}^{\infty} t_\alpha (x - x_1)^\alpha,$$

durch die die Gleichung (C) identisch erfüllt wird, Elemente der Function $f(x)$ oder es gibt Potenzreihen, die zwar der Gleichung (C) genügen, aber nicht zur Function $f(x)$ gehören. Der erste Fall entspricht genau dem Verhalten bei einer irreduciblen algebraischen Gleichung $g(x, y) = 0$, durch die y als monogene analytische Function von x definirt wird. Ich habe daher vorgeschlagen, in einem erweiterten Sinne des Wortes die Gleichung (C) alsdann ebenfalls *irreducibel* zu nennen.

Da man nicht weiss, ob die besondere Gleichung:

$$(\mathrm{B}^*) \qquad x + y + u_1 xy + \sum b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = 0$$

im erweiterten Sinne irreducibel ist, so ist es möglich, dass ihr verschiedene, ja sogar unendlich viele monogene analytische Functionen genügen, und es wäre sogar denkbar, dass es lauter algebraische Functionen wären. Es ist daher erforderlich zu zeigen, dass wenigstens eine der durch diese Gleichung definirten monogenen analytischen Functionen transcendent ist. Die Frage, ob die Gleichung (B*) irreducibel ist oder nicht, bleibt dabei unentschieden[1].

IV.

Nach einem bekannten Satze wird die Gleichung (B*) durch eine convergente Potenzreihe

$$(\mathrm{R}) \qquad y = -x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + \dots$$

befriedigt; die Coefficienten $r_2, r_3, \dots$ sind rationale Zahlen, weil vermöge der Festsetzung über die Grössen $u_1, u_2, \dots$ die Coefficienten $b_{\alpha\beta}$ rationale

[1] Irreducible Gleichungen (B*), deren linke Seite eine beständig convergente Potenzreihe von x und y ist, würden eine bemerkenswerte Klasse analytischer Functionen definiren, bei denen nämlich jeder algebraische Wert von x eine singuläre Stelle und zwar ein Verzweigungspunkt wäre, indem dazu der mehrfache Wert $y = \infty$ gehörte.

Zahlen waren. Durch die Reihe (R) wird eine monogene analytische Function von x definirt, der für einen hinreichend kleinen die Stelle $x = 0$, $y = 0$ umgebenden Bereich die Eigenschaft zukommt, dass jedem algebraischen Werte von x ein algebraischer Wert von y, nämlich der durch die Gleichung (R) definirte, und umgekehrt jedem algebraischen Werte von y ein algebraischer Wert von x, nämlich der durch die Umkehrung der Gleichung (R) definirte, zugeordnet ist.

Der Beweis, dass diese analytische Function transcendent ist, beruht auf einigen algebraischen Hilfssätzen, die zunächst hergeleitet werden sollen.

In der ganzen rationalen Function

$$P_\alpha(x\,,\,y\,,\,u_\alpha) = x + y + \sum_{h=1}^{\alpha} u_h x^{\mu_h}\phi_h(x) y^{\mu_h}\phi_h(y)$$

mögen x und y veränderliche Grössen bezeichnen, $u_1\,,\,u_2\,,\,\ldots\,,\,u_{\alpha-1}$ seien gegebene rationale Zahlen, während u_α zwischen den Grenzen 0 und ε_α variiren darf. Als Function der Argumente $x\,,\,y\,,\,u_\alpha$ ist P_α *irreducibel*, denn es ist linear in u_α, könnte also nur dadurch reducibel werden, dass der Coefficient von u_α:

$$x^{\mu_\alpha}\phi_\alpha(x) y^{\mu_\alpha}\phi_\alpha(y)$$

mit dem absoluten Gliede

$$x + y + \sum_{k=1}^{\alpha-1} u_k x^{\mu_k}\phi_k(x) y^{\mu_k}\phi_k(y)$$

einen Factor gemeinsam hätte. Ein solcher Factor müsste die Form $\chi(x)\,.\,\omega(y)$ haben, das absolute Glied ist aber weder durch $\chi(x)$ teilbar, weil darin y als Term vorkommt, noch durch $\omega(y)$, weil darin x als Term vorkommt.

Setzt man

$$x = \frac{1}{\xi}, \qquad y = \frac{1}{\eta}, \qquad u_\alpha = \frac{1}{v_\alpha},$$

und beachtet die Identitäten:

$$\phi_h(t) = \pm\, t^{\lambda_h}\phi_h\left(\frac{1}{t}\right),$$

so wird

$$P_\alpha\left(\frac{1}{\xi}\,,\,\frac{1}{\eta}\,,\,\frac{1}{v_\alpha}\right) = \frac{\Pi_\alpha(\xi\,,\,\eta\,,\,v_\alpha)}{v_\alpha \xi^{\mu_{\alpha+1}-1}\,\eta^{\mu_{\alpha+1}-1}}$$

Dabei bedeutet

$$\Pi_a(\xi, \eta, v_a) = \pm \phi_a(\xi)\phi_a(\eta)$$
$$+ v_a \left\{ \xi^{\mu_{a+1}-1} \eta^{\mu_{a+1}-1} (\xi + \eta) + \sum_{k=1}^{a-1} \pm u_k \xi^{\mu_{a+1}-\mu_{k+1}} \phi_k(\xi) \eta^{\mu_{a+1}-\mu_{k+1}} \phi_k(\eta) \right\}$$

eine ganze rationale Function von ξ, η, v_a mit rationalen Coefficienten, die ebenso wie $P_a(x, y, u_a)$ irreducibel ist.

