SUR LES RACINES D'UNE ÉQUATION FONDAMENTALE[1]

PAR

IVAR BENDIXSON

À STOCKHOLM.

Dans diverses recherches d'analyse on est conduit à l'étude de l'équation suivante

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s\,, & a_{12}\,, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{22}\,, & a_{22}-s\,, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}\,, & a_{n2}\,, & \ldots, & a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0$$

ou toutes les quantités $a_{\lambda\nu}$ sont des quantités réelles.

Dans le cas où

$$(2) \qquad a_{\lambda\nu} = a_{\nu\lambda} \qquad \begin{smallmatrix} \lambda=1,\ldots,n \\ \nu=1,\ldots,n \end{smallmatrix}$$

on sait que toutes les racines de l'équation (1) sont réelles, mais on n'a pas jusqu'à présent donné de théorème sur la nature des racines dans le cas où les équations (2) ne sont pas satisfaites.

On obtient pourtant aussi dans le cas général des résultats dignes d'intérêt.

Désignons par $s_1, s_2, \ldots, s_n$ les racines de l'équation (1) et par $R(s_\lambda)$ et $I(s_\lambda)$ la partie réelle et la partie imaginaire de s_λ, on aura toujours les deux théorèmes suivants.

Théorème I. *Soit g la plus grande des quantités $\frac{|a_{\lambda\nu}-a_{\nu\lambda}|}{2}$, on aura toujours*

$$|I(s_\lambda)| \leqq g\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

[1] Les théorèmes I et II de la présente note ont été déjà publiés dans un mémoire portant ce même titre et communiqué à l'académie des sciences à Stockholm le 14 nov. 1900.

Théorème II. *Soient M la plus grande et m la plus petite des racines de l'équation*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-t\,, & \frac{a_{12}+a_{21}}{2}\,, & \ldots, & \frac{a_{1n}+a_{n1}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2}\,, & a_{22}-t\,, & \ldots, & \frac{a_{2n}+a_{n2}}{2} \\ \frac{a_{1n}+a_{n1}}{2}\,, & \frac{a_{2n}+a_{n2}}{2}\,, & \ldots, & a_{nn}-t \end{vmatrix} = 0,$$

on aura toujours

$$m \leqq R(s_\lambda) \leqq M.$$

Afin d'établir nos théorèmes nous envisageons le système d'équations

$$(3)\qquad \begin{cases} (a_{11}-s_\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-s_\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-s_\lambda)x_n = 0, \end{cases}$$

s_λ désignant une racine quelconque de l'équation (1). On sait que ce système admet toujours des solutions $x_1, \ldots, x_n$ non nulles.

Mettons

$$s_\lambda = \alpha + \beta i$$

$$x_\nu = \xi_\nu + \eta_\nu i. \qquad {\scriptstyle \nu=1,\ldots,n}$$

En séparant la partie réelle de la partie imaginaire, les équations (3) peuvent s'écrire

$$(4)\qquad a_{\lambda 1}\xi_1 + a_{\lambda 2}\xi_2 + \ldots + a_{\lambda n}\xi_n = (\alpha\xi_\lambda - \beta\eta_\lambda) \qquad {\scriptstyle (\lambda=1,\ldots,n)}$$

$$(5)\qquad a_{\lambda 1}\eta_1 + a_{\lambda 2}\eta_2 + \ldots + a_{\lambda n}\eta_n = (\alpha\eta_\lambda + \beta\xi_\lambda). \qquad {\scriptstyle (\lambda=1,\ldots,n)}$$

Multiplions la première de ces équations par $-\eta_\lambda$ et la seconde par ξ_λ, et ajoutons; nous aurons

$$a_{\lambda 1}[\xi_\lambda\eta_1 - \xi_1\eta_\lambda] + a_{\lambda 2}[\xi_\lambda\eta_2 - \xi_2\eta_\lambda] + \ldots + a_{\lambda n}[\xi_\lambda\eta_n - \xi_n\eta_\lambda]$$
$$= \beta[\xi_\lambda^2 + \eta_\lambda^2]. \qquad {\scriptstyle (\lambda=1,\ldots,n)}$$

En sommant par rapport à λ on aura, en désignant par $\sum\limits_{(\lambda,\nu)}$ une sommation étendue à toutes les combinaisons différentes (λ, ν),

$$\sum_{(\lambda,\nu)}[a_{\lambda\nu}-a_{\nu\lambda}][\xi_\lambda\eta_\nu-\xi_\nu\eta_\lambda]=\beta\sum(\xi_\lambda^2+\eta_\lambda^2),$$

ce qui nous donne

$$|\beta|\sum\nolimits_\lambda(\xi_\lambda^2+\eta_\lambda^2)\leqq 2g\sum_{(\lambda,\nu)}|\xi_\lambda\eta_\nu-\xi_\nu\eta_\lambda|$$

ou

$$\beta^2\Big[\sum_{\lambda=1}^{n}(\xi_\lambda^2+\eta_\lambda^2)\Big]^2\leqq 4g^2\Big[\sum_{(\lambda,\nu)}|\xi_\lambda\eta_\nu-\xi_\nu\eta_\lambda|\Big]^2.$$

Or on sait que

$$[k_1+k_2+\ldots+k_N]^2\leqq N[k_1^2+k_2^2+\ldots+k_N^2],$$

$k_1, k_2, \ldots, k_N$ désignant des quantités réelles quelconques.