Nun gilt nach Herrn HILBERT folgendes Theorem:

Wenn die ganze Function $F(x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q)$ der Veränderlichen $x, y, \ldots, w$ und der Parameter $t, r, \ldots, q$ mit rationalen Coefficienten irreducibel ist, so ist es stets auf unendlich viele Weisen möglich, in dieser Function $F(x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q)$ für die Parameter $t, r, \ldots, q$ ganze rationale Zahlen einzusetzen, so dass dadurch diese Function in eine irreducible Function der Veränderlichen $x, y, \ldots, w$ übergeht[1].

Aus dem Beweise von Herrn HILBERT geht hervor, dass, vermöge der Fähigkeit, die Werte der Parameter $t, r, \ldots, q$ auf unendlich viele Arten zu wählen, stets erreicht werden kann, dass sie *sämtlich* grösser als irgend eine gegebene ganze Zahl N sind; dieser Umstand wird für die folgende Deduction von wesentlicher Bedeutung sein.

Nunmehr sollen in der Function $\Pi_a(\xi, \eta, v_a)$ ξ und v_a als Parameter behandelt werden, während η die Veränderliche ist. Die ganze Zahl N_a werde so gross angenommen, dass $N_a \geqq \alpha$ ist und dass $\frac{1}{N_a}$ dem Intervall $(0 \ldots \varepsilon_a)$ angehört. Dann gibt es zwei ganze Zahlen $\beta - 1$ und ω_a, die grösser als N_a sind und die, für ξ und v_a eingesetzt, $\Pi_a(\xi, \eta, v_a)$ in eine irreducible Function von η verwandeln. Alsdann ist auch

$$P_a\left(\frac{1}{\beta - 1}, y, \frac{1}{\omega_a}\right) = \frac{\Pi_a\left(\beta - 1, \frac{1}{y}, \omega_a\right)}{\omega_a(\beta - 1)^{\mu_{a+1}-1}} y^{\mu_{a+1}-1}$$

eine irreducible Function von y.

---

[1] A. a. O., S. 122. Dass dort von ganzzahligen Coefficienten gesprochen wird, ist unerheblich. Irreducibel ist hier für den Bereich der rationalen Zahlen gemeint, bei Herrn HILBERT (was für den vorliegenden Zweck nicht in Betracht kommt) für einen durch eine beliebige algebraische Zahl bestimmten Rationalitätsbereich.

Nachdem für die Grösse u_α der rationale Wert $\frac{1}{\omega_\alpha}$ gewonnen ist, setze man

$$u_{\alpha+1} = 0, \qquad u_{\alpha+2} = 0 \;, \quad \ldots \;, \quad u_{\beta-1} = 0$$

und bilde zur Bestimmung von u_β mit den vorher angenommenen Werten von $u_1, u_2, \ldots, u_{\beta-1}$ die ganze rationale Function

$$P_\beta(x, y, u_\beta) = x + y + \sum_{h=1}^{\beta} u_h x^{\mu_h} \phi_h(x) y^{\mu_h} \phi_h(y).$$

Indem man die ganze Zahl N_β so gross wählt, dass $N_\beta \geqq \beta$ ist und dass $\frac{1}{N_\beta}$ dem Intervall $(0 \ldots \varepsilon_\beta)$ angehört, kann man, abermals das Theorem von Herrn Hilbert anwendend, ganze Zahlen $\gamma - 1$ und ω_β finden, die grösser als N_β sind und die bewirken, dass

$$P_\beta\left(\frac{1}{\gamma - 1}, y, \frac{1}{\omega_\beta}\right)$$

eine irreducible Function von y wird.

In dieser Weise fortfahrend erhält man eine unendliche Reihe von ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \varkappa, \lambda, \ldots$, die beständig wachsen, und dabei sind die Polynome

$$P_\varkappa\left(\frac{1}{\lambda - 1}, y, \frac{1}{\omega_\varkappa}\right)$$

irreducible Functionen von y.

Bildet man nunmehr die Gleichung:

$$(\bar{\mathrm{A}}) \qquad 0 = x + y$$

$$+ \sum_{h=1}^{\alpha} u_h x^{\mu_h} \phi_h(x) y^{\mu_h} \phi_h(y) + u_\beta x^{\mu_\beta} \phi_\beta(x) y^{\mu_\beta} \phi_\beta(y) + u_\gamma x^{\mu_\gamma} \phi_\gamma(x) y^{\mu_\gamma} \phi_\gamma(y) + \ldots$$

$$+ u_\varkappa x^{\mu_\varkappa} \phi_\mu(x) y^{\mu_\varkappa} \phi_\varkappa(y) + u_\lambda x^{\mu_\lambda} \phi_\lambda(x) y^{\mu_\lambda} \phi_\lambda(y) + \ldots \text{ in inf.},$$

so ist die rechte Seite eine convergente Potenzreihe von x und y mit rationalen Coefficienten, und es wird daher die Gleichung $(\bar{\mathrm{A}})$ durch eine convergente Potenzreihe mit rationalen Coefficienten:

$$(\bar{\mathrm{R}}) \qquad y = -x + \bar{r}_2 x^2 + \bar{r}_3 x^3 + \ldots$$

befriedigt.