On aura par conséquent

$$\Big\{\sum_{(\lambda,\nu)}|\xi_\lambda\eta_\nu-\xi_\nu\eta_\lambda|\Big\}^2\leqq\frac{n(n-1)}{2}\sum_{(\lambda,\nu)}(\xi_\lambda\eta_\nu-\xi_\nu\eta_\lambda)^2,$$

donc

$$\beta^2\big(\sum\xi_\lambda^2+\sum\eta_\lambda^2\big)^2\leqq 2n(n-1)g^2\,.\sum_{(\lambda,\nu)}(\xi_\lambda\eta_\nu-\xi_\nu\eta_\lambda)^2.$$

Or les identités bien connues

$$\big(\sum\xi_\lambda^2+\sum\eta_\lambda^2\big)^2=4\sum\xi_\lambda^2\,.\sum\eta_\lambda^2+\big(\sum\xi_\lambda^2-\sum\eta_\lambda^2\big)^2,$$

$$\sum\xi_\lambda^2\,.\sum\eta_\lambda^2=\big(\sum\xi_\lambda\eta_\lambda\big)^2+\sum_{(\lambda,\nu)}(\xi_\lambda\eta_\nu-\xi_\nu\eta_\lambda)^2$$

donnent immédiatement

$$\big(\sum\xi_\lambda^2+\sum\eta_\lambda^2\big)^2\geqq 4\sum_{(\lambda,\nu)}(\xi_\lambda\eta_\nu-\xi_\nu\eta_\lambda)^2,$$

de sorte qu'on obtient enfin

$$\beta^2\leqq\frac{n(n-1)}{2}g^2$$

ou

$$|\beta|\leqq\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\,g.$$

c. q. f. d.

La démonstration du théorème II n'offre pas plus de difficulté.

En effet, on tire des équations (4) et (5) l'équation suivante

$$\xi_\lambda[a_{\lambda 1}\xi_1 + a_{\lambda 2}\xi_2 + \ldots + a_{\lambda\nu}\xi_n] + \eta_\lambda[a_{\lambda 1}\eta_1 + \ldots + a_{\lambda n}\eta_n] - \alpha[\xi_\lambda^2 + \eta_\lambda^2] = 0. \quad {\scriptstyle (\lambda=1,\ldots,n)}$$

En faisant la sommation de ces équations on aura

$$\Sigma_\lambda \Sigma_\nu a_{\lambda\nu}(\xi_\lambda\xi_\nu + \eta_\lambda\eta_\nu) - \alpha\Sigma_\lambda(\xi_\lambda^2 + \eta_\lambda^2) = 0. \tag{6}$$

Envisageons maintenant la forme quadratique

$$\Sigma_\lambda \Sigma_\nu a_{\lambda\nu}(x_\lambda x_\nu + y_\lambda y_\nu) - s\Sigma_\lambda(x_\lambda^2 + y_\lambda^2), \tag{7}$$

où s désigne une quantité réelle arbitraire.

Pour des valeurs suffisamment grandes de s on sait que cette expression est une forme définie, et un théorème bien connu sur les formes quadratiques[1] nous apprend qu'elle ne cesse d'être une forme définie que quand s est situé entre la plus grande et la plus petite des racines de l'équation

$$\begin{vmatrix}
a_{11}-s, & \frac{a_{12}+a_{21}}{2}, & \ldots, & \frac{a_{1n}+a_{n1}}{2}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\
\frac{a_{12}+a_{21}}{2}, & a_{22}-s, & \ldots, & \frac{a_{2n}+a_{n2}}{2}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{a_{1n}+a_{n1}}{2}, & \frac{a_{2n}+a_{n2}}{2}, & \ldots, & a_{nn}-s, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & a_{11}-s, & \frac{a_{12}+a_{21}}{2}, & \ldots, & \frac{a_{1n}+a_{n1}}{2} \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & \frac{a_{12}+a_{21}}{2}, & a_{22}-s, & \ldots, & \frac{a_{2n}+a_{n2}}{2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & \frac{a_{1n}+a_{n1}}{2}, & \frac{a_{2n}+a_{n2}}{2}, & \ldots, & a_{nn}-s
\end{vmatrix} = 0$$

[1] Voir WEIERSTRASS: *Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem*, Werke Bd. I, pages 242, 243.

laquelle peut s'écrire d'une manière plus simple ainsi:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s\ , & \dfrac{a_{12}+a_{21}}{2}\ , & \ldots, & \dfrac{a_{1n}+a_{n1}}{2} \\ \dfrac{a_{12}+a_{21}}{2}\ , & a_{22}-s\ , & \ldots, & \dfrac{a_{2n}+a_{n2}}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{a_{1n}+a_{n1}}{2}\ , & \dfrac{a_{2n}+a_{n2}}{2}\ , & \ldots, & a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0.$$

Or l'équation (6) met en évidence que l'expression (7) n'est pas une forme définie pour $s = \alpha$, ce qui nous donne

$$m \leqq \alpha \leqq M.$$

c. q. f. d.