Da die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa, \lambda, \ldots$ beständig wachsen, so werden die Brüche $\frac{1}{\alpha - 1}, \frac{1}{\beta - 1}, \frac{1}{\gamma - 1}, \ldots, \frac{1}{\varkappa - 1}, \frac{1}{\lambda - 1}, \ldots$ beständig kleiner und müssen daher, von einer bestimmten Stelle an, kleiner als der Convergenzradius der Reihe $(\overline{\mathrm{R}})$ bleiben. Convergirt die Reihe $(\overline{\mathrm{R}})$ etwa für $x = \frac{1}{\lambda - 1}$, so ergibt sich aus ihr für y ein algebraischer Wert, der sich auch aus der Gleichung $(\overline{\mathrm{A}})$ berechnen lässt, indem man darin $x = \frac{1}{\lambda - 1}$ setzt. Nun ist aber $\frac{1}{\lambda - 1}$ eine algebraische Zahl der Höhe λ, folglich verschwinden alle Functionen $\psi_k(x)$, für die der Index $k \geqq \lambda$ ist. Da ferner

$$u_{\varkappa+1} = 0, \qquad u_{\varkappa+2} = 0\,, \quad \ldots\,, \quad u_{\lambda-1} = 0$$

sein sollte, so erhält man zur Bestimmung von y die Gleichung

$$P_\varkappa\left(\frac{1}{\lambda - 1}, y, \frac{1}{\omega_\varkappa}\right) = 0,$$

die irreducibel und vom Grade $\mu_{\varkappa+1} - 1$ ist.

Hieraus folgt, dass die durch die Reihe $(\overline{\mathrm{R}})$ definirte analytische Function $f(x)$ notwendig transcendent ist. Wäre nämlich $y = f(x)$ eine algebraische Function, so müsste y einer irreducibeln algebraischen Gleichung

$$g(x, y) = 0$$

mit rationalen Coefficienten genügen, deren Grad in y gleich Γ sein möge. Wird der Veränderlichen x ein rationaler Wert r erteilt, so sind die zugehörigen Werte von y durch die Gleichung

$$g(r, y) = 0$$

bestimmt, jeder einzelne dieser Werte genügt also einer irreducibeln Gleichung, deren Grad $\leqq \Gamma$ ist. Bei der durch die Reihe $(\overline{\mathrm{R}})$ definirten Function $f(x)$ genügt aber einer der zu $x = \frac{1}{\lambda - 1}$ gehörenden Werte von $f(x)$ einer irreducibeln Gleichung vom Grade $\mu_{\varkappa+1} - 1$, und man kann, indem man in der Reihe der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ nur weit genug geht, bewirken, dass $\varkappa$ und damit auch a fortiori $\mu_{\varkappa+1} - 1$ grösser als jede gegebene noch so grosse ganze Zahl Γ wird. Mithin führt die Annahme, $f(x)$ sei eine algebraische Function, auf einen Widerspruch.

Zum Schluss möge auf eine Eigenschaft der algebraischen Functionen aufmerksam gemacht werden, die vielleicht dazu dienen kann, diese arithmetisch zu characterisiren. Ist $g(x, y)$ irgend eine ganze rationale Function mit ganzzahligen Coefficienten, so hat die durch die Gleichung $g(x, y) = 0$ definirte algebraische Function y von x die Eigenschaft, dass zu jedem algebraischen Werte a des Argumentes nicht nur algebraische Werte der Function, sondern auch sämtlicher Ableitungen von y nach x gehören. Wird also ein Zweig der Function in der Umgebung der Stelle $x = a$ durch eine Potenzreihe:

$$y = t_0 + t_1(x - a) + t_2(x - a)^2 + \dots$$

dargestellt, so sind die Coefficienten $t_0, t_1, t_2, \dots$ sämtlich algebraische Zahlen. Es würde also zu untersuchen sein, ob es *transcendente* Functionen gibt, die durch eine Potenzreihe mit lauter algebraischen Coefficienten:

$$y = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \dots$$

definirt werden, von der Beschaffenheit, dass daraus durch analytische Fortsetzung für jede in einer gewissen Umgebung der Stelle $x = 0$ gelegenen Stelle a, sobald a eine algebraische Zahl ist, Potenzreihen

$$y = t_0 + t_1(x - a) + t_2(x - a)^2 + \dots$$

hervorgehen, deren Coefficienten ebenfalls lauter algebraische Zahlen sind.

Kiel, im October 1901.