Dans le cas où $a_{\lambda\nu} + a_{\nu\lambda} = 0$; $a_{\nu\nu} = 0$, l'équation (1) est de la forme

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} s\ , & a_{12}\ , & a_{13}\ , & \ldots, & a_{1n} \\ -a_{12}\ , & s\ , & a_{23}\ , & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1n}\ , & -a_{2n}\ , & -a_{3n}\ , & \ldots, & s \end{vmatrix} = 0$$

et on peut affirmer que toutes les racines de cette équation sont telles que

$$R(s_\nu) = 0.$$

En particulier on conclut que $s = 0$ est une racine de l'équation (8), quand n est un nombre impair, résultat bien connu.

La même méthode s'applique évidemment à une classe d'équations un peu plus générales.

Soit en effet

$$\sum_{\lambda,\nu} b_{\lambda\nu} x_\lambda x_\nu$$

une forme quadratique définie et positive où

$$b_{\lambda\nu} = b_{\nu\lambda};$$

et soit ρ la plus petite des racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\rho\,, & b_{12}\,, & \ldots, & b_{1n} \\ b_{21}\,, & b_{22}-\rho\,, & \ldots, & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}\,, & b_{n2}\,, & \ldots, & b_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

lesquelles sont toutes des quantités positives.

Envisageons l'équation

$$(1') \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-sb_{11}\,, & a_{12}-sb_{12}\,, & \ldots, & a_{1n}-sb_{1n} \\ a_{21}-sb_{21}\,, & a_{22}-sb_{22}\,, & \ldots, & a_{2n}-sb_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-sb_{n1}\,, & a_{n2}-sb_{n2}\,, & \ldots, & a_{nn}-sb_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

où les quantités $a_{\lambda\nu}$ sont des quantités réelles quelconques. Désignons par $s_1, s_2, \ldots, s_n$ les racines de l'équation (1') et par $R(s_k)$ et $J(s_k)$ la partie réelle et la partie imaginaire de s_k, les deux théorèmes suivants auront lieu.

Théorème I'. *Soit g la plus grande des quantités $\left|\frac{a_{\lambda\nu}-a_{\nu\lambda}}{2}\right|$, on aura toujours*

$$|J(s_k)| \leqq \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\,\frac{g}{\rho}.$$

Théorème II'. *Soient M la plus grande et m la plus petite des racines de l'équation*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-b_{11}s\,, & \frac{a_{12}+a_{21}}{2}-b_{12}s\,, & \ldots, & \frac{a_{1n}+a_{n1}}{2}-b_{1n}s \\ \frac{a_{12}+a_{12}}{2}-b_{21}s\,, & a_{22}-b_{22}s\,, & \ldots, & \frac{a_{2n}+a_{n2}}{2}-b_{2n}s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_{n1}+a_{1n}}{2}-b_{n1}s\,, & \frac{a_{n2}+a_{2n}}{2}-b_{n2}s\,, & \ldots, & a_{nn}-b_{nn}s \end{vmatrix} = 0$$

on aura toujours

$$m \leqq R(s_k) \leqq M.$$

La démonstration du théorème II' se fait exactement de la même manière que ci-dessus.

Quant au théorème I' notre méthode conduit à l'inégalité

$$\beta \leqq \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot g \cdot \sqrt{\frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} \xi_\lambda^2 \cdot \sum\limits_{\nu=1}^{n} \eta_\lambda^2}{\sum\limits_{\lambda,\nu} b_{\lambda\nu}\xi_\lambda\xi_\nu \cdot \sum\limits_{\lambda,\nu} b_{\lambda\nu}\eta_\lambda\eta_\nu}}$$

et un théorème bien connu sur les formes quadratiques nous apprend que

$$\frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} \xi_\lambda^2}{\sum\limits_{\lambda,\nu} b_{\lambda\nu}\xi_\lambda\xi_\nu} \leqq \frac{1}{\rho} \geqq \frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda^2}{\sum\limits_{\lambda,\nu} b_{\lambda\nu}\eta_\lambda\eta_\nu}.$$

Pour le cas où $a_{\lambda\nu} + a_{\nu\lambda} = 0$; $a_{\nu\nu} = 0$ l'équation (1') sera de la forme

$$(8') \qquad \begin{vmatrix} sb_{11}, & a_{12} + sb_{12}, & a_{13} + sb_{13}, & \ldots, & a_{1n} + sb_{1n} \\ -a_{12} + sb_{12}, & sb_{22}, & a_{23} + sb_{23}, & \ldots, & a_{2n} + sb_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1n} + sb_{1n}, & -a_{2n} + sb_{2n}, & -a_{3n} + sb_{3n}, & \ldots, & sb_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

et on peut affirmer que toutes les racines de cette équation sont telles que

$$R(s_\nu) = 0.$$